

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : Structures algébriques	3.5 points
— Exercice 2 : Nombres complexes	3.5 points
— Exercice 3 : Arithmétique	3 points
— Exercice 4 : Problème d'analyse	5.5 points
— Exercice 5 : Problème d'analyse	4.5 points

- ♠ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z
- ♠ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

I - Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$, on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 - Calculer $I - A$ et A^2 .

2 - En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera.

II - Pour tout a et b de l'intervalle $I =]1; +\infty[$, on pose $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$.

1 - Vérifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$.

2 - Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

3 - On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow I$
 $\mapsto \sqrt{x+1}$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers $(I, *)$

b) En déduire la structure de $(I, *)$.

c) Montrer que l'ensemble $\Gamma = \{\sqrt{1+2^m} / m \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $(I, *)$.

Exercice 2 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

I - Soit a est un nombre complexe non nul, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$$

1 - Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) .

2 - a) Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i-1)$.

b) Montrer que : $z_1 z_2$ est un nombre réel $\iff \arg a \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$.

II - Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul

On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectives $1, 1+i, c, ic$ et z .

1 - a) Montrer que A, D et M sont alignés $\iff (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ (remarquer que $c = \bar{c}$)

b) Montrer que : $(AD) \perp (OM) \iff (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$.

2 - Soit h l'abscisse du point H , le projeté orthogonal du point O sur (AD) .

a) Montrer que : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$.

b) En déduire que $(CH) \perp (BH)$.

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 143x - 195y = 52$

a) Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Sachant que $(-1; -1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2 - Soit n un entier naturel non nul premier avec 5.

Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $n^{4k} \equiv 1[5]$.

3 - Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y [4]$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y [5]$.

b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y [10]$.

4 - Soient x et y deux entiers naturels tel que (x, y) est solution de l'équation (E) .

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

Exercice 4 : (5.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

2 - a) Étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D) .

3 - Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

4 - Construire la courbe (C_3) . (On prend $f_3(-0,6) \simeq 0$ et $f_3(-1,5) \simeq 0$ et $\ln 3 \simeq 1,1$)

5 - a) Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < \ln n$

b) Montrer que pour $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x \leq -\ln n$ et $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

6 - On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.

b) Vérifier que pour $n \geq 3$ on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

Exercice 5 : (4.5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0;1]$ par :

$$F(0) = 1 \text{ et } F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \text{ si } x > 0$$

1 - Soit x un élément de $[0;1]$, montrer que pour tout t de $[0;x]$ on a : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2 - Soit x un élément de $]0;1]$

a) Montrer que $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$.

b) Montrer que $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$, et en déduire que F est continue à droite en 0.

3 - En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $]0;1]$ on a :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right) dt$$

4 - Soit x un élément de $]0;1]$

a) Montrer que $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$

0,75 pt

b) Montrer que $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1)

0,75 pt

c) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0; x]$ montrer que

0,25 pt

d) Dédurre que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0.

FIN

①

2012 N

EXERCICE 1

 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$$

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{e^{-x}}{n} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{e^{-x}}{n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t + \frac{e^t}{n} \quad (\text{en posant } t = -x)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t \left(-\left(\frac{t}{e^t}\right) + \frac{1}{n} \right) = +\infty \left(0 + \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$$

$$2^\circ / \textcircled{a} \quad \text{on a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{donc en posant } t = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -1 + \left(\frac{e^t}{-t} \right) \frac{1}{n} = -1 + \infty = \infty$$

donc (f_n) admet une direction asymptotique parallèle à (Oy) au voisinage de $(-\infty)$

$$\textcircled{b} \textcircled{*} \quad \text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{n} = 0$$

donc (f_n) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x$ au voisinage de $(+\infty)$.

② Position relative.

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_n(x) - x = \frac{e^{-x}}{n} > 0$ donc (f_n) est toujours au-dessus de l'asymptote (D) .

3°/ variations de f_n ?

on a f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n}$

$$\text{donc } f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = n \Leftrightarrow x = -\ln(n)$$

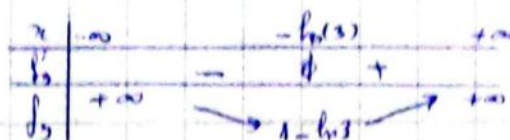
$$f_n(-\ln(n)) = -\ln(n) - 1$$

d'où

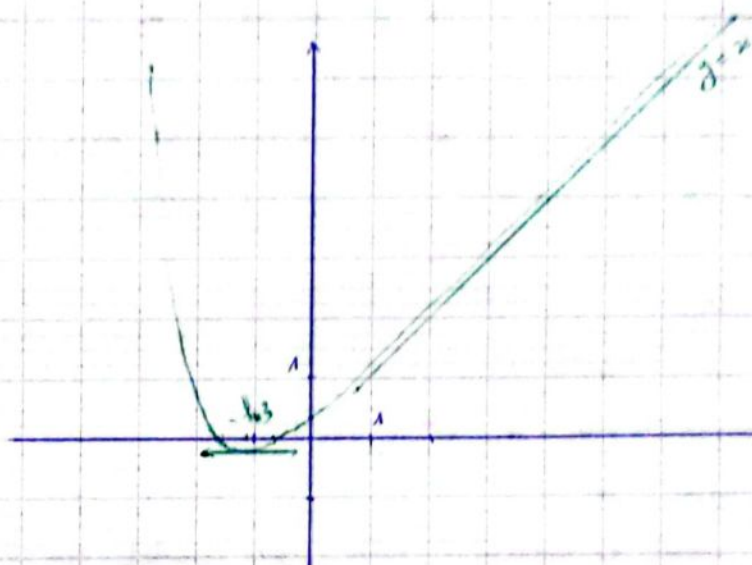
x	$-\infty$	$-\ln(n)$	$+\infty$
f'_n		0	
f_n	$+\infty$	$1 - \ln(n)$	$+\infty$

2

4° la courbe $(\mathcal{C}_3)$
pour $n=3$ on a



$$f_3(0) = \frac{1}{3}$$



5° ④ Mq $\forall n \geq 3 \quad \frac{e}{n} < \ln(n)$?

(meth 1) on a $\forall n \geq 3 \quad n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{e}{n} \leq \frac{e}{3} < 1$
 $\forall n \geq 3 \quad \ln(n) \geq \ln(3) \Rightarrow \ln(n) > 1$

$$\text{c/c} \quad \forall n \geq 3 \quad \frac{e}{n} < 1 < \ln(n) \Rightarrow \frac{e}{n} < \ln(n)$$

(meth 2) on considere $f(x) = \frac{e}{x} - \ln(x) \quad \forall x \in [3, +\infty[$

f derivable sur $[3, +\infty[$ et $\forall x \in [3, +\infty[\quad f'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$

donc f strict decroissante sur $[3, +\infty[$

$$\Rightarrow (\forall x \in [3, +\infty[) \quad x \geq 3 \Rightarrow f(x) \leq f(3) \Rightarrow f(x) \leq \frac{e}{3} - \ln(3) < 0$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}) \quad f(n) < 0 \Rightarrow \forall n \geq 3 \quad \frac{e}{n} < \ln(n)$$

$$\text{c/c} \quad \forall n \geq 3 \quad \frac{e}{n} < \ln(n)$$

⑥ Determinons l'existence de x_n et y_n ?

① pour $n \geq 3 \quad f_n$ est strictement decroissante sur $] -\infty, -\ln(n)]$

et f_n continue (car $x \mapsto x$ cont et $x \mapsto e^{-x}$ cont)

donc f_n est bijective de $] -\infty, -\ln(n)]$ vers $J = f_n(] -\infty, -\ln(n)])$

or $J = [1 - \ln(n), +\infty[$ et $0 \in J$ donc 0 admet un antecedent

unique x_n dans $] -\infty, -\ln(n)]$.

$$\text{c/c,} \quad \exists! x_n \in] -\infty, -\ln(n)] \quad / \quad f_n(x_n) = 0.$$

(3)

* pour $n \geq 3$ f_n est strictement croissante sur $I_n = [-\frac{e}{n}, 0]$
 et f_n continue donc f_n bijective de I_n vers $J_n = f_n(I_n) = [\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}, 1]$
 or $\frac{e}{n} < 1 \Rightarrow e^{\frac{e}{n}} < e \Rightarrow \frac{e^{\frac{e}{n}}}{n} < 1$

donc $0 \in J_n \Rightarrow 0$ admet un antécédent unique $y_n \in I_n$
 tq $f_n(y_n) = 0$

de plus f_n est strictement croissante sur $[-\ln(n), +\infty[$ et $I_n \subset [-\ln(n), +\infty[$
 (car on a montré $\frac{e}{n} < \ln(n)$ donc $-\frac{e}{n} > -\ln(n)$)

$\forall n$ y_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ dans $[-\ln(n), +\infty[$
 et $-\frac{e}{n} < y_n < 0$

② les limites de x_n et y_n ?

④ on a $\forall n \geq 3$ $x_n \leq -\ln(n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} -\ln(n) = -\infty$
 donc d'après l'ordre des limites on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

④ on a $\forall n \geq 3$ $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$ or $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{e}{n} = 0$
 donc d'après l'ordre des limites on a $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

$\forall n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x & x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

③ g cont en $x_0 = 0$?

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1 - x \ln x) = -1 - 0 = -1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$$

$\forall n$ g est continue à droite de 0

⑤ vérification :

$$\text{on sait que } \forall n \geq 3 \quad f_n(x_n) = 0 \text{ donc } x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_n} = -n x_n \Leftrightarrow -x_n = \ln(n) + \ln(-x_n) \quad (\text{car } x_n < 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x_n) = -(x_n + \ln(n))$$

$$\text{donc } g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1 + \frac{1}{x_n} \ln\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1 - \frac{\ln(-x_n)}{x_n}$$

(4)

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1 + \frac{x_n + \ln(n)}{x_n}$$

$$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\ln(n)}{x_n}$$

$$\text{c/c } \forall n \geq 3 \quad g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\ln(n)}{x_n}$$

© Deducire la limite

$$\text{on a } \forall n \geq 3 \quad g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\ln(n)}{x_n} \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) \quad \left(\begin{array}{l} \text{en posant} \\ t = -\frac{1}{x_n} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{x_n} = g(0) = -1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } g \text{ est continue} \\ \text{de } 0 \end{array} \right)$$

$$\text{c/c } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{x_n} = -1$$

5

EXERCICE 2

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} & \forall x \in]0, 1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

1°/ Mq $\forall x \in [0, 1] \quad \forall t \in [0, x] \quad \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$?

on a $0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 \leq 2t \leq 2x \Rightarrow 1 \leq 1+2t \leq 1+2x$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

quant. con-
bête

c/c $\forall x \in [0, 1] \quad \forall t \in [0, x] \quad \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

2°/ ① $\forall x \in]0, 1]$. Mq $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$.

meth 1
 $\forall x \in]0, 1]$ $\int_0^x \frac{t}{1+2t} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{2t+1-1}{2t+1} dt$
 $= \frac{1}{x^2} \int_0^x 1 - \frac{1}{2t+1} dt = \frac{1}{x^2} \left[t - \frac{1}{2} \ln(2t+1) \right]_0^x$
 $= \frac{1}{x^2} \left[x - \frac{1}{2} \ln(2x+1) - 0 \right] = \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right)$
 $= F(x)$

meth 2 $\forall x \in]0, 1]$ on a $\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln(1+2x) - \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt = 0$

donc il suffit de montrer la deuxième égalité.
on peut fermer car on n'a plus 0 au dénominateur et on aura besoin de 0
on pose $\forall x \in [0, 1] \quad U(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln(1+2x) - \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$

U dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1] \quad U'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1+2x} \right) - \left(\frac{x}{1+2x} \right)$
 $\Rightarrow U'(x) = 0$

donc $\forall x \in [0, 1] \quad U(x) = c^{te} = U(0) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in [0, 1] \quad U(x) = 0$

c/c $\forall x \in]0, 1] \quad F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$

② Mq $\forall x \in [0, 1] \quad \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$?

⊗ pour $x=0$ l'inégalité est vraie

⊗ pour $x \in]0, 1]$

↳ endoaire

6

on a vu que $\forall t \in]0, x]$

$$\frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{1+2x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} t \leq \frac{t}{1+2t} \leq t \quad (*)$$

or $t \mapsto t$ et $t \mapsto \frac{t}{1+2t}$ sont sur $[0, x]$, donc puisque $x > 0$

$$(*) \Rightarrow \frac{1}{1+2x} \int_0^x t \, dt \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t} \, dt \leq \int_0^x t \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2(1+2x)} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x \leq F(x) \leq \frac{2}{x^2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$$

$$\forall x \in]0, 1] \quad \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$$

3°/ l'intégration par parties.

$$\forall x \in]0, 1] \text{ soit } I(x) = \int_0^x \frac{2t}{1+2t} \, dt \quad \text{on pose}$$

$$u(t) = 2t \quad v(t) = \frac{1}{1+2t} \quad u = t^2 \quad v'(t) = \frac{-2}{(1+2t)^2}$$

donc par intégration par parties.

$$I(x) = \left[v(t) \cdot u(t) \right]_0^x - \int_0^x u(t) v'(t) \, dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{2t}{1+2t} \, dt = \left[\frac{t^2}{1+2t} \right]_0^x + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 \, dt$$

$$\forall x \in]0, 1], \quad \int_0^x \frac{2t}{1+2t} \, dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 \, dt$$

4°/ $\forall x \in]0, 1]$ a) calcul de $F'(x)$?

$$\text{on a } \forall x \in]0, 1] \quad F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} \, dt$$

donc F dérivable sur $]0, 1]$ car $(x \mapsto \frac{2}{x^2})$ dérivable sur $]0, 1]$
 et $x \mapsto \int_0^x \frac{t}{1+2t} \, dt$ est la primitive de $f(x) = \frac{x}{1+2x}$ qui s'annule
 pour $x=0$ donc elle est dérivable.)

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1] \quad F'(x) &= \left(\frac{2}{x^2} \right)' \int_0^x \frac{t}{1+2t} \, dt + \frac{2}{x^2} \left(\int_0^x \frac{t}{1+2t} \, dt \right)' \\ &= -\frac{4}{x^3} \int_0^x \frac{t}{1+2t} \, dt + \frac{2}{x^2} \left(\frac{x}{1+2x} \right) \end{aligned}$$

⑦

donc $F'(x) = \frac{-4}{x^3} \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{1+2x} + \frac{2}{2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \right) + \frac{2}{x(1+2x)}$
 $= -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$

(car on a $\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$)
 $\Rightarrow \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt = \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+2x} + \frac{2}{2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$

c/c $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \quad \forall x \in]0, 1]$

⑥ Mq $\forall x \in]0, 1]$ $-\frac{4}{3} < F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

on $0 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq 1+2t \leq 1+2x \Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \cdot t^2 \leq \frac{t^2}{(1+2t)^2} \leq t^2$ (*)

or $t \rightarrow t^2$ et $t \rightarrow \frac{t^2}{(1+2t)^2}$ cont sur $[0, x]$ donc

② $\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \int_0^x t^2 dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \leq \int_0^x t^2 dt$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \leq \frac{1}{3} x^3$

$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

c/c $\forall x \in]0, 1]$ $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

③ Th des accroissements Finis. $\forall x \in]0, 1]$.

on a F continue sur $[0, x]$ et F derivable sur $]0, x[$ donc d'apres le Th des Accroissements finis

$\exists c \in]0, x[\quad \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(c)$

or d'apres (4-b) $-\frac{4}{3} \leq F'(c) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

$\Rightarrow -\frac{4}{3} \leq F'(c) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

⑧

$$\text{car } c < x \Rightarrow 1+2c \leq 1+2x \Rightarrow 3(1+2c)^2 \leq 3(1+2x)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{3(1+2c)^2} \geq \frac{1}{3(1+2x)^2} \Rightarrow \frac{-4}{3(1+2c)^2} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$$\text{c/c } \forall x \in]0,1] \quad -\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

④) Deduction de la dérivabilité?

$$\text{ona } \forall x \in]0,1] \quad -\frac{4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4}{3(1+2x)^2} = -\frac{4}{3}$$

donc d'après l'ordre des limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = -\frac{4}{3} \in \mathbb{R}$$

c/c F est dérivable à droite de 0 et $F'_d(0) = -\frac{4}{3}$

9

EXERCICE 3 (Arithmétique)

dans $\mathbb{Z}^2$ on a l'eq (E): $143x - 195y = 52$

1^{re}/a) $195 \wedge 143 = ?$

on a $143 = 11 \times 13$

$195 = 3 \times 5 \times 13$

donc $143 \wedge 195 = 13$

obduction: $143 \wedge 195 = 13$ et $13/52$

donc l'équation de Diophante admet des solutions.

(b) on a $(-1, -1)$ sol particulière de (E) donc

et (E): $143x - 195y = 52 \Leftrightarrow 11x - 15y = 4$

donc (1) $11x - 15y = 4$ et (2) $11(-1) - 15(-1) = 4$

(1) - (2) $\Leftrightarrow 11(x+1) - 15(y+1) = 0 \Leftrightarrow 11(x+1) = 15(y+1)$ (E')

donc $11/15(y+1)$ et $11 \wedge 15 = 1$ donc d'après th de Gauss

on obtient $11/y+1$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y+1 = 11k \Rightarrow y = 11k - 1$

on remplace dans (E'): $11(x+1) = 15 \times 11k$

$\Leftrightarrow x+1 = 15k \quad / k \in \mathbb{Z}$

c/c $S = \{(15k-1, 11k-1) / k \in \mathbb{Z}\}$

2^{de}/ $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \wedge 5 = 1$.

(a) Mq $\forall k \in \mathbb{N} \quad n^{4k} \equiv 1 [5]$?

on a $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \wedge 5 = 1$ et 5 nombre premier positif

donc d'après le petit th de Fermat $n^4 \equiv 1 [5]$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad (n^4)^k \equiv 1^k [5]$

c/c $\forall k \in \mathbb{N} \quad n^{4k} \equiv 1 [5]$

(10)

$$3^{\circ} \quad \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad \text{tq} \quad x \equiv y [4]$$

$$① \quad \text{Mq} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^x \equiv n^y [5] ?$$

$$② \quad \text{Si on a} \quad n \wedge 5 \neq 1 \quad \text{alors} \quad 5/n \quad (\text{car } 5 \text{ premier}) \\ \Rightarrow n^x \equiv 0 [5] \quad \text{et} \quad n^y \equiv 0 [5] \Rightarrow n^x \equiv n^y [5] \quad \text{vrai}$$

$$③ \quad \text{Si on a} \quad n \wedge 5 = 1 \quad \text{donc puisque} \quad x \equiv y [4]. \\ \begin{array}{l} \swarrow \text{Si } x > y \quad \text{alors} \quad x = y + 4k \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow n^x = n^y \times n^{4k} [5] \Rightarrow n^x \equiv n^y [5]. \\ \searrow \text{Si } x \leq y \quad \text{alors} \quad y = x + 4k \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \Rightarrow n^y = n^x \times n^{4k} \Rightarrow n^x \equiv n^y [5]. \end{array}$$

$$\text{c/c} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^x \equiv n^y [5]$$

$$⑥ \quad \text{Deduire} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n^x \equiv n^y [10].$$

$$\text{on a déjà} \quad n^x \equiv n^y [5] \quad \text{donc il suffit de montrer} \\ \text{que} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^x \equiv n^y [2] ? \quad \text{car} \quad 10 = 5 \times 2 \quad \text{et} \quad 5 \wedge 2 = 1$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \text{Si } n \text{ pair} \Rightarrow n = 2n' \Rightarrow n^x \equiv 0 [2] \quad \text{et} \quad n^y \equiv 0 [2] \\ \Rightarrow n^x \equiv n^y [2] \\ \searrow \text{Si } n \text{ est impair} \quad n = 2n' + 1 \Rightarrow n^x \equiv 1^x \Rightarrow n^x \equiv 1 [2] \\ \text{et de même} \quad n^y \equiv 1 [2] \quad \text{d'où} \quad n^x \equiv n^y [2] \end{array}$$

$$\text{c/c,} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^x \equiv n^y [2]$$

$$\text{c/c} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n^x \equiv n^y [5] \quad \text{et} \quad n^x \equiv n^y [2] \quad \text{et} \quad 2 \wedge 5 = 1 \\ \text{donc} \quad n^x \equiv n^y [10].$$

$$4^{\circ} \quad x, y \in \mathbb{N}^* \quad \text{avec} \quad 143x - 195y = 52.$$

$$\text{on a d'après (9-1)} \quad x = 15k - 1 \quad \text{et} \quad y = 11k - 1 \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} x \equiv 3k - 1 [4] \Rightarrow x \equiv 3k + 3 [4]. \\ y \equiv 3k - 1 [4] \Rightarrow y \equiv 3k + 3 [4]. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \equiv y [4].$$

$$\Rightarrow n^x \equiv n^y [10]$$

(M)

on a $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et $r_1 \equiv r_2 [10]$

e) $r_1, \dots, r_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et $r_1 = r_2 + 10k'$ ($k' \in \mathbb{Z}$)

f) $r_1 = r_2$

4c n^x et n^y ont le même chiffre d'unité dans le système de numération de base décimale.

(18)

EXERCICE 4 (STRUCTURES)

(I) $(\mathbb{L}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ anneau unitaire.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1°/ calcul de $I-A$ et A^2 ?

$$I-A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2°/ Deduction.

on remarque alors que $A^2 = I - A$

$$\Leftrightarrow I = A^2 + A \Leftrightarrow I = A(A+I)$$

c/c A admet donc un inverse $A^{-1} = A+I$.(II) $I =]1, +\infty[$ et $\forall a, b \in I \quad a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

1°/ vérification:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x^2-1)(y^2-1)+1 = x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1 \\ = x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2.$$

$$\text{c/c } \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2-1)(y^2-1)+1$$

2°/ "*" loi de comp interne dans I ?

$$\forall x, y \in I \quad \text{on a } x * y - 1 = (x^2-1)(y^2-1) > 0$$

$$\text{car } x^2-1 > 0 \text{ et } y^2-1 > 0$$

$$\Rightarrow x * y \in I$$

c/c "*" est une loi de composition interne dans I

13

③ on a $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ groupe commutatif.

$$\varphi: (\mathbb{R}^{++}, \times) \longrightarrow (\mathbb{I}, *) \quad \text{application}$$

$$x \longmapsto \sqrt{x+1}$$

② Mq φ est un isomorphisme

① la bijection? Mq $(\forall a \in \mathbb{I})(\exists x \in \mathbb{R}^{++}) \varphi(x) = a$?

c'est $\varphi^{-1}(a)$

$$(\forall a \in \mathbb{I}) \quad \varphi(x) = a \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = a \Leftrightarrow x+1 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \underline{a^2 - 1} \in \mathbb{I} \quad (\text{car } a > 0 \text{ et } a > 1)$$

donc φ est surjective de $\mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{I}$

et puisque la solution de x est unique donc φ est bijective.

② l'homomorphisme des lois?

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}^{++}) \quad \varphi(a \times b) = \varphi(ab) = \sqrt{ab+1}$$

$$\varphi(a) * \varphi(b) = (\sqrt{a+1}) * (\sqrt{b+1}) = \sqrt{(a+1)(b+1) - (a+1) - (b+1) + 2}$$

$$= \sqrt{ab+1}$$

$$\text{donc} \quad \varphi(a \times b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

c/c φ est donc un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{++}, \times) \longrightarrow (\mathbb{I}, *)$

⑤ Deduction

on a $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ groupe commutatif et φ isomorphisme de $(\mathbb{R}^{++}, \times) \longrightarrow (\mathbb{I}, *)$

donc $(\mathbb{I}, *)$ est un groupe commutatif.

c/c $(\mathbb{I}, *)$ groupe commutatif.

③ Mq $(\Gamma, *)$ sous groupe de $(\mathbb{I}, *)$?

$$\Gamma = \{ \sqrt{1+2^m} \mid m \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{on a } \forall m \in \mathbb{Z} \quad 2^m > 0 \Rightarrow \sqrt{1+2^m} > 1 \Rightarrow \Gamma \subset \mathbb{I}$$

$$\text{pour } m=0 \text{ on a } \sqrt{2} \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \neq \emptyset.$$

$$\forall b \in \mathbb{I} \quad \varphi^{-1}(b) = b^2 - 1 \quad (\text{d'après 3° a})$$

(14)

et l'inverse de b^2-1 dans $(\mathbb{R}^{++}, \times)$ est $\frac{1}{b^2-1}$

puis $\varphi\left(\frac{1}{b^2-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{b^2-1} + 1} = \sqrt{\frac{b^2}{b^2-1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}$ (car $a > 0$)

c/c, le symétrique de b dans $(I, *)$ est $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}$

donc le symétrique de $\sqrt{1+2^m}$ dans $(I, *)$ est

$$(\sqrt{1+2^m})' = \frac{\sqrt{1+2^m}}{\sqrt{1+2^m}-1} = \sqrt{\frac{1+2^m}{2^m}} = \sqrt{1+2^{-m}}$$

donc $\forall \sqrt{1+2^m}$ et $\sqrt{1+2^n} \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2^n} * (\sqrt{1+2^m})' &= \sqrt{(1+2^n)(1+2^{-m}) - (1+2^n) - (1+2^{-m}) + 2} \\ &= \sqrt{1+2^{-m}+2^n+2^{n-m}-1-2^n-2^{-m}+2} \\ &= \sqrt{1+2^{n-m}} \in \Gamma \end{aligned}$$

donc $(\Gamma, *)$ est un sous groupe de $(I, *)$

c/c $(\Gamma, *)$ sous groupe de $(I, *)$

15

EXERCICE 5

I/ (E): $z^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$ $a \in \mathbb{C}^*$

1°/ les sol de (E):

$$(E): z^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$$

$$\Delta = (2-i)^2 a^2 + 4(1+i)a^2 \cdot i = a^2(4-1-4i+4i-4)$$

$$= -a^2 = (ia)^2$$

$$(E) \Leftrightarrow z_1 = \frac{-(2-i)a + ia}{2i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(2-i)a - ia}{2i}$$

$$= +ai + a$$

$$= +ai$$

$$c/c \quad S = \{z_1, z_2\} \quad z_1 = -ai \quad z_2 = -ai - a$$

2°/ Verification

$$z_1 \times z_2 = (-ai)(-ai - a) = a^2(i(i+1)) = a^2(-1+i)$$

$$c/c \quad z_1 \times z_2 = a^2(i-1)$$

(b) Montrons l'equivalence

$$z_1/z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z_1/z_2} = z_1/z_2 \Leftrightarrow \overline{z_1}/\overline{z_2} = z_1/z_2 \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2}$$

$$z_1, z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z_1, z_2) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \arg(a^2(-1+i)) = k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\arg(a) + \arg(-1+i) = k\pi \quad \text{or} \quad -1+i = \sqrt{2}e^{3\pi/4}$$

$$\Leftrightarrow 2\arg(a) + \frac{3\pi}{4} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \arg(a) = \frac{-3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arg(a) = \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$c/c \quad \arg(a) = \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

16
II

$c \in \mathbb{R}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$

$A(1) \quad B(1+c) \quad C(c) \quad D(c^2) \quad M(z)$

1°/a) Montrons l'équivalence (1)

$$A, D, M \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-1}{c^2-1} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{c^2-1}\right)} = \left(\frac{z-1}{c^2-1}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{c^2-1} = \frac{z-1}{c^2-1}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{z}-1)(c^2-1) + (c^2+1)(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(c^2-1) + z(c^2+1) = c^2-1 + c^2+1$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(c^2-1) + z(c^2+1) = 2c^2$$

$$c/c \quad \bar{z}(c^2-1) + z(c^2+1) = 2c^2 \Leftrightarrow A, D, M \text{ alignés}$$

b) Montrons l'équivalence (2)

$$(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow \frac{z_M - z_O}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z}{c^2-1}\right)} = -\left(\frac{z}{c^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$c/c \quad (c^2+1)z - (c^2-1)\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (AD) \perp (OM)$$

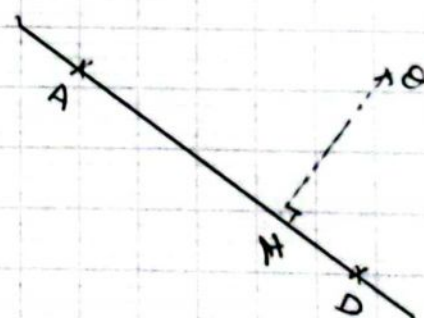
2°/ a) Mq : $h - (1+c) = \frac{c}{c^2} (h-c)$?

H projeté orthogonal de O sur (AD)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (AD) \perp (OH) \\ A, D, H \text{ alignés} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (c^2+1)h - (c^2-1)\bar{h} = 0 & (1) \\ (c^2+1)h + (c^2-1)\bar{h} = 2ic & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2(c^2+1)h = 2ic \Rightarrow h = \frac{ic}{c^2+1}$$



17

donc $h - (1+i) = \frac{ic}{ic+1} - 1 - i = \dots$

$$\frac{i}{c} (h-c) = \frac{i}{c} \left(\frac{ic}{ic+1} - c \right) = \dots$$

c/c $h - (1+i) = \frac{i}{c} (h-c)$

(b) deduction.

on a $h - (1+i) = \frac{i}{c} (h-c)$

$$\Rightarrow \frac{h - (1+i)}{h-c} = i \times \frac{1}{c} \in i\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{z_H - z_B}{z_H - z_C} \in i\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow (BH) \perp (CH).$$

c/c $(BH) \perp (CH)$