

Exercice 1 : (8 points)

Partie I- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 1[$ par :

$$f(x) = \ln(1 - x)$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0.25 1) a) Montrer que la fonction f est continue sur I
0.25 b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I
0.75 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
0.5 d) Interpréter graphiquement les résultats obtenus
0.25 e) Donner le tableau de variations de f

- 0.25 2) a) Montrer que la courbe (C) est concave.
0.25 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans la repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0.25 3) a) Montrer que f est une bijection de I vers \mathbb{R}

On note f^{-1} sa bijection réciproque.

- 0.25 b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
0.25 c) Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

Partie II- Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

- 0.5 1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0; 1[$ tel que :
$$P_n(x_n) = 1$$

- 0.5 2) Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$
0.5 3) a) Montrer que : pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$
0.5 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.
0.25 c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $x_n \in]0; \alpha[$
0.25 d) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

- 4) Pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$f_n(x) = f(x) + P_n(x)$$

- 0.5 a) Montrer que : $(\forall x \in I) ; (\forall n \geq 2) f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}$

4	RS24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع بالفرنسية مادة الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (ا) و (ب)
---	-------	--

0.25	b) Montrer que : $(\forall x \in [0; \alpha]) ; (\forall n \geq 2) f'_n(x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$
0.5	c) En déduire que : $(\forall x \in [0; \alpha]) ; (\forall n \geq 2) f_n(x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$
0.5	d) Montrer que : $(\forall n \geq 2) f_n(x) + 1 \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$
0.5	e) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Exercice 2 : (4 points)	
0.5	On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}} dt$
1	1) a) Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x b) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée première $F'(x)$
0.5	2) a) En utilisant la méthode d'intégration par partie montrer que :
0.5	$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (1-x) e^{x-\frac{x^2}{2}} dx$
0.5	b) Calculer $\int_0^1 F(x) dx$
0.5	3) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :
0.5	$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((n-k) \int_k^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}} dx \right)$
0.5	a) Vérifier que :
0.5	$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right)$
0.5	b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right)$
0.5	c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

4	RS24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع بالفرنسية مادة الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (ل) و (ب)
---	-------	--

Exercice 3 : (4 points)

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-i$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (m - i)z - im = 0$$

- 0.5 1) a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m + i)^2$
- 0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)
- 0.75 c) Sachant que $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$; écrire le nombre $z_1 + z_2$ sous forme exponentielle.
- 2) On considère les points A , B et M d'affixes respectifs 2 , $-i$ et m et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire.
- 0.5 a) Déterminer en fonction de m l'affixe de M'
- 0.75 b) Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatère $ANM'B$ soit un parallélogramme.
- 1 c) Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si $Re((2 - i)m) = Re(m^2)$

Exercice 4 : (4 points)

Soit a un entier naturel supérieur ou égale à 2

et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

- 1 1) a) Montrer que $a^7 \equiv 1[p]$, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} ; a^{7n} \equiv 1[p]$
- 1 b) Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N} ; a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$$
- 0.5 2) On suppose que 7 ne divise pas $p - 1$
- 0.5 a) Montrer que : $a \equiv 1[p]$
- 0.5 b) En déduire que : $p = 7$
- 1 3) Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A
 Alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$

4	RS24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع بالفرنسية مادة الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (ا) و (ب)
---	-------	--