

الصفحة 1	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا المسالك الدولية الدورة العادية 2021 - الموضوع -		الجمهورية المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات
4			
**	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS		NS 22F
3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	fonctions numériques	2 points
Exercice 2	suites numériques	4 points
Exercice 3	Nombres complexes	5 points
Problème	Étude de fonctions numériques et calcul intégral	9 points

- ✓ On désigne par \bar{z} le conjugué du nombre complexe z
- ✓ \ln désigne la fonction logarithme népérien



Exercice 1 : (2 points)

- 0.5 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
 0.5 b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$
 0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$
 0.5 2) Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1, 0]$

Exercice 2 : (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout n de \mathbb{N}

- 0.25 1) Calculer u_1
 0.5 2) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$
 0.5 3) a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$
 0.5 b) En déduire la monotonie de la suite (u_n)
 0.75 4) a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)
 0.5 b) On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de \mathbb{N} , calculer $\lim v_n$
 0.5 5) a) Vérifier que pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$
 0.5 b) En déduire u_n en fonction de n pour tout n de \mathbb{N}

Exercice 2 : (5 points)

- 0.75 1) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
 2) Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 0.25 a) Ecrire a sous forme algébrique .
 0.5 b) Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$
 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et \bar{a} .
 0.5 3) Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4) Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0.5 a) Ecrire z' en fonction de z et a .

0.25 b) Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R , montrer que $d = a + 1$

0.5 c) Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est un losange.

0.75 5a) Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$

0.5 b) Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

0.5 c) Déduire une mesure de l'angle $(\widehat{BI, BD})$

Problème : (9 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \ln x - 2x$ si $x > 0$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1cm)

0.5 1) Montrer que f est continue à droite au point 0.

0.5 2)a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.5 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.75 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0.5 b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

0.5 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$

0.5 4) a) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$

1 b) Construire la courbe (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (on prend $e^{\frac{3}{2}} = 4.5$)

0.5 5) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1+e^2}{4}$

0.5 b) En déduire : $\int_1^e f(x) dx$

0.25 6)a) Déterminer le minimum de f sur $]0, +\infty[$

0.5 b) En déduire que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$

- 7) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$
- 0.5 a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
- 0.75 b) Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative de la fonction g^{-1}
- 8) on considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ; x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln x - 2x & ; x > 0 \end{cases}$$
- 0.5 a) Etudier la continuité de h au point 0
- 0.5 b) Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
- 0.25 c) La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.