Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Informatique

A U : 2019-2020
Durée : 3H

**Concours d'accès au premier semestre du MASTER
Mathématiques et Applications (MA)**

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) n'est pas autorisé.

Rappels et notations

- On note H l'espace des suites $x = (a_j)_{j\geq 0}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} |a_j|^2$ converge.
- Pour $(x, y) \in H^2$ avec $x = (a_j)_{j\geq 0}$ et $y = (b_j)_{j\geq 0}$ on note

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{+\infty} \bar{a}_j b_j \quad \text{et} \quad \|x\| = (\sum_{j=0}^{+\infty} |a_j|^2)^{1/2}.$$

- Dans toute la suite, l'espace H sera muni de la topologie définie par la norme $\|\cdot\|$.
- On note $L(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H vers H.

Une application linéaire continue sera souvent appelée opérateur.

- Si $T, S \in L(H)$, on note ST la composée $S \circ T$ de T et S. On note $I \in L(H)$ l'opérateur identité.
- Pour tout $T \in L(H)$, on admet l'existence d'un opérateur, noté T^* et appelé adjoint de T, vérifiant la formule :

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \ \forall x, y \in H.$$

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est dit valeur propre de T s'il existe $x \in H - \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé vecteur propre de T.
- Pour tout $T \in L(H)$, on pose

$$\|T\|_L = \sup\{\|Tx\|; \|x\| \leq 1\}.$$

- On rappelle enfin le Théorème de Liouville : Si f est une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante sur $\mathbb{C}$.

Problème

Partie I.

1. Montrer que l'espace H muni de la norme $\|\cdot\|$ est un espace de Banach.
2. Montrer que l'espace $L(H)$ muni de la norme $\|\cdot\|_L$ est un espace de Banach.
3. Montrer que pour tout $T \in L(H)$, l'adjoint T^* de T est continu et vérifie $\|T^*\|_L = \|T\|_L$.

Partie II.

1. Soit $D_1 \in L(H)$ défini de la façon suivante : si $x = (a_j)_{j\geq 0} \in H$, on a :

$$D_1 x = y = (b_j)_{j\geq 0}, \quad \text{avec pour tout } \ j \geq 0,\ b_j = a_{j+1}.$$

   (a) Déterminer les deux sous-espaces vectoriels de H : $Ker(D_1)$ et $Im(D_1)$.

   (b) Montrer que $\|D_1\|_L = 1$.

2. Déterminer l'adjoint D_1^* de D_1, puis montrer que $D_1 D_1^* = I$.

3. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, soit $x_\lambda = (\lambda^j)_{j\geq 0} \in H$. Montrer que $D_1 x_\lambda = \lambda x_\lambda$.

   (b) Déterminer le spectre $\sigma(D_1)$ de l'opérateur D_1.

4. Soit $F = vect(\{x_\lambda; |\lambda| < 1\})$.

   (a) Montrer que si $g \in H$ satisfait $\langle g, x_\lambda \rangle = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, alors $g = 0$.

   (b) En déduire que F est dense dans H.

5. On pose $P = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} Ker(D_1^k)$.

   (a) Montrer que P est un sous-espace vectoriel dense de H.

   (b) Montrer que P contient une partie Q dénombrable et dense dans H.

Partie III.

1. Montrer que pour tout couple $(S, T) \in L(H)^2$, on a

$$\|ST\|_L \leq \|S\|_L \|T\|_L$$

2. (a) Soit $N \in L(H)$ tel que $\|N\|_L < 1$.
   Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-N)^n$ est convergente. En déduire que l'opérateur $(I+N)$ est inversible.

   (b) Soit $T \in L(H)$ un opérateur inversible.
   Montrer que si $\|N\|_L \|T^{-1}\|_L < 1$, l'opérateur $(T + N)$ est inversible.

   (c) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}^+$ tel que si $\|N\|_L \leq \dfrac{1}{2\|T^{-1}\|_L}$, on a

$$\|(T+N)^{-1} - T^{-1} + T^{-1} N T^{-1}\|_L \leq m \|N\|_L^2.$$

3. Pour tout $T \in L(H)$, on définit un sous-ensemble $\sigma(T)$ de $\mathbb{C}$ par

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ (T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

   L'ensemble $\sigma(T)$ est appelé le spectre de T. On a pose $\rho(T) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

   (a) Montrer que $\sigma(T)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{C}$, qui contient l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur T.

   (b) Montrer que $\rho(T) \leq \|T\|_L$.

   (c) Caractériser $\sigma(T^*)$ en fonction de $\sigma(T)$. En déduire que $\rho(T) = \rho(T^*)$.

4. Soit $(x, y) \in H^2$. On définit $f_{x,y} : \mathbb{C}\backslash\sigma(T) \to \mathbb{C}$ par $f_{x,y}(z) = \langle y, (zI - T)^{-1} x \rangle$.

   (a) Montrer que $f_{x,y}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{|z|\to\infty} z f_{x,y}(z) = \langle y, x \rangle$.

   (c) En déduire que $\sigma(T) \neq \emptyset$.