MASTER D'ANALYSE NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (MANEDP)

CONCOURS D'ENTRÉE 2019-2020

Durée: 2 heures 30 minutes.

L'usage de documents écrits, de calculatrices, tablettes ou de téléphones portables n'est pas autorisé.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on désigne par E l'ensemble de toutes le fonctions $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que u est de classe C^1 sur $]a, b[$ et $u(a) = u(b) = 0$. Pour tout $u \in E$, on pose :

$$|u|_0 = \sqrt{\int_a^b u^2(x)dx} \ , \quad |u|_1 = \sqrt{\int_a^b u'^2(x)dx} \quad \text{et} \quad ||u|| = \sqrt{|u|_0^2 + |u|_1^2}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $||.||$ est une norme sur E.
3. Montrer que $||.||$ est associée à un produit scalaire.
4. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\int_a^b u^2(x)dx \leq c\int_a^b u'^2(x)dx, \quad \forall u \in E \tag{1}$$
5. Montrer que $|.|_1$ est une norme sur E équivalente à la norme $||.||$.
6. Dans toute la suite l'espace E est muni de la norme $||.||$. Montrer que les applications
$$\begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto |u|_0^2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto |u|_1^2 \end{cases}$$
sont différentiables.
7. En déduire que l'application $\begin{cases} f: \ E \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ \quad u \mapsto f(u) = \dfrac{|u|_1^2}{|u|_0^2} \end{cases}$ est différentiable
et qu'en tout $u \in E \setminus \{0\}$,
$$f'(u)v = \frac{2}{|u|_0^2}\left(\int_a^b u'(x)v'(x)dx - \frac{|u|_1^2}{|u|_0^2}\int_a^b u(x)v(x)dx\right), \quad \forall v \in E$$
8. Soit $u \in E \setminus \{0\}$ telle que $u \in C^2(]a, b[, \mathbb{R})$. Montrer que
$$f'(u) = 0 \iff -u'' = \frac{|u|_1^2}{|u|_0^2}u$$
9. On considère l'équation différentielle
$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases} \tag{2}$$
Déterminer l'ensemble σ des réels λ pour lesquels le problème (2) admet des solutions.
10. Pour chaque $\lambda \in \sigma$ déterminer les solutions du problème (2),
11. Déduire de ce qui précède la plus petite constante c vérifiant l'inégalité (1).

FIN DE L'ÉPREUVE