Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences. Agadir
Département de Mathématiques
Epreuve 2 : 10h30-12h15

Concours d'entrée en master de mathématiques appliquées et sciences de l'ingénieur

Année Universitaire 2019-2020

Mathématiques 2

Une et une seule bonne réponse par exercice.
LES MAUVAISES RÉPONSES SONT NOTÉES NÉGATIVEMENT.

Topologie. Analyse fonctionnelle

1 Dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, il existe toujours une partie de X qui est ouverte et fermée.

A oui.
B non.
C seulement si X est compact.
D seulement si X est connexe.

2 Dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, une intersection quelconque de parties ouvertes est toujours une partie ouverte.

A oui.
B non.
C seulement si X est compact.
D seulement si X est connexe.

3 Soient a, b des réels tels que $a < b$. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance définie par la valeur absolue, un intervalle de la forme $]a, b]$ est une partie

A fermée.
B ouverte.
C ouverte et fermée.
D ni ouverte ni fermée.

4 Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X, $x \in A$ et $r > 0$ tels que la boule fermée $B(x, r]$ soit contenue dans A. On désigne par $\mathring{A}$ l'intérieur de A. On a alors

A la boule fermée $B(x, r]$ est incluse dans $\mathring{A}$

B $B(x, r]$ n'est pas incluse dans $\mathring{A}$ mais la boule ouverte $B(x, r[$ est contenue dans $\mathring{A}$

C $B(x, r]$ n'est pas incluse dans $\mathring{A}$ car la boule ouverte $B(x, r[$ n'est pas contenue dans $\mathring{A}$

D aucune des 3 réponses ci-dessus

5 Soit U une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E; \|\cdot\|)$. On munit U de la topologie induite par celle de E. Alors

A Si U est une partie fermée alors U est un espace topologique complet.

B Si U est complet alors U est un fermé de E.

C Si E est complet et si U est fermé alors U est complet.

D Si U est un fermé et borné alors U est un compact de E.

6 Soient X et Y deux espaces espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X vers Y. Alors

A $\mathcal{L}(X, Y)$ est complet si X est complet.

B $\mathcal{L}(X, Y)$ est complet si Y est complet.

C $\mathcal{L}(X, Y)$ est complet si et seulement si X et Y sont tous deux complets.

D $\mathcal{L}(X, Y)$ est complet si et seulement si X est de dimension finie.

Optimisation. Calcul différentiel.

7 La solution de : $y'(t) + y(t) = t + e^{-t}$ est

A $y(t) = A(t+1)e^{-t} + t - 1$.

B $y(t) = (A+1)e^{-t} + t - 1$

C $y(t) = -1 + t + Ae^{-t}$

D $y(t) = t + Ae^{-t}$

8 **Le champ de vecteurs $\vec{v} = (3x^2, 2yz, 2xz)^t$ est**

A le gradient du champ scalaire $\varphi(x,y,z) = x^3 + y^2z + xz^2$

B le rotationnel du champ de vecteurs $\vec{u} = (x^3, y^2z, xz^2)^t$

C la divergence du champ de vecteurs $\vec{u} = (x^3, y^2z, xz^2)^t$

D aucune des 3 réponses ci-dessus

9 **La formule de Taylor-Lagrange généralise la**

A la notion de différentielle d'une fonction en un point

B le théorème des accroissements finis

C le théorème fondamental du calcul intégral

D aucune des 3 réponses ci-dessus

10 **L'intégrale curviligne du champ de vecteurs $\vec{v} = (y^2, 2xy)^t$ le long d'une courbe joignant le point $A(3;1)$ au point $B(1;3)$**

A ne peut être calculée sans connaitre la courbe joignant A à B

B peut être calculée et est égale à 6

C peut être calculée par la formule de Green-Riemann

D aucune des 3 réponses ci-dessus

11 **La fonction $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ est**

A un C^1–difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$

B un C^1–difféomorphisme global de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sur son image

C un C^1–difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

D un C^1–difféomorphisme global de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$sur son image

12 **Pour quelles valeurs de $p \in \mathbb{R}$ la fonction définie de $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles par$f(x) = x^p$est une fonction convexe ?**

A $0 \le p \le 1$.

B $p \le 0$ ou $p \ge 1/2$.

C $p = 0$ ou $p \ge 1$

D $p = 1/2$ ou $p \le 0$

13 **Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs rélles par$f(x) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$. Les points critiques de f sont :**

A $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(1;1)$.

B $(1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(2/3;2/3)$.

C $(1;1)$, $(1/3;1/3)$, $(0;1)$, $(1;0)$.

D $(2/3;2/3)$, $(1/3;1/3)$, $(0;1)$, $(1;0)$.

14 **Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Un point $\bar{x} \in C$ est une projection de $x \in \mathbb{R}^n$ sur C si et seulement si :**

A $\forall y \in C \quad \langle \bar{x} - y, x - y \rangle \le 0$.

B $\forall y \in C \quad \langle \bar{x} - x, \bar{x} - y \rangle \ge 0$.

C $\forall y \in C \quad \langle y - \bar{x}, y - x \rangle \ge 0$.

D $\forall y \in C \quad \langle \bar{x} - x, x - y \le 0$.

15 **Soit $V = \mathbb{R}^n$, A une matrice symétrique définie positivede dimension n, $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $F(x,y) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. F est coercive car F réalise l'inégalité :**

A $F(x) \ge \alpha||x||_2^2 + ||b||_2||x||_2$

B $F(x) \ge ||x||_2^2 - \alpha||b||_2||x||_2$

C $F(x) \ge \frac{\alpha}{2}||x||_2^2 - ||b||_2||x||_2$

D $F(x) \ge \frac{\alpha}{2}||x||_2 + ||b||_2||x||_2^2$

Soit $F(x,y) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = (0\ ,\ 2)^t$. Considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} minF(x) = F(\bar{x}) \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

16 **I)La solution $\bar{x}$ du problème $\mathcal{P}$ est :**

A $\bar{x} = (1,2)$.

B $\bar{x} = (-2,1)$.

C $\bar{x} = (-2,2)$.

D $\bar{x} = (2,1)$.

17 **II) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On cherche à approcher $\bar{x}$ par la méthode de gradient à pas optimal, alors à l'aide de la suite récurrente $(x_k)_k$, pour $k \ge 0$, on pose $x_{k+1} := x_k + t_k d_k$, où :**

A $d_k := -\nabla F(x_k)$ et t_k est l'unique réel minimisant $t \mapsto F(x_k + td_k)$ sur $\mathbb{R}$.

B $d_k := -\nabla F(x_k)$.

C t_k est l'unique réel minimisant $t \mapsto F(x_k + td_k)$ sur $\mathbb{R}$.

D $d_k := -\nabla F(x_k)$ et $t_k = t$ (constante).

18 **Soient a_1, a_2 et c dans $\mathbb{R}$ avec $(a_1, a_2) \neq (0,0)$. On considère le problème :**

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{(x_1,x_2)\in\Omega} f(x_1, x_2)$$

où $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et $\Omega = \{(x_1,x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 - c \leq 0\}$. L'expression du Lagrangien associé au problème $(\mathcal{P})$ est :

A $L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 - \lambda c.$

B $L(x,\lambda) = 2x_1 + 2x_2 + \lambda a_1 + \lambda a_2.$

C $L(x,\lambda) = \lambda a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_1^2 + \lambda x_2^2 - c.$

D $L(x,\lambda) = 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + a_1 + a_2.$

Probabilités

19 **Soit $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ un espace probabilisé, m et σ deux réels supérieurs à 2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ avec $E(X^2) = m^2 + \sigma^2$. Alors la variable $T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit**

A la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

B la loi de Poisson de paramètre m.

C la loi normale $\mathcal{N}(0;\sigma)$.

D la loi normale $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$.

20 **Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F}; P)$. Soit Φ_X et Φ_Y leurs fonctions caractéristiques respectives. Si pour tout t dans $\mathbb{R}$ on a $\phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$ alors**

A X et Y sont indépendantes.

B X et Y sont dépendantes.

C X et Y sont corrélées.

D On ne peut pas conclure en général.

21 **On considère la variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par : $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$, où $k \in \mathbb{R}$. Alors**

A $k = \frac{8}{\pi^2}$.

B $k = 4\pi$.

C L'espérance de X n'est pas définie.

D La variable X n'admet pas d'espérance mais a une variance.

22 **Soient A, B et C trois événements vérifiant**

$\mathbb{P}(A) = 0.4$ $\quad \mathbb{P}(B) = 0.5$ $\quad \mathbb{P}(C) = 0.7$

$\mathbb{P}(A\cap B) = 0.2$ $\quad \mathbb{P}(A\cap C) = 0.2$ $\quad \mathbb{P}(B\cap C) = 0.3$

Alors

A $\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) = 0.3$

B $\mathbb{P}((A\cap B) \cup (A\cap C) \cup (B \cap C)) = 0.4$

C $\mathbb{P}((A\cap B)|A) = 0.5$

D $\mathbb{P}((A\cup B)|A) = 0.6$

23 **Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi Géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Alors**

A $\mathbb{P}(X \geq 1) = (1-p)^n$

B $\mathbb{P}(X \geq Y) = \dfrac{1}{1-p}$

C $U = \min(X;Y)$ suit une loi Géométrique de paramètre $p(2-p)$

D $V = \max(X;Y)$ suit une loi Géométrique de paramètre $p(2-p)$

24 **Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $(X;Y)$ prenne les valeurs $(-1;0)$, $(0;-1)$, $(1;0)$ et $(0;1)$ avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$. Alors**

A $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}ar(X) = 1$

B Y est une variable de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$

C $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

D les variables X et Y sont indépendantes

25 **Soit X une variable aléatoire de densité**

$$f_X(x) = \lambda x(x-1)\mathbb{I}_{[0;1]}(x).$$

Alors

A $\lambda = 6$

B $\mathbb{P}(X > \frac{1}{4}) = \frac{11}{32}$

C $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}) = \frac{27}{32}$

D $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2} | X > \frac{1}{4}) = \frac{11}{27}$