**Concours d'admission en master
 d'Analyse Mathématique Avancée
 Durée 2 h 30 mn**

Exercice 1. Soient f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ et θ un réel tels que

$$f(\theta) = 0 \text{ et } f'(\theta) \neq 0.$$

- 1- Montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que $|x - \theta| < \delta_0 \implies |f'(x)| > \frac{|f'(\theta)|}{2}$.
 2- Montrer qu'il existe $0 < \delta_1 < \delta_0$ tel que pour $x, y \in [\theta - \delta_1, \theta + \delta_1]$ on a,

$$|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{|f'(\theta)|}{2}.$$

Considérons la suite récurrente :

$$x_0, x_1 \text{ proches de } \theta, \text{ et } x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

- 3- Montrer que $\forall x \neq y \in [\theta - \delta_1, \theta + \delta_1]$, on a $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > \frac{f'(\theta)}{2}$.
 4- Montrer que si $x_0, x_1 \in [\theta - \delta_1, \theta + \delta_1]$, alors, $\forall n$ on a $|x_n - \theta| \leq \delta_1$.
 5- Montrer qu'il existe $0 < \delta_2 < \delta_1$ tel que, si $x_0, x_1 \in [\theta - \delta_2, \theta + \delta_2]$ on a,

$$|x_{n+1} - \theta| \leq \frac{1}{2} |x_n - \theta|.$$

6- En déduire que $(x_n)_n$ converge vers θ .

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et Δ l'opérateur défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad (\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

On pose $\Delta^0 = id$ et $\forall k \geq 1, \Delta^k = \Delta^{k-1} \circ \Delta$. On définit la famille de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1) \dots (X-n+1).$$

- 1) i) Montrer que la famille (P_n) est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
 ii) Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $P_n(k)$ et $P_n(-k)$ sont des entiers.
 2) Étude de l'endomorphisme $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.
 a) Vérifier que Δ est un endomorphisme.
 b) Calculer ΔP_0 , puis ΔP_{n+1} en fonction de $P_n, \forall n \geq 1$.
 c) Pour un polynôme P de degré d calculer $\deg(\Delta P)$, et donner $\Delta^{d+1} P$.
 d) Donner le noyau de Δ , puis étudier s'il est injectif et s'il est surjectif.
 3) j) Calculer $\Delta^k P_n$ en déduire que $\Delta^k P_n(0) = \delta_{n,k}$ où $\delta_{n,k} = 1$ si $k = n, \delta_{n,k} = 0$ si $n \neq k$.
 jj) En déduire que $P(X) = \sum_{n \geq 0} \Delta^n P(0) P_n(X)$.

Exercice 3. ¹ Pour toute fonction $f \in L^2(0,1)$ on définit une fonction sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad Tf(x) := \int_0^x f(t) dt$$

- 1) Montrer que pour tous x et y éléments de $[0,1]$, on a : $|Tf(y) - Tf(x)| \leq \sqrt{|y-x|} \|f\|_2$
 2) En déduire que Tf est une fonction continue sur $[0,1]$.
 3) Montrer que $T : (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un opérateur linéaire continu.
 4) Calculer la norme, $\|T\| := \sup\{\|Tf\|_\infty, \forall \|f\|_2 = 1\}$.

1. Notes : - $L^2(0,1)$ est l'espace des fonctions carrées intégrables ie. : $\|f\|_2 := (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{1/2} < +\infty$.
 - $C([0,1])$ est l'espace de fonctions continues muni par la norme $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$.