Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences-Kénitra

Modélisation Stochastique et Statistique

Master MSS

1 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = |z|$. Déterminer à l'aide des équations de Cauchy-Riemann le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe.

2 Trouver trois nombres réels positifs dont le produit vaut 1728 et dont la somme est minimale. Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

3 On considère $X_p^1, \dots, X_p^n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to [0,1]$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Soit $S_p^n = X_p^1 + \dots + X_p^n$. Calculer $\mathbb{E}(\frac{S_p^n}{n})$ et $Var(\frac{S_p^n}{n})$.

4 Pour quelles valeurs de α réel la fonction $t \in]0, +\infty[\to t^\alpha e^{-\sqrt{t}}$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $]0, +\infty[$?

5 Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : $-2, -1, 0, 1, 2$.

6 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui satisfont $f(0) = 2$ et telles que la forme différentielle $\omega(x, y) = (y^2+1)\sin(x)dx - f(x)ydy$ soit exacte. Pour la forme différentielle ainsi trouvée, calculer toutes ses primitives.

7 Décrire la topologie produit $\Pi_{\alpha\in I}\tau_\alpha$ sur l'espace produit $E = \Pi_{\alpha\in I}E_\alpha$, où (E_α, τ_α) un espace de Hausdorff (séparé) et I un ensemble d'indices. Montrer que $(E, \Pi_{\alpha\in I}\tau_\alpha)$ est de Hausdorff.

8 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(X, \mu)$ convergeante presque partout vers f et telle que $\exists g \in L^p(X, \mu) : \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$. Montrer qu'alors la suite converge vers f dans l'espace $L^p(X, \mu)$.

9 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Déterminer pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ elle a lieu.

a La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

b La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers 0.

c La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.