Master de Théorie des Nombres

Faculté des sciences

Université Mohammed Premier

– Oujda-

Année universitaire 2019-2020

Epreuve du Concours d'entrée au Master de Théorie des Nombres

Exercice 1 (4(2 + 2))

1. Enoncez le principe de récurrence simple et le principe de récurrence forte. Démontrez le principe de récurrence simple.
2. Soit G un groupe fini. On suppose que tout élément de G est d'ordre un diviseur de 2 ; montrez par récurrence que l'ordre de G est une puissance de 2.

Exercice 2 (4(2 + 2))

Soient P(X) un polynôme irréductible dans Q[X] et à coefficients dans Z et β une racine de P(X). On pose E = Q[β] l'espace vectoriel sur Q engendré par toutes les puissances de β.

1. Donnez une base de E/Q et en déduire la dimension de E/Q.
2. E est il un corps ? justifiez votre réponse.

Exercice 3 (2 + 4(1 + 2 + 1))

1. Enoncer les quatre théorèmes d'isomorphismes.
2. Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. Montrer que si T_1 et T_2 sont deux sous-groupes de G/N tels que T_2 est un sous-groupe distingué de ~~si~~ T_1 et si si T_1/T_2 est cyclique, alors G possède deux sous-groupes N_1 et N_2 contenant N et tels que N_2 est distingué dans N_1 et N_1/N_2 est cyclique.

Exercice 4 (3(2 + 1) + 3(2 + 1))

Soit G un groupe d'ordre p^2 q ou p et q sont des nombres premiers.

1. On suppose que p^2 < q . Vérifiez que G contient un sous-groupe distingué d'ordre q. En déduire que G est résoluble. Justifiez votre réponse.
2. Montrer que si G possède un seul p-sous-groupe de Sylow alors G est résoluble en particulier si q<p alors G est résoluble. Justifiez votre réponse.