Université Ibn Zohr
Faculté des Sciences. Agadir
Département de Mathématiques
Epreuve1 : 8h30-10h15

Concours d'entrée en master
de mathématiques appliquées
et sciences de l'ingénieur

Année Universitaire 2019-2020

Mathématiques 1

Une et une seule bonne réponse par exercice.
LES MAUVAISES RÉPONSES SONT NOTÉES NÉGATIVEMENT.

Mathématiques générales

1 **Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies n et p respectivement. On désigne par $L(E;F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et par $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Alors :**

- A $L(E \times F)$ est de dimension $(n+p)^2$.
- B $L(E \times F)$ est isomorphe à $L(E) \times L(F)$.
- C $L(E \times F)$ est de dimension $n+p$.
- D $L(E;F)$ est isomorphe à $L(E) \times L(F)$.

2 **Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont :**

- A $\lambda = 1$ de multiplicité 1 et $\lambda = 2$ de multiplicité 2.
- B $\lambda = 1$ de multiplicité 1 et $\lambda = 2$ de multiplicité 1.
- C $\lambda = 1$ de multiplicité 2 et $\lambda = 2$ de multiplicité 1.
- D $\lambda = 1$ de multiplicité 2 et $\lambda = -2$ de multiplicité 1.

3 **On considère l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :**

$$f(x,y,z) = (2x+y+8z, 3x-y).$$

La matrice de f dans la base canonique est

- A $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- B $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.
- C $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- D $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4 **Le rang de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est égal à :**

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4

5 **Soit $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2} \;/\; a = b = d \right\}$. Alors, $\dim(V)$ est égal à :**

- A 4
- B 3
- C 2
- D $\dim(V)$ n'a pas de sens.

6 **Cocher la bonne réponse :**

- A Une suite positive qui converge vers 0, est décroissante à partir d'un certain rang.
- B Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.
- C Si la suite x_n converge vers ℓ, la suite x_{n^2} converge vers ℓ
- D Si $\lim_{n\to 0} x_n = 1$, alors $\lim_{n\to 0} (x_n)^n = 1$

7 **Trouver les équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage de 0 : $f(x) = a^x - b^x$, $g(x) = ln(sin(x))$ et $h(x) = ln(cos(x))$**

- A $f(x) \sim x\ln\frac{a}{b}$, $g(x) \sim -\ln(x)$ et $h(x) \sim \frac{x^2}{2}$.
- B $f(x) \sim x\ln\frac{a}{b}$, $g(x) \sim \ln(x)$ et $h(x) \sim -\frac{x^2}{2}$.
- C $f(x) \sim -x\ln\frac{a}{b}$, $g(x) \sim -\ln(x)$ et $h(x) \sim \frac{x^2}{2}$.
- D $f(x) \sim -x\ln\frac{a}{b}$, $g(x) \sim -\ln(x)$ et $h(x) \sim -\frac{x^2}{2}$.

8 **On considère la série suivante : $u_n = \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)})$. Alors**

- A $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = \ln\frac{2}{3}$.
- B $\sum u_n$ diverge et $\sum u_n = \infty$.
- C $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = 0$.
- D $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = \ln(3)$.

9 **On considère la série de fonction suivante $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{xe^{-nx}}{n+x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Alors**

A $f(x)$ converge uniformément.

B $f(x)$ n'est pas bornée.

C $f(x)$ n'est pas convergente.

D $f(x)$ est bornée, mais elle n'est pas convergente.

10 **Soit $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$, alors**

A I n'est pas convergent.

B I converge et $I = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln(2)}{3}$.

C I converge et $I = \frac{\pi}{4}$.

D I converge et $I = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$

Informatique

11 **Quelle est la valeur binaire qui correspond à la valeur hexadécimale 8E ?**

A 1100 1011

B 0111 1101

C 1001 1001

D 1000 1110

12 **Laquelle des boucles suivantes exécute la ligne ..... exactement 10 fois ?**

A
```
for (i = 0; i <= 10; i++){
.....
}
```

B
```
i = 0;
do {
i++;
.....
} while (i < 10);
```

C
```
while (i<10)
i=0;
.....
i++;
}
```

D
```
for (i=0; i<10; i++) {
.....
i++;
}
```

13 **A quoi sert la fonction free en C ?**

A à mettre un bloc mémoire à zéro,

B à vérifier si l'adresse mémoire passée en argument est utilisée par le programme,

C à dire au système d'exploitation qu'un bloc mémoire ne sera plus utilisé (et peut donc être attribué à un autre programme),

D à rien.

14 **A quelle ligne du code suivant y a-t-il une erreur de syntaxe qui l'empêche de compiler ?**

```
1. int g(int a,int b){
2. int i,j=0;
3. for (i=0, i<a, i++){
4. j+=b;
5. }
6. Return(j);
7. }
```

A Ligne 1

B Ligne 2

C Ligne 3

D Ligne 6

15 **Que retourne la fonction malloc quand elle n'arrive pas à allouer un bloc de la taille demandée (par exemple quand la mémoire est pleine) ?**

A void

B -1

C NULL

D on ne peut pas savoir

Analyse Numérique

I)Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et définie positive admettant une décomposition $A = M - N$ avec $M = \frac{1}{\omega}I$, où $\omega > 0$ et I la matrice identité dans $\mathbb{R}^n$. Les valeurs propres de A sont classées par ordre décroissant

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$$

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ où b un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on considère la méthode itérative :

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad Mx_{k+1} = Nx_k + b$$

16 **(a) on a :**

A la plus grande valeur propre de A est négative

B la plus petite valeur propre de A est négative

C aucune valeur propre de A n'est strictement positive

D le rayon spectral de A est une valeur propre de A

17 **(b) La méthode converge si et seulement si :**

A $0 \leq \omega \leq \frac{2}{\lambda_1}$.

B $0 \leq \omega \leq \frac{2}{\lambda_n}$.

C $1 \leq \omega \leq \frac{2}{\lambda_1}$.

D $1 \leq \omega \leq \frac{2}{\lambda_n}$..

18 **(c) Le rayon spéctral de la matrice $B = M^{-1}N$ est donné par :**

A $\rho(B) = max\{| 2 - \omega\lambda_1 |, | 2 - \omega\lambda_n |\}$

B $\rho(B) = max\{| 1 - \omega\lambda_1 |, | 1 - \omega\lambda_n |\}$

C $\rho(B) = max\{| 1 - \omega/\lambda_1 |, | 1 - \omega/\lambda_n |\}$

D $\rho(B) = max\{| 2 - \omega/\lambda_1 |, | 2 - \omega/\lambda_n |\}$

II)Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2$$

19 **(a) l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0, 1]$**

A une seule solution.

B deux solutions.

C trois solutions.

D aucune solution.

20 **(b) On considère l'itération $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{\sqrt{e^{x_n^2}}}{2}$. Alors laquelle des assertions suivantes est vraie :**

A g est décroissante sur $[0, 1]$

B g est contractante sur $[0, 1]$

C g n'est pas contractante sur $[0, 1]$

D g n'est pas une itération de point fixe pour l'équation $f(x) = 0$

21 **Partant du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelle approximation d'un vecteur propre unitaire associé au rayon spectral de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ fournit la méthode de la puissance au bout de 3 itérations ?**

A $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

B $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

C $\begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$.

D $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -3\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

22 **Relativement à la norme $\|\|_2$**
quel est le conditionnement de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$?

A 2

B $\sqrt{2}$

C $2\sqrt{2}$

D 1

23 **Quelle est la norme $\|\|_3$ du vecteur (1,2,3,3,1) ?**

A 4.

B $2\sqrt{6}$.

C 3.

D $\sqrt[3]{24}$.

24 **Quelle est la norme subordonnée à $\|\|_\infty$ de la** ✓
matrice
$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

A $3\sqrt{2}$.

B 6.

C 4.

D $\sqrt{26}$.

25 **On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors :** ✓

A A admet une valeur propre réelle

B $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ est une valeur propre de A

C $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ est une valeur propre de A

D $\begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A