جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAIL

كلية العلوم والتقنيات
FST Errachidia

COURS

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET FORMES QUADRATIQUES

(Algèbre 2)

Rédigé par : Pr. Mouhssine El-Arabi

Filière : Tronc commun MIP(section 1)
Année Universitaire : 2022-2023

Table des matières

Chapitre 1

Matrice d'une application linéaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Matrice d'une application linéaire

Dans cette section nous allons voir qu'à toute application linéaire, on peut associer une matrice.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. En vue de l'étude des matrices, il est préférable de noter p la dimension de E et n celle de F. Soient $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base de E et $B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ une base de F. Les vecteurs $f(e_1)$; $f(e_2)$;... ;$f(e_p)$ sont des vecteurs dans F. Alors $f(e_1)$; $f(e_2)$;... ;$f(e_p)$ s'écrivent comme combinaisons linéaire des vecteurs de la base B'.
Posons donc

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e_1' + a_{21}e_2' + \cdots + a_{n1}e_n' = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i1}e_i' \\ f(e_2) = a_{12}e_1' + a_{22}e_2' + \cdots + a_{n2}e_n' = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i2}e_i' \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\ f(e_p) = a_{1p}e_1' + a_{2p}e_2' + \cdots + a_{np}e_n' = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ip}e_i' \end{cases} \tag{1.1}$$

avec les a_{ij} dans $\mathbb{K}$. C'est -à-dire, $f(e_j) = a_{1j}e_1' + a_{2j}e_2' + \cdots + a_{nj}e_n' = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}e_i'$ pour tout $j = 1, 2, \cdots, p$.

Définition 1.1.1. Avec les hypothèses ci-dessus, on appelle matrice de l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ dans les bases $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ et $B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$, la matrice $M_{B'B}(f)$ de type (n, p) dont la j^{me} colonne est constituée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base B' :

$$M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Remarques 1.1.2. 1) Attention! Dans la matrice $M_{B'B}(f)$, la base B est la base de l 'espace de départ E, et B' est la base de l'espace d'arrivée F. De plus, cette matrice $M_{B'B}(f)$ se remplit et se lit par colonnes.
2) La j^{me} colonne de la matrice est formée par des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base B'.
3) Cette matrice a n lignes et p colonnes : $M_{B'B}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
4) Si $E = F$ et $B = B'$, on note $M_{B'B}(f) = M_B(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 1.1.1. 1) Soit θ l'application nulle de E dans F et $\theta_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ la matrice nulle, alors $M_{B'B}(f) = \theta_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$.
2) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\pi_1 : E \longrightarrow E$ l'application linéaire qui à (x, y) associe $(x, 0)$. Considérons la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. On a $\pi_1(e_1) = \pi_1(1,0) = (1,0)$ et $\pi_1(e_2) = \pi_1(0,1) = (0,0)$ et $M_{B'B}(\pi_1) = M_B(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y) = (2x + 3y, -2x + 5y, x - y).$$

Il est aisé de voir f est linéaire. Soient $B = \{e_1, e_2\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ les bases canoniques respectives des espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On a $f(e_1) = f(1,0) = (2, -2, 1)$ et $f(e_2) = f(0,1) = (3, 5, -1)$. Les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ vont s'écrivent verticalement pour former la base $M_{B'B}(f)$ de f relativement aux bases B et B'.

$$M_{B'B}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est de type $(3, 2)$.

4)a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Rappelons que l'homothétie de rapport λ est l'endomorphisme $h_\lambda : E \longrightarrow E$ donné par $h_\lambda(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$. Puisque $h_\lambda(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$, alors la matrice de h_λ dans la base B est très facile à écrire :

$$M_B(h_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

b) En particulier, pour $\lambda = 1$, il s'agit de l'endomorphisme identité $h_1 = id_E$ qui a pour matrice

$$M_B(id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

c) Notons que si nous travaillons avec deux bases différentes B et B' de E, alors $M_{B'B}(id_E) \neq I_n$. En effet, prenons $E = \mathbb{R}^2$ et soient $B = \{(2,1), (-1,0)\}$ et $B' = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. on a
$id_E(2,1) = (2,1) = 2e_1 + e_2$ et $id_E(-1,0) = (-1,0) = -e_1 + 0e_2$. D'ou

$$M_{B'B}(id_E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$$

Remarque 1.1.3. Il est important s'insister sur le fait que la matrice qui représente une application linéaire dépend des bases choisies ! Si nous changeons les bases des espaces considérées, nous obtenons des matrices différentes. Il est important de souligner que la matrice d'une application linéaire dépend aussi de l'ordre dans lequel les éléments de la bases sont écrits.

Proposition 1.1.4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, de bases respectives B et B'. Pour toutes applications linéaires $f, g : E \longrightarrow F$ et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :
1) $M_{B'B}(f+g) = M_{B'B}(f) + M_{B'B}(g)$;
2) $M_{B'B}(\alpha f) = \alpha M_{B'B}(f)$.

Preuve.
Posons $B = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$, $B' = \{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ et notons $M_{B'B}(f) = (a_{ij})$ et $M_{B'B}(g) = (b_{ij})$. Alors, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} e_i'$ et $g(e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} b_{ij} e_i'$ pour tout $j = i, \cdots, p$. Par conséquent,

$$(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} e_i' + \sum_{i=1}^{i=n} b_{ij} e_i' = \sum_{i=1}^{i=n} (a_{ij} + b_{ij}) e_i'.$$

Ceci donne

$$M_{B'B}(f+g) = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = M_{B'B}(f) + M_{B'B}(g)$$

D'autre part,

$$(\alpha f)(e_j) = \alpha f(e_j) = \alpha \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} e_i' = \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha a_{ij}) e_i'.$$

D'où
$$M_{B'B}(\alpha f) = (\alpha a_{ij}) = \alpha(a_{ij}) = \alpha M_{B'B}(f).$$
■

Comme conséquence, nous pouvons énoncer :

Théorème 1.1.5. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n respectivement. Soient $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base de E et $B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ une base de F. Alors l'application $M : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui à f associe $M_{B'B}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier $dim(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)) = np$.

Preuve.
Il est facile de vérifier la linéarité de M.
Soit $f \in Ker(f)$, donc $M_{B'B}(f) = 0$. Par suite, $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = 0$. Doù $f = 0$ et M est injective. Elle est aussi surjective, car si
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$
On construit f en posant :
$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}e_1' + a_{21}e_2' + \cdots + a_{n1}e_n' = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i1}e_i' \\ f(e_2) = a_{12}e_1' + a_{22}e_2' + \cdots + a_{n2}e_n' = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i2}e_i' \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ f(e_p) = a_{1p}e_1' + a_{2p}e_2' + \cdots + a_{np}e_n' = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ip}e_i'. \end{cases}$$
Pour $x \in E$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p$ avec $x_i \in \mathbb{K}$. Alors, $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_pf(e_p)$. On vérifie que l'application f est linéaire et $M_{B'B}(f) = A$.
■

1.2 Produit de deux matrices

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Soient $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, $B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ et $B'' = \{e_1'', e_2'', \ldots, e_n''\}$ les bases respective de E, F et G.

Proposition 1.2.1. Avec les notations précédentes on a :
$$M_{B''B}(g \circ f) = M_{B''B'}(g).M_{B'B}(f).$$

On suppose maintenant que $dim(E) = dim(F)$.

Corollaire 1.2.2. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors f est bijective si et seulement si la matrice $M_{B'B}(f)$ est inversible.
Dans ce cas la matrice $M_{BB'}(f^{-1})$ est l inverse de $M_{B'B}(f)$:

$$M_{BB'}(f^{-1}) = (M_{B'B}(f))^{-1}.$$

Remarque 1.2.3. Dans le cas particulier où $E = F$ et $B' = B$, on obtient, pour toute application linéaire bijective,

$$M_B(f^{-1}) = (M_B(f))^{-1}.$$

1.3 Écriture matricielle

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. B et B' des bases de E et F. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, x un élément de E.
On note A la matrice $(M_{B'B}(f))$, X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base B et Y la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base B'.

Proposition 1.3.1. On a $Y = AX$.

1.4 Matrice de passage d'une base à une autre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et $B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$. Puisque B est une base de E, chaque vecteur e_j' se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{cases} e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\ e_n' = a_{1p}e_1 + a_{2p}e_2 + \cdots + a_{np}e_n \end{cases}$$

avec les a_{ij} dans $\mathbb{K}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. C'est-à-dire, $e_j' = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}e_i$ pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
Les n^2 coefficients a_{ij} vont former une matrice qui jouera un rôle central dans le procédé de changement de bases :

Définition 1.4.1. On appelle matrice de passage (ou matrice de changement de base) de la base B à la base B' la matrice $P_{BB'}$ dont les colonnes sont formées par les coordonnées des vecteurs $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ dans la base B :

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on dit que B est l'ancienne base de E et que B' est la nouvelle base.

Exemple 1.4.1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Considérons les trois vecteurs e_1', e_2', e_3' de E donnés par : $e_1' = e_1 - e_3$, $e_2' = e_2 + e_3$ et $e_3' = e_1 + e_3$.
On vérifie par des calculs simples que la famille $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ est libre, et donc c'est une base de E. La matrice de passage de la base B à la base B' est :

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.4.2. Soit l'endomorphisme identité $id_E; E \longrightarrow E$, $x \longmapsto x$. On rappelle que $M_B(id_E) = M_{BB}(id_E) = I_n$ et $M_{B'}(id_E) = M_{B'B'}(id_E) = I_n$
Munissons maintenant l'espace de départ E de la base B' et l'espace d'arrivée E de la base B, que nous schématisons par $id_E; (E, B') \longrightarrow (E, B)$. Alors la matrice $M_{BB'}(id_E)$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs $id_E(e_1') = e_1', \cdots, id_E(e_n') = e_n'$ dans la base B. Donc

$$P_{BB'} = M_{BB'}(id_E).$$

Mais attention à l'ordre des bases !

Proposition 1.4.3. La matrice de passage $P_{BB'}$ de la base B à la base B' est inversible, et son inverse $P_{BB'}^{-1}$ est égale à la matrice de passage de la base B' à la base B :

$$P_{BB'}^{-1} = P_{B'B}.$$

Exemple 1.4.2. Retournons à Exemple1.4.1. On déduit de la proposition précédente que la matrice $P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et que son inverse P^{-1} est la matrice de passage de la base $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ à la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Si nous voulons donc calculer P^{-1} de cette manière, if suffit de trouver les coordonnées des vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la base B'. Pour cela, considérons le système :

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 \\ e_2' = e_2 + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_3 \end{cases}$$ où les inconnus sont les vecteurs e_1, e_2, e_3 qu'il faut calculer en fonction des vecteurs e_1', e_2', e_3'. A l' aide du système précédent on obtient :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}e_1' + \frac{1}{2}e_3' \\ e_2 = \frac{1}{2}e_1' + e_2' - \frac{1}{2}e_3' \\ e_3 = -\frac{1}{2}e_1' + \frac{1}{2}e_3' \end{cases}$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.5 Changement de coordonnées d'un vecteur

Théorème 1.5.1. Soient B et B' deux bases de E. Soient x un élément de E, X_B et $X_{B'}$ les matrices colonnes des coordonnées de x dans les bases B et B'. Alors X_B est égale au produit de la matrice de passage $P_{BB'}$ par $X_{B'}$:

$$X_B = P_{BB'} X_{B'}.$$

Attention à l'ordre ! on a les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

Exemple 1.5.1. Retournons à Exemple1.4.1. Pour tout vecteur $x = ae_1 + be_2 + ce_3 = a'e_1' + b'e_2' + c'e_3' \in E$, la relation $X_B = P_{BB'}X_{B'}$, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{cases} a = a' + c' \\ b = b' \\ c = -a' + b' + c' \end{cases}$$

Or, on a $P_{BB'}^{-1} X_B = P_{BB'}^{-1} P_{BB'} X_{B'} = X_{B'}$, et d'après les données de l'exemple précédent,

$$P_{BB'}^{-1} = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} a' = \frac{1}{2}(a+b-c) \\ b' = b \\ c' = \frac{1}{2}(a-b+c) \end{cases}$$

1.6 Changement de la matrice d'une application linéaire

Le résultat ci-dessous étudie l'action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Théorème 1.6.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $dim(E) = p$ et $dim(F) = n$. Soient B et B' deux bases de E, et Soient C et C' deux bases de F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $A = M_{CB}(f)$ et $A' = M_{C'B'}(f)$. Soient P la matrice de passage de B à B' et Q la matrice de passage de C à C'. Alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Preuve.
On a $P = M_{BB'}(id_E)$, $Q = M_{CC'}(id_F)$ et donc $Q^{-1} = M_{C'C}(id_F)$. Considérons les applications linéaires

$$E \xrightarrow{id_E} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{id_F} F.$$

L'égalité $f = id_F \circ f \circ id_E$ possède la traduction matricielle :

$$\begin{aligned} A' &= M_{C'B'}(f) \\ &= M_{C'B'}(id_F \circ f \circ id_E) \\ &= M_{C'C}(id_F)M_{CB}(f)M_{BB'}(id_E) \\ &= Q^{-1}AP \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.6.2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. B' et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soit f un endomorphisme de E, $A = M_B(f)$ et $A' = M_{B'}(f)$. Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Définition 1.6.3. On dit que deux matrices carrées A et A' d'ordre n sont semblables (ou A est semblable à A'), s'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que $A' = P^{-1}AP$.

D'après le corollaire précédent, si f est un endomorphisme de E, et B et B' sont deux bases de E, alors $M_B(f)$ et $M_{B'}(f)$ sont semblables. Donnons maintenant une forme de réciproque :

Proposition 1.6.4. Soient f un endomorphisme de E, B une base de E et A la matrice de f dans la base B. Si A' est une matrice semblable à A, il existe une base B' de E telle que A' soit la matrice de f dans la base B'.

CHAPITRE 2

Déterminants

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1 Formes n-linéaires alternées

Définition 2.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une application $f : E \times E \times \cdots \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chaque variable, c'est-à-dire si : $f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha y_i + \beta z_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) = \alpha f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) + \beta f(x_1, \cdots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Elle est symétrique si elle est invariante par permutation des vecteurs et antisymétrique ou alternée si l'interversion de deux vecteurs change le signe, c'est-à-dire si :

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in E, \forall i < j, f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n).$$

Remarque 2.1.2. On déduit immédiatement que si f est alternée, alors $f(x, x, \cdots, x) = 0$ et plus généralement que si x_i est une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$, alors $f(x, x, \cdots, x) = 0$.

Exemples 2.1.1. 1) Le produit scalaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et symétrique.

2) L'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $((a, b), (c, d)) \longmapsto ad - bc$ est bilinéaire et alternée.

2.2 Déterminant d'une matrice carrée

L'introduction du déterminant d'une matrice carrée est délicate alors que son calcule dans la pratique est simple. Nous allons le définir simplement par récurrence et donner ses propriétés utiles dans la pratique.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}, Pour tout $1 \leq i, j \leq n$. On note A_{ij} la sous

matrice de A d'ordre $n-1$ extraite de A en enlevant la i^{ime} ligne et la j^{ime} colonne de A.

Exemple 2.2.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Alors $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Définition 2.2.1. $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le déterminant de A est le scalaire noté $det(A)$ défini par la récurrence suivante :

1. Pour $n = 1$, on a $det(A) = a_{11}$;
2. Pour $n = 2$, On a $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$;
3. Pour $n \geq 3$ et pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a l'une des formules équivalentes suivantes :

   (a) Développement suivant la i^{ime} ligne :

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{i+k} a_{ik} det(A_{ik}) \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} det(A_{in}). \end{aligned}$$

   (b) Développement suivant la j^{ime} colonne :

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}) \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} det(A_{1j}) + (-1)^{2+i} a_{2j} det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} det(A_{nj}). \end{aligned}$$

On note aussi le déterminant de $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ou encore } det(A) = |a_{ij}|.$$

Exemples 2.2.1. 1) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. En développant suivant la premier ligne, on obtient :

$$det(A) = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ainsi, $det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$.
2) Calculons le déterminant d'ordre 4 suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

On développe suivant la premier ligne et on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}. \\ &= -18 + 12 + 18 + 30 + 24 + 24 \\ &= 90. \end{aligned}$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate des formules définissant le déterminant.fg

Proposition 2.2.2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$det(A) = det({}^tA).$$

Remarque 2.2.3. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Alors :
1) Si A est une matrice dont tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls, alors,

$$det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2) Si A est une matrice triangulaire supérieure (si tous les coefficients qui se trouvent au dessous de la diagonale sont nuls), alors,

$$det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3) Si A est une matrice triangulaire inférieure (si tous les coefficients qui se trouvent au dessus de la diagonale sont nuls), alors,

$$det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4) En particulier, le déterminant de la matrice identité I_n est égale à 1, c'est-à-dire

$$det(I_n) = 1.$$

2.3 Déterminant d'une matrice carrée : propriétés

Le résultat suivant est parmi les propriétés les plus importantes.

Théorème 2.3.1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

En particulier, si A est inversible alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate de ce théorème.

Proposition 2.3.2. Si A et B sont deux matrices semblables (c'est -à-dire, s'il existe une matrice inversible P telle $B = P^{-1}AP$), alors

$$det(A) = det(B).$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E. On appelle déterminant des n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ dans la base B et on note $det_B(v_1, \cdots, v_n)$ ou encore $|v_1, \cdots, v_n|_B$ le déterminant de la matrice

$$V = (v_1, \cdots, v_n)$$

C'est-à-dire le déterminant de la matrice

$$V = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2j} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & v_{ij} & \cdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nj} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

où, pour $j = 1, 2, \cdots, n$; $v_j = v_{1j}e_1 + v_{nj}e_n$. En particulier, si $A = (c_1, \cdots, c_n)$ est une matrice carrée d'ordre n où $c_1, \cdots, c_n$ sont ses vecteurs colonnes. Alors $det(A)$ est la déterminant de $(c_1, \cdots, c_n)$ considérés comme vecteurs $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Théorème 2.3.3. Avec les notations ci-dessus, on a :

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$det(c_1, \cdots, \lambda c_k, \cdots, c_n) = \lambda det(c_1, \cdots, c_k, \cdots, c_n).$$

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$det(\alpha c_1, \cdots, \alpha c_k, \cdots, \alpha c_n) = \alpha^n det(c_1, \cdots, c_k, \cdots, c_n).$$

2) Si l'une des colonnes C_k est la somme de deux colonnes $a_k + b_k$, alors

$$det(c_1, \cdots, a_k + b_k, \cdots, c_n) = det(c_1, \cdots, a_k, \cdots, c_n) + det(c_1, \cdots, b_k, \cdots, c_n).$$

3) Si l'on échange deux colonnes de la matrice A, alors le déterminant de A change de signe, c'est-à-dire

$$det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_j, \cdots, c_n) = -det(c_1, \cdots, c_j, \cdots, c_i, \cdots, c_n).$$

En particulier, si $c_i = c_j$, on a

$$det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_i, \cdots, c_n) = 0.$$

Ces propriétés indiquent que la déterminant est une forme n-linéaire. Elles constituent des règles de calcul pratiques et impliquent :

Proposition 2.3.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

1) Si deux colonnes de la matrice A sont égales, alors :

$$det(A) = 0.$$

2) Si l'une des colonnes de A est nulle, alors :

$$det(A) = 0.$$

3) Plus généralement, si l'une des colonnes de la matrice A est combinaison linéaire des autres, alors :

$$det(A) = 0.$$

4) On ne modifie pas la valeur de $det(A)$ en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Remarque 2.3.5. Puisque le déterminant d'une matrice est égale à celui de sa transposée, le Théorème 2.3.3 et la Proposition 2.3.4 restent valable si on change les colonnes par les lignes.

La formule du déterminant d'un produit de matrices a un conséquence intéressante. Nous pouvons ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme.

Définition 2.3.6. Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, on pose $det(f) = det(M_B(f))$, où B est une base quelconque de E.

Cette définition a bien un sens, puisqu'elle est indépendante de la base choisie. En effet, deux matrices représentant le même endomorphisme sont semblables.

2.4 Applications des déterminants

Théorème 2.4.1 (Indépendance linéaire de n vecteurs dans un e.v de dimension n). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Alors n vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forment une base si et seulement si $det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$.

Exemple 2.4.1. On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,1,0)$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$det_B(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

où B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En développant suivant le dernier ligne, on obtient.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Si a_{ij} est coefficient d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a donc le cofacteur de a_{ij} le réel $cof(a_{ij})$ défini par $cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$. où A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ extraite de A en enlevant la i^{ime} ligne la j^{ime} colonne de A. La comatrice de A, est la matrice $Com(A)$ obtenue en remplaçant chaque terme a_{ij} de la matrice A par son cofacteur $cof(a_{ij})$. c'est-à-dire $Com(A) = (cof(a_{ij}))$.

Théorème 2.4.2. Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$. Alors :

1) On a

$$A.(Com(A))^t = det(A).I_n.$$

2) En particulier, A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$, et dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.(Com(A))^t.$$

Exemple 2.4.2. Nous allons utiliser la formule ci-dessus pour calculer l'inverse des matrices suivantes : $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ et $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 1)Pour la matrice A, on a $det(A) = -2$ et $com(A) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Pour la matrice B, on développe suivant la deuxième ligne et on obtient

$$det(B) = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

D'un autre côté,

$$com(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2.5 Applications des déterminant : Système de Cramer

Le théorème suivant appelé **règle de Cramer**, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que l'inconnues.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle

$$AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j^{ime} colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système, dans ce cas où $det(A) \neq 0$, en fonction des déterminant des matrices A et A_j.

Théorème 2.5.1. Soit $AX = B$ un système de n équations à n inconnue. Supposons que $det(A) \neq 0$. Alors l'unique solution $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ du système est donnée par :

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)},\ x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)},\ \ldots,\ x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}.$$

Preuve.
On a supposé que $det(A) \neq 0$. Donc A est inversible. Par suite, $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.{}^t(Com(A))$. Donc $X = \frac{1}{det(A)}.{}^t(Com(A))B$. En développant,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)}. \begin{pmatrix} cof(a_{11}) & cof(a_{21}) & \cdots & cof(a_{n1}) \\ cof(a_{12}) & cof(a_{22}) & \cdots & cof(a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cof(a_{1n}) & cof(a_{2n}) & \cdots & cof(a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{det(A)}. \begin{pmatrix} cof(a_{11})b_1 + cof(a_{21})b_2 + \cdots + cof(a_{n1})b_n \\ cof(a_{12})b_1 + cof(a_{22})b_2 + \cdots + cof(a_{n2})b_n \\ \vdots \\ cof(a_{1n})b_1 + cof(a_{2n})b_2 + \cdots + cof(a_{nn})b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$x_1 = \frac{cof(a_{11})b_1 + cof(a_{21})b_2 + \cdots + cof(a_{n1})b_n}{det(A)} = \frac{det(A_1)}{det(A)},$$

$$\vdots,$$

$$x_j = \frac{cof(a_{1j})b_1 + cof(a_{2j})b_2 + \cdots + cof(a_{nj})b_n}{det(A)} = \frac{det(A_j)}{det(A)},$$

$$\vdots,$$

$$x_n = \frac{cof(a_{1n})b_1 + cof(a_{2n})b_2 + \cdots + cof(a_{nn})b_n}{det(A)} = \frac{det(A_n)}{det(A)}.$$

■

Exemple 2.5.1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2x - y + 2z = 1 \\ -2x + 2z = -2 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

On a : $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$det(A) = 4$, $det(A_1) = 12$, $det(A_1) = -12$, $det(A_1) = 8$.

La solution est alors,

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{12}{4} = 3,$$

$$y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{-12}{4} = -3,$$

$$z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{8}{4} = 2.$$

CHAPITRE 3

Réduction des endomorphismes

La réduction d'endomorphisme a pour objectif d'exprimer des matrices et des endomorphismes sous une forme plus simple, par exemple pour faciliter les calculs. Cela consiste essentiellement à trouver une décomposition de l'espace vectoriel un somme directe de sous espaces stables sur lesquels l'endomorphisme induit est plus simple. Moins géométriquement, cela correspond à trouver une base de l'espace dans laquelle l'endomorphisme s'exprime simplement.
Dans toute la suite de ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ non réduit à (0), et f un endomorphisme de E.

3.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 3.1.1. Un scalaire λ est dit valeur **propre** de f s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x$, x est alors appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Remarque 3.1.2. 1) Tous les multiples non nuls d'un vecteur propre de f sont encore des vecteurs propres de f pour la même valeur propre.

2) L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle spectre de f et noté $sp(f)$.

Exemples 3.1.1. 1) Si f est une homothétie d'espace vectoriel E, $f = k.id_E$, alors tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à la valeur propre k.

2) Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme défini, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par

$$f(P) = XP'.$$

Pour tout $0 \leq i \leq n$, on a :

$$f(X^i) = iX^i,$$

et donc X^i est vecteur propre de f associé à la valeur propre i.

3) Soit E l'espace vectoriel des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables. L'application $T : E \to E$ qui à une fonction associe sa dérivée est un endomorphisme de E. Alors pour tout réel λ, la fonction $u_\lambda(t) = \exp(\lambda t)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, car $u_\lambda(t) \neq 0$ et $T(u_\lambda) = \lambda u_\lambda$.

Dans le Théorème suivant nous caractérisons de façons plus précise les valeurs propres d'un endomorphisme.

Théorème 3.1.3. Soit λ un scalaire. les assertions suivantes sont équivalents :

1) λ est un valeur propre de f ;

2) L'endomorphisme $f - \lambda.id_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire son noyau vérifie

$$Ker(f - \lambda.id_E) = \{x \in E/(f - \lambda.id_E)(x) = 0\} \neq 0;$$

3) $det(f - \lambda.id_E) = 0$;

4) $det(M - \lambda.I_n) = 0$, où M est la matrice de f dans n'importe quelle base de E.

Preuve.
Pour λ soit valeur propre de f il faut et il suffit qu'il existe un vecteur non nul $v \in E$ tel que $f(v) = \lambda.v$, c'est-à-dire que l'on ait $(f - \lambda.id_E)(x) = 0$, ou encore que le noyau $Ker(f - \lambda.id_E) \neq 0$. Ceci entraine l'équivalence de 1) et 2). Pour que l'endomorphisme $f - \lambda.id_E$ de l'espace vectoriel E de dimension n ne soit pas injective il faut et il suffit qu'il ne soit pas bijectif, c'est-à-dire que son déterminant soit nul, d'où l'équivalent de 2) et 3). Enfin par définition du déterminant d'un endomorphisme, 3) et 4) sont équivalentes. ∎

3.2 Polynôme caractéristique

Définition 3.2.1. 1) Le polynôme caractéristique de f est défini par

$$C_f(X) = det(f - X.id_E) \in \mathbb{K}[X].$$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de M est défini par

$$C_M(X) = det(M - X.I_n) \in \mathbb{K}[X].$$

La proposition suivante est importante. Elle indique le fait que pour calculer le Polynôme caractéristique d'un endomorphisme, il suffit de calculer celui de sa matrice dans une base quelconque.

Proposition 3.2.2. Soit M la matrice de f dans n'importe quelle base de E. Alors

$$C_f(X) = C_M(X).$$

Exemple 3.2.1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $C_f(X)$ est donné par

$$\begin{aligned} C_f(X) = C_M(X) &= det(M - X.I_n) \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \\ &= -(X-1)(X+2)^2. \end{aligned}$$

La proposition suivante donne un moyen de calculer les valeurs propres d'un endomorphisme.

Proposition 3.2.3. Les valeurs propres de f sont exactement les racines de son polynôme caractéristique qui sont dans $\mathbb{K}$.

Preuve.

On a les équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{K} \text{ est valeur propre de } f &\iff \text{l'endomorphisme } f - \lambda.id_E \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff (f - \lambda.id_E)(x) = 0 \\ &\iff C_f(\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ est une racine de } C_f(X) \text{ dans } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

■

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$. Soit X une indéterminé, alors on peut écrire :

$$A - XI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - X \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2.4. Le polynôme caractéristique d'une matrice (ou d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) est un polynôme de degré n.

Corollaire 3.2.5. En dimension n un endomorphisme (ou une matrice d'ordre n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Exemple 3.2.2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire. Alors $A - XI_n$ est aussi une matrice triangulaire et le polynôme caractéristique (déterminant triangulaire) est donc le produit des coefficient diagonaux, c'est-à-dire

$$C_A(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X) \cdots (a_{nn} - X).$$

Les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A. En particulier, ce résultat est vrai pour une matrice diagonale.

3.3 Sous-espace propre

Ce qui précède montre que l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul est exactement $Ker(f - \lambda.id_E)$.

Définition 3.3.1. Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f. On appelle sous-espace propre associé à λ, le sous-espace vectoriel de E défini par $E_\lambda = Ker(f - \lambda.id_E)$

Remarque 3.3.2. 1) C'est en cherchant le noyau de l'application $f - \lambda.id_E$ que l'on détermine les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

2) Si λ n'est pas valeur propre de f, $E_\lambda = 0$.

Définition 3.3.3. Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f. On appelle sous-espace propre associé à λ, le sous-espace vectoriel de E défini par $E_\lambda = Ker(f - \lambda.id_E)$

L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de f est l'ordre de multiplicité d'une de la racine λ du polynôme caractéristique de f.

Théorème 3.3.4. Soit λ une valeur propre de f. Alors la dimension du sous-espace propre E_λ est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de λ. En particulier, si λ est une valeur propre simple (l'ordre de multiplicité de λ égale à 1) alors $dimE_\lambda = 1$.

3.4 Diagonalisation

Définition 3.4.1. 1) L'endomorphisme f est dit diagonalisable s'il existe une base B de E dans laquelle la matrice $M_B(f)$ de f est diagonale.
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2) On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M = P^{-1}DP$.

Proposition 3.4.2. L'endomorphisme f de E est diagonale si et seulement s'il existe une base de E composée de vecteurs propres.

Exemple 3.4.1. Reprenons l'exemple $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'endomorphisme défini pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par

$$f(P) = XP'.$$

Comme $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, composée de vecteurs propres de f, on déduit que f est diagonale.

Définition 3.4.3. On dit qu'un polynôme $P(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ s'il est décomposable en un produit de facteurs du premier degré à coefficient Dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire

$$P(X) = a\prod_{i=1}^{i=n}(x - \mu_i)^{\alpha_i}$$

où $a, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K}$.

Nous arrivons maintenant au théorème fondamental de ce chapitre.

Théorème 3.4.4. Soit $C_f(X)$ le polynôme caractéristique de f et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de f. $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on pose E_{λ_i} le sous espace propre associé à λ_i et α_i l'ordre de multiplicité de λ_i. Les assertions suivantes sont équivalents :

1) f est diagonale;
2) $C_f(X)$ est scindé, mettons : $C_f(X) = \prod_{i=1}^{i=p}(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ et $dimE_{\lambda_i} = \alpha_i$ $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;
3) $dimE = dimE_{\lambda_1} + dimE_{\lambda_2} + \cdots + dimE_{\lambda_p}$;
4) E est la somme directe des sous-espaces propres de f c' est-à-dire :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} \ (E = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_p} \text{ et } E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\} \ ).$$

3.5 Démarche à suivre pour vérifier si un endomorphisme est diagonalisable

Nous allons résumer les étapes pour vérifier si un endomorphisme $f : E \longrightarrow E$ est diagonalisable (pour vérifier si une matrice diagonalisable, on la regarde comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$)
1) On choisi une base de E et on calcule la matrice A dans cette base.
2) On calcule le polynôme caractéristique de f par la forme :

$$C_f(X) = det(A - X.I_n).$$

3) On calcule les racines de $C_f(X)$ dans $\mathbb{K}$ ainsi leurs ordre de multiplicité. A ce stade, on distingue deux cas :

a) Si $C_f(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors f n'est pas diagonalisable.

b) Si $C_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ c'est-à-dire

$$C_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}(X-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\cdots(X-\lambda_p)^{\alpha_p},$$

pour chaque valeur propre α_i où $1 \leq i \leq p$, on calcule le sous-espace propre E_{λ_i} en résolvant le système $AX = \lambda_i X$

deux situations peuvent se présenter :

- Il existe un $1 \leq j \leq p$ tel que $dimE_{\lambda_j} < \alpha_j$ et dons ce cas f n'est pas diagonalisable.
- Pour tout $1 \leq j \leq p$, $dimE_{\lambda_j} = \alpha_j$ et dons ce cas f est diagonalisable. On détermine alors une base de vecteurs propres et on écrit la matrice de f dans cette base.

Exemple 3.5.1. Reprenons l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu que Le polynôme caractéristique $C_f(X)$ de f est donné par

$$C_f(X) = -(X-1)(X+2)^2.$$

les valeurs propres sont 1 et -2. Expliquons maintenant les sous-espaces propres E_1 et E_{-2}.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow (A - 1.I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=z.$$

Donc on peut choisi le vecteur $(1,1,1)$ comme base de E_1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Longleftrightarrow (A+2.I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x+y+z=0.$$

Donc E_1 est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 dont une base $\{(1,0,-1),(0,1,-1)$ Comme $C_f(X)$ est scindé, $dimE_{\lambda_1} = 1$ et $dimE_{\lambda_1} = -2$. Le théorème précédent implique que f est diagonalisable. Sa matrice dans la base $(1,1,1), \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

formée de vecteur propre de f. Sa matrice dans cette base est la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarques 3.5.1. 1) Attention ! lorsqu'on cherche à savoir si une matrice est diagonalisable, il est important de préciser si l'on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Voici un exemple éclairant. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est : $C_f(X) = X^2 + 1$, qui n'a pas de racine réelle. Donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}^2$.
Cependant, considérons maintenant l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est encore : $C_f(X) = X^2 + 1$, il admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{C}$, qui sont i et $-i$. Donc g est diagonalisable et dans une base de vecteurs propres la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}..$$

2) Il faut également se garder de croire que tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ est diagonalisable. Considérons par exemple l'endomorphisme h de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit :

$$M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est : $C_f(X) = X^2 + 1$. La seule valeur propre est donc 1 et un calcul direct montre que le sous-espace E_1 engendré par le vecteur $(1, 0)$. Il n'est donc pas de dimension 2, et h n'est donc pas diagonalisable.

3.6 Trigonalisation

Définition 3.6.1. 1) Une matrice carrée A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) T, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}TP$.

2) L'endomorphisme f est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire (supérieure ou inférieure).

Trigonaliser f signifie : Rechercher une telle base. Si f a dans la base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors pour tout j : $f(v_j) = \sum_{i=1}^{i=j} a_{ij} v_i$.

Trigonaliser f revient donc à chercher une base $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de E telle que pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $f(v_j)$ appartient au sous-espace engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_j$: $f(uj) \in vect(v_1, v_2, \cdots, v_j)$:
En particulier, v_1 est nécessairement un vecteur propre de f.

Remarque 3.6.2. Tout endomorphisme (ou matrice) diagonalisable est trigonalisable.

Théorème 3.6.3. Pour que l'endomorphisme f de E soit trigonalisable il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de f soit scindé. En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f est toujours trigonalisable.

3.7 Exemples de trigonalisation

Exemple 3.7.1. On considère f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne : $C_f(X) = CA(X) = (1 - X)^3$. La matrice A admet donc une seule valeur propre $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon, il existerait une matrice P inversible telle que $A = P^{-1} I_3 P$, alors $A = I_3$, or ce n'est pas le cas.
On détermine maintenant le sous espace propre E_1 associé à cette valeur propre.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff (A - 1.I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x + 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + z = 0 \\ 4x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \iff -2x - 2y + z = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}E_1 &= \{(x,y,2x+2y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \{(x,0,2x)+(0,y,2y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \{x(1,0,2)+y(0,1,2) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$

Comme les deux vecteurs $v_1 = (1,0,2)$ et $v_2 = (0,1,2)$ sont libres, car le sous-déterminant $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$, alors on peut choisi $\{v_1, v_2\}$ comme base de E_1. On complète $\{v_1, v_2\}$ par un vecteur v_3 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$. Ici, on peut par exemple choisir $v_3 = e_3$. Le système $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre car, $det(v_1, v_2, v_3) = 1 \neq 0$. On a donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_3\\ v_2 = e_2 + 2e_3\\ v_3 = e_3\end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = v_1 - 2v_3\\ e_2 = v_2 - 2v_3\\ e_3 = v_3\end{cases}$$

Ainsi, $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$ et

$$\begin{aligned}f(v_3) &= f(e_1)\\ &= -2e_1 + e_2 - e_3\\ &= -2(v_1 - 2v_3) + v_2 - 2v_3 - v_3\\ &= -2v_1 + v_2 + v_3\end{aligned}$$

La matrice de f dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ s'écrit alors :

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On vérifie que $T = P^{-1}AP$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Exemple 3.7.2. On considère f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est

$$A = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne : $C_f(X) = CA(X) = (1-X)^4$. La matrice A admet donc une seule valeur propre $\lambda = 1$ d'ordre multiplicité 4.
On détermine maintenant le sous espace propre E_1 associé à cette valeur propre.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1 \iff (A-1.I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3y+3t=0 \\ -2x-7y+13t=0 \\ -3y+3t=0 \\ -x-4y+7t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=t \\ x=3t \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(3t,t,z,t) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(3t,t,0,t) + (0,0,z,0) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{t(3,1,0,1) + z(0,0,1,0) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Comme les deux vecteurs $u_1 = (3,1,0,1)$ et $u_2 = (0,0,1,0)$ sont libres, alors on peut choisi $\{u_1, u_2\}$ comme base de E_1. Donc $dimE_1 < 4$ On complète $\{u_1, u_2\}$ par deux vecteurs $\{u_3, u_4\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Ici, on peut par exemple choisir $u_3 = e_1$ et $u_4 = e_2$. Le système $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre car, $det(v_1, v_2, v_3) = 1 \neq 0$. On a donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = 3e_1 + e_2 + e_4 \\ u_2 = e_3 \\ u_3 = e_1 \\ u_4 = e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = u_3 \\ e_2 = u_4 \\ e_3 = u_2 \\ e_4 = u_1 - 3u_3 - u_4 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(u_3) &= f(e_1) \\ &= e_1 - 2e_2 - e_4 \\ &= -u_1 + 4u_3 - u_4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(u_4) &= f(e_2) \\ &= -3e_1 - 6e_2 - 3e_3 - 4e_4 \\ &= -4u_1 - 3u_2 + 9u3 - 2u_4 \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ s'écrit alors :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On considère la sous-matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

qui est la matrice de la projection de f sur le sous-espace engendré par (u_3, u_4), dans la base canonique de ce sous-espace. On va maintenant trigonaliser cette matrice. Le polynôme caractéristique de cette matrice est $C_{A_1}(X) = (1 - X)^2$
Cette matrice n'a qu'une seule valeur propre double qui est 1. Le sous espace propre associé à cette valeur propre est déterminé par

$$\begin{cases} 3x + 9y = 0 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \iff \{x = -3y \quad .$$

Sa dimension est donc 1, et il est engendré par v_1 de coordonnées dans la base canonique du sous-espace $(-3, 1)$. On le complète en une base du sous -espace avec un vecteur v_2 de coordonnées $(0, 1)$.
Les vecteurs correspondants dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$ sont donc $v_1' = -3u_3 + u_4$ et $v_2' = u_4$. Ainsi,

$$f(v_1') = -u_1 - 3u_2 + v_1'$$
$$f(v_2') = -4u_1 - 3u_2 - 3v_1' + v_2'.$$

La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, v_1', v_2'\}$ s'écrit alors :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.8 Polynômes d'endomorphismes-Polynôme minimal

On définit les puissances de f par :

$$f^0 = id_E, f^1 = f, f^2 = f \circ f, \cdots, f^{m+1} = f^m \circ f.$$

Plus généralement, si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors on définit le polynôme d'endomorphisme $P(f)$ par :

$$P(f) = a_0id_E + a_1f + \cdots + a_mf^m.$$

Si A est la matrice de f dans une base B de E, alors le polynôme de matrice $P(A)$ défini par :

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_mA^m.$$

est la matrice de $P(f)$ dans la base B.

Proposition 3.8.1. Pour tout endomorphisme f de E, il existe un polynôme non nul $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$ (où 0 est l'endomorphisme nul de E).

Preuve.
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, donc $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. Par conséquent, les n^2+1 endomorphismes $idE, f, f^2, \cdots, f^{n^2}$ sont liés. Donc il existe des coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_{n2}$ de $\mathbb{K}$ non tous nuls, tels que

$$a_0idE + a_1f + \cdots + a_{n^2}f^{n^2} = 0.$$

C'est-à-dire le polynôme non nul

$$Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n^2}X^{n^2}$$

vérifie $Q(f) = 0$.

■

Définition 3.8.2. On appelle polynôme annulateur de f tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$.

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Alors il existe un unique polynôme unitaire $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$) de $\mathbb{K}[X]$ de degré minimal, vérifiant $m_f(f) = 0$ (resp. $m_A(A) = 0$), tel que tout polynôme annulateur de f (resp. de A) est multiple de $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$).

Théorème 3.8.3 (de Cayley-Hamilton). Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Alors le polynôme caractéristique $C_f(X)$ de f (resp. $C_A(X)$ de A) est un polynôme annulateur de f (resp. de A).

Corollaire 3.8.4. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Alors le polynôme minimal $m_f(X)$ divise $C_f(X)$ et $m_A(X)$ divise $C_A(X)$.

Exemples 3.8.1. 1) Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $C_f(X) = (2-X)(X-1)^2 = -(X-2)(X-1)^2$, il en résulte que $m_f(X) = (2-X)(X-1)$ ou $m_f(X) = (2-X)(X-1)^2$. Or, $(A-2I_3)(A-I_3) \neq 0$, alors $m_f(X) = (X-2)(X-1)^2$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $C_A(X) = (1-X)(2+X)^2 = -(X-1)(X+2)^2$. Comme $(A-I_3)(A+2I_3) = 0$, alors $m_A(X) = (X-1)(X+2)$.

Théorème 3.8.5. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Alors f (resp. A) est diagonalisable si et seulement si les racines de $m_f(X)$ (resp. de $m_A(X)$) sont simples et appartiennent à $\mathbb{K}$.

Chapitre 4

Formes bilinéaires et formes quadratiques

Dans toute la suite de ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

4.1 Formes linéaires

Définition 4.1.1. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.

Proposition 4.1.2. Soit une $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Une application f de E dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire si et seulement si il existe n scalaires $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tels que pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$,

$$f(x) = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n.$$

Ceci se vérifie facilement en remarquant que $a_i = f(e_i)$.

Exemple 4.1.1. Si $E = \mathbb{K}_n[X]$, et si $a \in \mathbb{K}$ alors l'application $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ qui à P associe $P(a)$ est une forme linéaire sur E.

Définition 4.1.3. On appelle espace dual (ou simplement dual) de E l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, c'est-à-dire $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E; \mathbb{K})$, et on le note E^*.

Définition 4.1.4. Soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Pour tout $i = 1, 2, \cdots; n$, on définit une forme linéaire e_i^* sur E en posant pour $1 \leq j \leq n$,

$$e_i^*(ej) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ \ i = j \\ 0 & si \ \ i \neq j \end{cases}.$$

δ_{ij} est appelé le **symbole de Kroneker.**

Proposition 4.1.5. Soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. L'ensemble $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ une base de E. défini comme ci-dessus est une base de E^* et est appelé base duale de B.

4.2 Formes bilinéaires

Définition 4.2.1. Une forme bilinéaire sur E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable, c'est-à-dire :

- ◇ $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto f(x; y)$ est une forme linéaire sur E.
- ◇ $\forall y \in E$, l'application $x \mapsto f(x; y)$ est une forme linéaire sur E.

Exemples 4.2.1. 1) Soient $E = \mathbb{K}$, a un élément de $\mathbb{K}$ et f l'application de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $f(x, y) = axy$. C'est une forme bilinéaire. Réciproquement, toutes les formes bilinéaires sur $\mathbb{K}$ sont de ce type. En effet, soit f une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}$. Alors, pour tout (x,y) de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $f(x; y) = xf(1, y)$ (linéarité par rapport à la première variable). Or, $f(1, y) = yf(1, 1)$ (linéarité par rapport à la deuxième variable). D'où : $f(x, y) = xyf(1, 1)$. En posant $a = f(1, 1)$ qui est bien un scalaire, il vient $f(x, y) = axy$.
2) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par $\varphi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$ est une forme bilinéaire sur E (vérification immédiate).

Proposition 4.2.2. L'espace vectoriel $B(E)$ des formes bilinéaires sur E est de dimension n^2.

4.3 Matrice d'une forme bilinéaire

Il est toujours possible d'associer à une application linéaire une matrice dans une base. Voyons ce qu'il en est pour une forme bilinéaire f. Soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et soient $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^{i=n} y_ie_i$ deux éléments de E on a :

$$f(x, y) = f(\sum_{i=1}^{i=n} x_ie_i, \sum_{i=1}^{i=n} y_ie_i) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f(e_i, e_j)x_iy_j.$$

Ainsi, la forme bilinéaire f est déterminée de façon unique par la matrice suivante dans la base B :

$$M_{f,B} = M_B = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

Si on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base B et MB la matrice associée à j dans la base B, c'est donc la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, il vient :

$$f(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{i=n} x_i (\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} y_j).$$

En posant $c_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} y_j$, cela donne :

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i c_i = (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

La matrice ligne $(x_1, \cdots, x_n) = {}^tX$. Le scalaire $c_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} y_j$ peut être interprété comme le produit

$$(a_{i1}, \cdots, x_{in}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat suivant :

Proposition 4.3.1. Soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et f une forme bilinéaire sur E. Soit M_B la matrice associée à f dans la base B. Si x et y sont deux éléments de E, X et Y les matrices colonnes dont les éléments sont les coordonnées de x et y respectivement dans la base B, alors on a

$$f(x,y) = {}^tX M_B Y.$$

4.4 Changement de base

Le résultat ci-dessous étudie l'action d'un changement de bases sur la matrice d'une forme bilinéaire.

Soient B et B' deux bases de E. P la matrice de passage de B à B'. Soient x et y deux éléments de E de matrices-colonnes X, X' et Y, Y' dans B et B' respectivement. Les formes classiques de changement de base donnent les relations :

$$X = PX' \ et \ Y = PY'$$

Alors, si f est une forme bilinéaire sur E et M_B sa matrice dans la base B on a :

$$f(x, y) = {}^tXM_BY = {}^t(PX')M_B(PY') = {}^tX'({}^tPM_BP)Y'.$$

La formule trouvée prouve que $M_{B'} = {}^tPM_BP$ est la matrice associée à f dans la base B'. Alors, on peut énoncer la formule de changement de base :

Proposition 4.4.1. Soient B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soient f une forme bilinéaire sur E, M et M' les matrices associées à f dans les bases B et B' respectivement. Alors :

$$M' = {}^tPMP.$$

Attention à ne pas confondre avec la formule de changement de base pour une application linéaire $M' = {}^tPMP$. Ce qui précède nous donne la caractérisation suivante d'une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension n :

Proposition 4.4.2. Soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire sur E si et seulement si il existent des scalaires a_{ij}, pour $1 \leq i, j \leq n$, tels que pour tout $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i$, $f(x, y)$ s'écrit de la manière suivante :

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_i.$$

Définition 4.4.3. On dit que deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, M et M', sont congruentes, s'il existe une matrice inversible P telle que $M' = {}^tPMP$.

Définition 4.4.4. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

a) f est définie si

$$\forall x \in E, f(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$$

b) f est dite positive lorsque

$$\forall x \in E, f(x, x) \geq 0;$$

c) f est dite définie positive lorsque

$$\forall x \in E \backslash \{0\}, f(x, x) > 0.$$

4.5 Formes bilinéaires symétriques

Définition 4.5.1. On dit qu'une forme bilinéaire f sur E est symétrique si

$$\forall (x,y) \in E \times E, f(x,y) = f(y,x);$$

Elle est antisymétrique si $f(x,y) = -f(y,x)$.

Remarquer que la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que d'un seul côté.

Exemple 4.5.1. La relation $f((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ définit une forme bilinéaire symétrique et définie positive (à vérifier).

Proposition 4.5.2. Pour qu'une forme bilinéaire soit symétrique il faut et il suffit que sa matrice dans une base donnée soit symétrique (c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$).

Preuve.
Soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E La matrice de la forme bilinéaire f dans cette base est $(f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
Si cette matrice est symétrique on a pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $1 \leq j \leq n$,

$$f(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f(e_i, e_j) x_i y_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f(e_j, e_i) x_j y_i = f(y,x),$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire est symétrique. ∎

4.6 Formes quadratiques

Définition 4.6.1. On dit qu'une application $Q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique sur l'espace vectoriel E s'il existe une forme bilinéaire symétrique f sur $E \times E$ vérifiant $Q(x) = f(x,x)$ pour tout x de E. f est appelée la forme bilinéaire associée à Q.

Exemples 4.6.1. 1) Soient $E = \mathbb{K}$, a un élément de $\mathbb{K}$ et f la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}$ définie par $f(x,y) = axy$. Alors $Q : E \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto ax^2$ est une forme quadratique associée à f.
2) Soient $E = \mathbb{K}^2$ et φ la forme bilinéaire symétrique sur E définie par $\varphi((x,y),(x',y')) = xx' + yy'$. Alors $Q : E \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est une forme quadratique associée à φ.

Proposition 4.6.2. Soient f une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée à f.

a) Soient x un élément de E et λ un scalaire. Alors

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

b) Pour tout (x, y) appartenant à $E \times E$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)].$$

Cette dernière formule est appelée formule de polarisation.

Preuve.
a) Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $Q(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 f(x,x) = \lambda^2 Q(x)$.
1) Soit $(x, y) \in E \times E$. Alors,

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= f(x+y, x+y) \\ &= f(x, x+y) + f(y, x+y) \\ &= f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y). \end{aligned}$$

Comme f est symétrique cela donne

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y) \\ &= Q(x) + 2f(x,y) + Q(y). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

Le théorème suivant permet d'avoir une caractérisation des formes quadratiques plus utilisable.

Théorème 4.6.3. Une application Q de E dans $\mathbb{K}$ est une forme quadratique sur E si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

a) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

b) L'application f définie par :
$\forall (x, y) \in E \times E$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$$

est bilinéaire symétrique.

Si ces conditions sont satisfaites, Q est une formes quadratique associée à f et la forme bilinéaire symétrique f est souvent appelée forme polaire associée à Q.

Remarque 4.6.4. Pour toute forme quadratique Q il existe une unique forme bilinéaire symétrique associée.
Attention ! étant donné une forme quadratique Q, il existe en général une infinité de forme bilinéaires f vérifiant $Q(x) = f(x,x)$. Par exemple, si Q est la forme quadratique sur R^2 définie par $Q(x_1, x_2) = x_1x_2$ et si f_k est la forme bilinéaire définie par :

$$f_k((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = kx_1y_2 + (1-k)x_2y_1,$$

alors on a $f_k(x, x) = Q(x)$, pour tout k. Mais ces formes ne sont pas symétriques sauf pour $k = \frac{1}{2}$, qui correspond à la forme bilinéaire associée.

Soient $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E et Q une forme quadratique sur E. La matrice de Q dans cette base est exactement celle de sa forme bilinéaire associée f. Si on note $M_B = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ cette matrice, et si de plus X est la matrice colonne dans B d'un vecteur x de E, alors

$$Q(x) = {}^tXM_BX = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j = \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_iy_j,$$

car f étant symétrique on a $a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$.
Une forme quadratique s'écrit donc comme un polynôme homogène de degré 2 (tous les monômes sont de degré 2).
Réciproquement. Soit le polynôme en $x_1, x_2, \cdots, x_n$ homogène de degré 2 suivant :

$$P(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \sum_{1\leq i,j\leq n} b_{ij}x_iy_j.$$

On a,

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1\leq i\leq n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (b_{ij} + b_{ji})x_iy_j$$

Soient les scalaires ai j définis pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ par

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}).$$

Ils vérifient en particulier les relations :

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad , \quad a_{ii} = b_{ii},$$
$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad , \quad \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}, a_{ij} = a_{ji}.$$

Alors, il vient que

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_iy_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j = f(x, x),$$

où f est la forme bilinéaire symétrique de matrice $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Corollaire 4.6.5. Soit Q une forme quadratique sur E dont l'expression dans la base $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de E est :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{i=n} x_ie_i, Q(x) = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}x_iy_j$$

avec α_{ij} sont des scalaires vérifiant $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Alors la forme bilinéaire symétrique associée à Q, a pour expression pour tout $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ $y = \sum_{i=1}^{i=n} y_i e_i$

$$f(x,y) = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$$

Ce résultat est constamment utilisé dans la pratique.

Exemple 4.6.1. Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soit Q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par $Q(x) = -2x_1^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + x_3x_4 - 3x_1x_4$. Comme $Q(x)$ est une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport aux coordonnées x_i de x dans la base canonique, c'est une forme quadratique et sa forme polaire est définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par

$$f(x,y) = -2x_1y_1 + x_3y_3 - \frac{3}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_3y_4 + x_4y_3) - \frac{3}{2}(x_1y_4 + x_4y_1).$$

La matrice associée à f (ou à Q) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

4.7 Rang et noyau d'une forme quadratique

Définition 4.7.1. 1) Soit Q une forme quadratique de E et B une base de E, $M_{Q;B}$ la matrice de Q dans la base B. On appelle rang de Q, notée $rg(Q)$, le rang de la matrice $M_{Q;B}$.

2) On appelle noyau de Q le sous-espace vectoriel de E :

$$ker(Q) = \{x \in E / \forall y \in E, f(x;y) = 0\};$$

où f est la forme bilinéaire de Q.

Remarque 4.7.2. Le rang de Q ne dépend pas de la base choisie et le noyau de Q est celui de sa matrice relativement à n'importe quelle base.

4.8 Forme quadratique non dégénérée

Définition 4.8.1. Soit $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de forme polaire f. On dit que :

1) Q est non dégénérée si f est non dégénérée, c'est-à-dire

$$(\forall y \in E, f(x,y) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

2) Q est positive si et seulement si f est positive ; c'est-à-dire $\forall x \in E, Q(x) \geq 0$.

3) Q est définie positive si et seulement si f est aussi définie positive ; c'est-à-dire $\forall x \in E \backslash 0, Q(x) > 0$.

La proposition suivante donne des conditions nécessaire et suffisantes pour qu'une forme quadratique soit non dégénérée.

Proposition 4.8.2. Soit Q une forme quadratique de E. Considérons une base B de E. Les assertions suivantes sont équivalents : a) Q est non dégénérée ; b) $ker(Q) = \{0\}$; c) La matrice de Q dans la base B est inversible.

4.9 Signature d'une forme quadratique

Théorème 4.9.1. Soit Q une forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel réel E de dimension n. Il existe une base de E dans laquelle Q s'écrit :

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

De plus p et $p' = r - p$ ne dépendent que de Q et non pas de la base choisie.

Définition 4.9.2. Le couple (p, p'), qui est formé par le nombre de carrés précédés du signe $+$ et le nombre de carrés précédés du signe $-$ s'appelle la signature de la forme quadratique Q à coefficient réels et le rang de Q vaut $p + p'$.

Corollaire 4.9.3. Soit une forme quadratique Q à coefficients réels de signature $s = (p, p')$ dans un espace vectoriel de dimension n. On a les propriétés suivantes :
♦ $p + p' = n \Longleftrightarrow Q$ est non dégénérée.
♦ $p' = 0 \Longleftrightarrow Q$ est positive.
♦ $p = 0 \Longleftrightarrow Q$ est négative.
♦ $s = (n, 0) \Longleftrightarrow Q$ est définie positive.
♦ $s = (0, n) \Longleftrightarrow Q$ est définie négative.

4.10 Orthogonalité et base orthogonale

Définition 4.10.1. Soit f une forme bilinéaire sur E. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux (relativement à f), si $f(x,y) = 0$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle orthogonal de F (relativement à f), et on note $F^{\perp}$, l'ensemble des y de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de F. Il est immédiat que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 4.10.2. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f une forme bilinéaire sur E, éventuellement non dégénérée. Les conditions suivantes sont équivalentes :
a) $F^{\perp} \cap F = \{0\}$;
b) $E = F + F^{\perp}$;
c) La restriction de f à F est non dégénérée.

Définition 4.10.3. Un vecteur x de E est dit isotrope, s'il est orthogonal à lui-même.

Définition 4.10.4. Soit Q une forme quadratique sur E de dimension finie n, et soit f sa forme polaire. Une base $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de E est dite orthogonale pour Q quand $f(e_i, e_j) = 0$ pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$. Autrement dit, une base est orthogonale pour Q quand la matrice de Q dans cette base est diagonale.

Théorème 4.10.5. Toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie admet des bases orthogonales.

4.11 Méthode de Gauss pour diagonaliser une forme quadratique

Il s'agit d'un algorithme permettant de trouver une décomposition d'une forme quadratique en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Les identités suivantes sont les outils essentiels de cet algorithme.
(i) $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2$; (ii) $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$.
La preuve est basée sur une démonstration par récurrence sur la dimension n de E.

a) Si $n = 1$, il n'y a rien à dire.

b) Si $n > 1$. Supposons que toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-1$ admet une décomposition en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension n. Si $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base de E et x un élément de E, $Q(x)$ s'écrit :

$$Q(x) = \sum_{1 \le i \le n} \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij} x_i y_j$$

Premier cas : il existe au moins un indice i pour lequel $a_{ii} \neq 0$. On dit usuellement qu'il existe un terme carré. Par exemple supposons $a_{11} \neq 0$. Alors $Q(x)$ peut être ordonnée comme un polynôme du second degré en x_1. Cela donne $Q(x) = a_{11}x_1^2 + x_1 A(x_2, x_3, \cdots, x_n) + C(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ où A est une expression polynômiale homogène de degré 1 par rapport à $(x_2, x_3, \cdots, x_n)$, donc une forme linéaire en

$(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ et C une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport à $(x_2, x_3, \cdots, x_n)$, donc une forme quadratique en $(x_2, x_3, \cdots, x_n)$. En utilisant l'identité (i) il vient :

$$Q(x) = a_{11}[x_1 + \frac{1}{2a_{11}} A(x_2, x_3, \cdots, x_n)]^2 - \frac{1}{4a_{11}}[A(x_2, x_3, \cdots, x_n)]^2 + C(x_2, x_3, \cdots, x_n).$$

D'où,

$$Q(x) = a_{11}[x_1 + \frac{1}{2a_{11}} A(x_2, x_3, \cdots, x_n)]^2 + [C(x_2, x_3, \cdots, x_n) - \frac{1}{4a_{11}}[A(x_2, x_3, \cdots, x_n)]^2].$$

L'expression $C(x_2, x_3, \cdots, x_n) - \frac{1}{4a_{11}}[A(x_2, x_3, \cdots, x_n)]^2$ est une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport à $(x_2, x_3, \cdots, x_n)$, qui peut donc être considérée comme une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$. cela permet d'écrire

$$Q(x) = a_{11}[x_1 + \frac{1}{2a_{11}} A(x_2, x_3, \cdots, x_n)]^2 + Q_1(x_2, x_3, \cdots, x_n).$$

On termine en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q_1.

Second cas : il n'existe pas d'indice i pour lequel $a_{ii} \neq 0$. Si Q est nulle c'est fini, sinon au moins un $a_{ij} \neq 0$. (avec $i \neq j$). On dit usuellement que $a_{ij}x_ix_j$ est un terme rectangle. Par exemple supposons $a_{12} \neq 0$.

Alors, $Q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1A(x_3, \cdots, x_n) + x_2C(x_3, \cdots, x_n) + D(x_3, \cdots, x_n)$, où A et C sont des formes linéaires en $(x_3, \cdots, x_n)$ et D une forme quadratique en $(x_3, \cdots, x_n)$. Alors, on peut écrire :

$$Q(x) = a_{12}[x_1 + \frac{1}{a_{12}} C(x_3, \cdots, x_n)][x_2 + \frac{1}{a_{12}} A(x_3, \cdots, x_n)] + D(x_3, \cdots, x_n) - \frac{1}{a_{12}} A(x_3, \cdots, x_n) \times$$

$C(x_3, \cdots, x_n)$. Autrement dit :

$$Q(x) = a_{12}\alpha_1(x_1, x_3, \cdots, x_n)\alpha_2(x_2, x_3, \cdots, x_n) + Q_2(x_3, \cdots, x_n).$$

où α_1 et α_2 sont des formes linéaires en $(x_1, x_3, \cdots, x_n)$ et $(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ respectivement et Q_2 une forme quadratique en $(x_3, \cdots, x_n)$.

En utilisant l'identité (ii), il vient :

$$Q(x) = \frac{a_{12}}{4}[(\alpha_1(x_1, x_3, \cdots, x_n) + \alpha_2(x_2, x_3, \cdots, x_n))^2 - (\alpha_1(x_1, x_3, \cdots, x_n) - \alpha_2(x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

$Q_2(x_3, \cdots, x_n)$. On termine en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q_2.

Exemple 4.11.1. Appliquons la méthode à la forme quadratique suivante :

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 6x_3x_4.$$

comme Q contient un carré, on commence donc par appliquer le premier cas.

$$\begin{aligned} Q(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2 + 2x_1(-x_3+x_4) + x_3^2 + x_4^2 - 4x_2x_3 - 6x_3x_4 \\ &= (x_1 - x_3 + x_4)^2 - (-x_3+x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_2x_3 - 6x_3x_4 \\ &= (x_1 - x_3 + x_4)^2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_4 \end{aligned}$$

On obtient $Q_1(x_2,x_3,x_4) = -4x_2x_3 - 4x_3x_4$, qui ne contient pas de carré. On applique donc la méthode du second cas.

$$\begin{aligned} Q_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= -4x_2x_3 - 4x_3x_4 \\ &= -4(x_2+x_4)(x_3) \\ &= -(x_2+x_3+x_4)^2 + (x_2-x_3+x_4)^2 \end{aligned}$$

Le procédé est donc terminé et on obtient :

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_3 + x_4)^2 - (x_2+x_3+x_4)^2 + (x_2-x_3+x_4)^2$$

par suite, $sign(Q) = (2,1)$, $rang(Q) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$. Donc Q est non dégénérée.