

Analyse 1, Série 1 : Nombres Réels

Exercice 1

Soient x et y deux réels. Montrer que :

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 2

$E(x)$ désigne la partie entière du réel x . Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = -1$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

Exercice 3

Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants :

1. $\mathbb{N}; [0, 1] \cap \mathbb{Q};]0, 1[\cap \mathbb{Q}$
2. $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $C = \{x - y \mid x \in]2, 9[, y \in]-1, 10[\}$

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On note :

$$-A = \{-a \mid a \in A\}; \quad A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}; \quad x + A = \{x + a \mid a \in A\}$$
$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

1. Montrer que : $\sup(-A) = -\inf(A)$, $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$, $\sup(x + A) = x + \sup(A)$.
2. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) * \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

Exercice 5

1. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, montrer que

$$\inf\{1 + \frac{1}{4n^2}, n \in \mathbb{N}^*\} = 1$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1$.
3. Soit $(a, b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.
4. Démontrer que pour tout réel x , $E(x) + E(x + \frac{1}{2}) = E(2x)$.

Ex 1 :

Soit x, y des réels

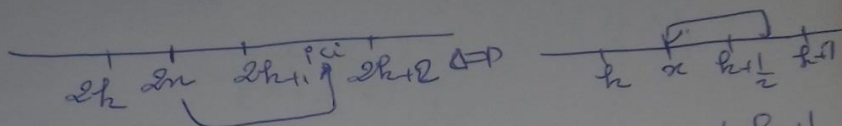
Démontrer que $E(x) + E(x+y) + E(y) \leq E(2x) + E(2y)$

Solution :

Posons $E(x) = k$ et $E(y) = l$

$E(x) = k \leq x < k+1$ et $l \leq y < l+1$

$2k \leq 2x < 2k+2$ et $2l \leq 2y < 2l+2$



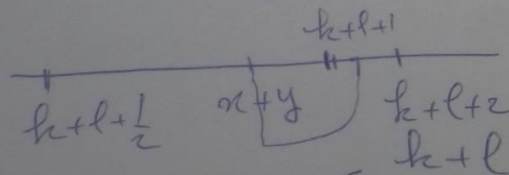
• 1^{er} cas Si $2k \leq 2x < 2k+1 \Leftrightarrow k \leq x < k+\frac{1}{2}$
et $2l \leq 2y < 2l+1 \Leftrightarrow l \leq y < l+\frac{1}{2}$

Alors $k+l \leq x+y < k+l+1$ c à d $E(x+y) = k+l$

et par suite $E(x) + E(x+y) + E(y) = 2k+2l = E(2x) + E(2y)$

• 2^{ème} cas : si $k \leq x < k+\frac{1}{2}$ et $l+\frac{1}{2} \leq y < l+1$

donc $k+l+\frac{1}{2} \leq x+y < k+l+\frac{3}{2}$



donc $E(x+y) = k+l+1$

d'où

$$E(x) + E(n+y) + E(y) = \begin{cases} 2k+2l \\ \text{ou bien} \\ 2k+2l+1 \end{cases}$$

or $E(2n) = 2k$ et $E(2y) = 2l+1$

d'où $E(x) + E(n+y) + E(y) \leq E(2n) + E(2y)$

^{ème} 3 cas: si $k+\frac{1}{2} \leq x < k+1$ et $l \leq y < l+\frac{1}{2}$

d'où $E(2n) = 2k+1$ et $E(2y) = 2l$

et $k+\frac{1}{2} \leq x+y < k+l+\frac{3}{2}$

donc $E(x+y) = \begin{cases} l+k \\ \text{ou bien} \\ l+k+1 \end{cases}$

$$E(x) + E(n+y) + E(y) = \begin{cases} 2l+2k \\ \text{ou bien} \\ 2l+2k+1 \end{cases}$$

c ad

$$E(x) + E(n+y) + E(y) \leq E(2n) + E(2y)$$

^{ème} 4 cas: si $k+\frac{1}{2} \leq x < k+1$ et $l+\frac{1}{2} \leq y < l+1$

$$k+l+1 \leq x+y < k+l+2$$

$$E(x+y) = k+l+1, \quad E(2n) = 2k+1, \quad E(2y) = 2l+1$$

$$E(x) + E(n+y) + E(y) = 2k+2l+1 \leq E(2n) + E(2y)$$

c l c: $\forall n, y \quad E(x) + E(n+y) + E(y) \leq E(2n) + E(2y)$

Ex Soient x et y deux réels
tels que $x+y \in \mathbb{Z}$, $x \notin \mathbb{Z}$ et $y \notin \mathbb{Z}$

Montrer que :

$$E(x) + E(y) = x + y - 1.$$

Solution :

on a $x \notin \mathbb{Z}$ et $y \notin \mathbb{Z}$ mais $x+y \in \mathbb{Z}$

donc $E(x+y) = n \in \mathbb{Z}$ et $E(n) \neq n$, $E(y) \neq y$

or $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $E(y) \leq y < E(y)+1$

$$\Downarrow$$

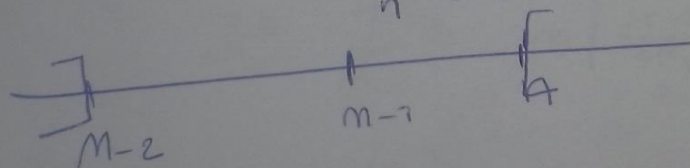
$$x-1 < E(x) < x \text{ et } y-1 < E(y) < y$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\oplus}$$

on obtient

$$\underbrace{x+y-2}_{\substack{\underbrace{\hspace{1em}}_n - 2}} < E(x) + E(y) < \underbrace{x+y}_n$$

$\in \mathbb{Z}$



$$\text{donc } E(x) + E(y) = x + y - 1$$

E1

$$A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Déterminer $\inf(A)$ et $\sup(A)$.

On a pour $n=1$, $\frac{2^1}{2^1-1} = 2 \in A$, donc A est non vide

d'autre part $\forall n \geq 1$, on a $2^{n-1} < 2^n$

donc $1 < \frac{2^n}{2^n-1}$ ①

or $\forall n \geq 1$

$$2 \leq 2^n \Leftrightarrow -2^n \leq -2$$

$$\Leftrightarrow (1-2)2^n \leq -2$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 2^{n+1} \leq -2$$

$$\Leftrightarrow 2^n \leq 2^{n+1} - 2$$

$$\Leftrightarrow 2^n \leq 2(2^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^n}{2^n-1} \leq 2$$

$$\text{dc } \forall n \geq 1 \quad 1 < \frac{2^n}{2^n-1} \leq 2$$

on en déduit que, A admet une borne inférieure et une borne supérieure et que :

$$\underline{\sup(A) \leq 2 \text{ et } \inf(A) \geq 1}$$

or 2 est un majorant atteint (pour $n=1$).

donc $2 = \max(A)$, Ainsi $\sup(A) = 2$.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$, donc A n'admet pas le plus petit élément et $\inf(A) = 1$.

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1 \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \forall n > N.$$

$$\left| \frac{2^n}{2^n - 1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{2^n}{2^n - 1} < 1 + \varepsilon$$

$$\text{d'où } \inf(A) = 1.$$

Ex 2 :

(3)

Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$
on note

$$B = \{ |x-y|, (x,y) \in A^2 \}$$

- 1) justifier que B est majoré
- 2) on note $\sup(B)$ la borne supérieure de cet ensemble (B).

Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$

Solution

1) Soient $(x,y) \in A^2$

or A est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tq

$$\forall x \in A \quad |x| \leq M.$$

~~par~~ et comme $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 2M$

ce qui prouve que B est majoré.

2) Posons $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, Alors on a :

$$m \leq x \leq M \text{ et } -M \leq -y \leq -m.$$

$$\text{donc } m-M \leq x-y \leq M-m$$

$$\text{Càd } -(M-m) \leq x-y \leq M-m \quad (4)$$

$$\text{d'où } |x-y| \leq M-m$$

on en déduit donc que $M-m$ est un majorant de B et que $\sup(B) \leq M-m$

• Soit $\varepsilon > 0$,

Pour montrer l'autre inégalité, on construit un élément $b \in B$ tel que $b > M-m-\varepsilon$
 Pour cela, on sait qu'il existe $(x, y) \in A^2$

$$\text{tel que } x \geq M - \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } y \leq m + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Alors } x-y \geq M-m-\varepsilon = \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$$

$$\text{dc: } \sup(B) = \sup(A) - \inf(A).$$

Rap:

$$\begin{aligned} & A \text{ non vide et majorée de } \mathbb{R} \\ \sup A = M & \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \text{ alors } x \leq \sup(A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \sup(A) - \varepsilon < x. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A \text{ minorée} \\ \inf(A) = m & \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \text{ alors } x \geq \inf(A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \inf(A) + \varepsilon > x \end{cases} \end{aligned}$$