Faculté des Sciences et Techniques - Mohammedia
Université Hassan II de Casablanca

ANNÉE UNIVERSITAIRE
2019-2020

MIP1 : M111

UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Série 3

Exercice 1

1. *Montrer que pour tout* $0 < \epsilon < 1$, *et pour* $x \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{4} \quad \Rightarrow \quad |x^2+x-2| < \epsilon$$

2. *En déduire, en utilisant la définition de la limite,*

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x-1) \quad et \quad \lim_{x\to 1}(x^2+x-2)cosx$$

Exercice 2

Calculer, lorsqu'elle existent, les limites suivantes :

$a)\ \lim_{x\to 0^+} xE(x-\frac{1}{x})$ $\quad b)\ \lim_{x\to +\infty} xE(\frac{1}{x})$ $\quad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$ $\quad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{sinx-\frac{1}{2}sin2x}{x^3}$

$e)\ \lim_{x\to 1} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ $\quad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{xsinx}{1-cosx}$ $\quad g)\ \lim_{x\to 0} \frac{xtanx}{cos^2x-1}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 0} \frac{tanx-sinx}{sin^3(\frac{x}{2})}$

Exercice 3

1. *Trouver les couples* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que la fonction* f *soit continue sur* $\mathbb{R}$ *dans les cas suivants :*

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x=0 \\ e^{bx}-x & si \quad x>0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} ax+b & si \quad x<0 \\ e^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4 *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue. Montrer que la fonction* $f(x) = x$ *admet une solution sur* $\alpha \in [0,1]$.

Exercice 5 *Etudier la dérivabilité sur* $\mathbb{R}$ *des fonctions suivantes :*

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 6 *Prolonger par continuité en* 0 *et étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sqrt{x}lnx, \quad g(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 7 *Soit f la fonction réelle définie par*

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & e^x & si\ x<0, \\ f(x) & = & 1 & si\ x=0, \\ f(x) & = & -x^2+x+1 & si\ 0<x\leq 1, \\ f(x) & = & \dfrac{1-x}{x} & si\ x>1. \end{array}$$

1. *Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'(c) = \frac{e-1}{2e}$, et déterminer les valeurs possibles de c.*

Exercice 8 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On pose*

$$\phi(x) = (f(b)-f(a))x^3 - (b^3-a^3)f(x)$$

Calculer $\phi(a)$ et $\phi(b)$ et montrer qu'il existe $c \in]a,b[$, tel que

$$3c^2(f(b)-f(a)) = (b^3-a^3)f'(c)$$

Exercice 9 *Montrer que :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |sinx| \leq |x|,$
2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 1-cosx \leq xsinx,$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1+x.$

Exercice 10

1. *Soit $\alpha \in]0,1[$,*
   (a) *montrer que pour tout entier naturel n on a*

   $$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

   (b) *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.*
2. *Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = lnx$ sur $[n, n+1]$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.*

Solution : Série 3 (Exo 1, 2 et 3)

TD3 : Fonction d'une variable réelle.

Exercice 1

1) Soit $0<\varepsilon<1$ et soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$.

Montrons que $|x^2+x-2|<\varepsilon$.

On a $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

$|x^2+x-2| = |x+2||x-1|$

On a $|x-1|<\frac{\varepsilon}{4} \iff -\frac{\varepsilon}{4}+1<x<\frac{\varepsilon}{4}+1$

$\iff -\frac{\varepsilon}{4}+3<x+2<\frac{\varepsilon}{4}+3$

$-\frac{1}{4}+3<x+2<\frac{1}{4}+3$

$2<x+2<4$

Donc si $|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$ alors $|x^2+x-2|<\frac{\varepsilon}{4}\times 4$

2) D'après 1) on a

$\forall\varepsilon>0$, pour $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ on a $|x-1|<\delta \Rightarrow |x^2+x-1-1|<\varepsilon$

donc $\boxed{\lim_{x\to 1} x^2+x-1 = 1}$.

et $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ tel que $|x-1|<\delta \Rightarrow |(x^2+x-2)\cos x|<|x^2+x-2|<\varepsilon$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\cos x = 0}$.

Exercice 2

On a x-(1/x)-1< E(x-1/x)≤x-(1/x) donc x^2-1-x< xE(x-1/x)≤x^2-1

D'après le T . G, lim xE(x-1/x)=-1 quand x tend vers 0+

$$\lim_{x\to+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right) ?$$

$\forall x \geq 1$ on a $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $E\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et $xE\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to1} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{|x||x-1|}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} x = 1$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} -|x| = -1$$

Donc $\lim_{x\to1} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ n'existe pas.

$$\lim_{x\to0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{x^2 \cdot \frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}$$

$$= 1 \times 2$$

$$= 2.$$

k) $\dfrac{x\tan x}{\cos^2 x-1}=\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{x^2}{\cos x-1}\times\dfrac{1}{\cos x(\cos x+1)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{\cos^2 x-1}=1\times 2\times\dfrac{1}{2}=1.$

l) $\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{\sin x\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{8\times\left(\frac{x}{2}\right)^3}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{1\times\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{8}}=4.$

Exercice 3:

1) $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ e^x & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$

Les fcts $x\mapsto ax+b$ et $x\mapsto e^x$ sont continues (resp.) sur $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$.

× f est continue 0 ssi $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

$b=1=f(0)$

Donc $f(x)=\begin{cases} ax+1 & \text{si } x<0 \\ e^x & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$

est continue sur $\mathbb{R}$ $(\forall a\in\mathbb{R})$.

2) on a lim sin(ax)/x=a, or f est continue sur IR, donc a=1 et comme lim exp(bx)-x=1, pour tout b,

Alors f est continue sur IR pour tout b dans IR et a=1.

Solution : Série 3 (Exo 4, 5,6 et 7)

Exercice 4 *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue. Montrer que la fonction* $f(x) = x$ *admet une solution sur* $\alpha \in [0,1]$.

On pose g(x)=f(x)-x, on a g(0)=f(0)-0≥0 car 0≤f(x)≤1

On a g(1)=f(1)-1≤0

1. Si g(0)=0, alors x=0
2. Si g(1)=0, alors x=1
3. Sinon, g(0)≠0 et g(1) ≠0 alors

On a g(0)g(1)<0 et g est une fonction continue sur[0 1], d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un x dans]0, 1[tel que g(x)=0. C'est-à-dire f(x)=x admet une solution sur]0, 1[.

Conclusion f(x)=x admet une solution sur [0 1].

Exercice 5 *Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :*

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Les fonctions f, g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
- Dérivabilité en 0

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 = f'_d(0)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 = f'_g(0)$

comme $f'_d(0) = f'_g(0)$, alors f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 = g'_d(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 = g'_g(0)$

Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 1$.

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{1+x} = -1 = h'_d(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 = h'_g(0)$

$h'_g(0) \neq h'_d(0) \Rightarrow h$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6 *Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sqrt{x} ln x, \qquad g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}.$$

$$f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$$

* $D_f =]0, +\infty[$. f est continue sur $]0, +\infty[$.

* $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln((\sqrt{x})^2)$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2 \sqrt{x} \ln(\sqrt{x})$

$= 0$

Donc f admet un prolongement par continuité en 0, $\tilde{f}$ défini par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} \ln x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} 2 \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

$= -\infty$

Donc $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0.

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$$

* $D_g =]0, +\infty[$, g est continue sur $]0, +\infty[$.

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \cdot \dfrac{e^x - 1}{x} = 0$

Donc g est prolongeable par continuité en 0 et on a :

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{e^x - 1}{x}$

$= +\infty$

Donc $\tilde{g}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7 *Soit f la fonction réelle définie par*

$$
\begin{array}{lcll}
f(x) & = & e^x & si\ x < 0, \\
f(x) & = & 1 & si\ x = 0, \\
f(x) & = & -x^2 + x + 1 & si\ 0 < x \leq 1, \\
f(x) & = & \dfrac{1-x}{x} & si\ x > 1.
\end{array}
$$

1. *Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = \frac{e-1}{2e}$, et déterminer les valeurs possibles de c.*

Exercice 7:

$$
f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x^2+x+1, & 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1-x}{x}, & x > 1 \end{cases}
$$

1.- f est continue sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

* Continuité en 0: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1 = f(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x^2+x+1 = 1 = f(0)$

Donc f est continue en 0.

* Continuité en 1: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1-x}{x} = 0$ et $f(1) = 1$

Donc f n'est pas continue en 1.

- f est dérivable sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

f n'est pas dérivable en 1 puisqu'elle n'est pas continue, (en 1).

* Dérivabilité en 0:

pour $x > 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{-x^2+x+1-1}{x} = -x+1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'_d(0)$

Pour $x < 0$: $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^x - 1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x} = (e^x)'(0) = 1 = f'_g(0)$

comme $f'_d(0) = f'_g(0)$, alors f est dérivable en 0.

2- * f est continue sur $[-1,1]$ (f est continue à gauche en 1)

* f est dérivable sur $]-1,1[$.

Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]-1,1[$ qui vérifie :

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)}$$

$f(1) = 1$ et $f(-1) = \frac{1}{e}$

donc $\boxed{f'(c) = \frac{e-1}{2e}}$

* Déterminons les valeurs de c :

– si $c \in]-1,0]$ on a $f'(c) = \frac{e-1}{2e} \iff e^c = \frac{e-1}{2e}$

$\iff c = \ln\left(\frac{e-1}{2e}\right)$

$2 < e < 3 \iff 1 < e-1 < 2 \iff \frac{1}{2e} < \frac{e-1}{2e} < \frac{1}{e}$

donc $\ln\left(\frac{e-1}{2e}\right) < -1$

Ainsi, cette valeur $\left(\ln\left(\frac{e-1}{2e}\right)\right)$ ne convient pas.

– si $c \in [0,1[$, on a $f'(c) = \frac{e-1}{2e} \iff -2c+1 = \frac{e-1}{2e}$

$\iff -2c = \frac{-1-e}{2e}$

$\iff c = \frac{1+e}{4e}$

$2 < e < 3 \iff 3 < e+1 < 4$

$0 < \frac{3}{4e} < \frac{1+e}{4e} < \frac{1}{e} < 1$

La valeur $c = \frac{1+e}{4e}$ convient.

Solution : Série 3 (Exo 8, 9 et 10)

Exercice 8 : $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = (f(b) - f(a))x^3 - (b^3 - a^3)f(x)$$

* $\left.\begin{array}{l} \phi(a) = f(b)a^3 - b^3 f(a) \\ \phi(b) = -f(a)b^3 + a^3 f(b) \end{array}\right\} \phi(a) = \phi(b).$

* f étant continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors ϕ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

En plus $\phi(a) = \phi(b)$.

Donc, d'après le th de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ qui vérifie $\phi'(c) = 0$

Or $\phi'(x) = 2(f(b) - f(a))x^2 - (b^3 - a^3)f'(c)$

$\phi'(c) = 0 \iff 2c^2(f(b) - f(a)) = (b^3 - a^3)f'(c)$

Ex 9 :

1) Mq $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$

On pose $f(x) = \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \cos x$,

or $|\cos x| \leq 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis. $(M=1)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $|\sin x - \sin y| \leq 1|x - y|$

pour $y = 0$: $|\sin x| \leq |x|$

2) Mq $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \cos x \leq x \sin x$

- pour $x = 0$, $1 - \cos 0 = 0 \leq 0$ vraie
- soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on considère $f(x) = \cos x$
  - f est continue sur $]0, x]$
  - f est dérivable sur $]0, x[$

  d'après le th A.F il existe $c \in]0, x[$

  tq : $f(x) - f(0) = (x - 0) f'(c)$

  $= x(-\sin c)$

  c à d $\cos x - 1 = -x \sin c$

  donc $\frac{1 - \cos x}{x} = \sin c$

comme $x \longmapsto \sin x$ est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

d'où $\sin c \leq \sin x$

c à d $\forall x \in]0 \; \frac{\pi}{2}]$, $\frac{1 - \cos x}{x} \leq \sin x$

c à d

$1 - \cos x \leq x \sin x$

clc : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \cos x \leq x \sin x$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$

on pose $g(x) = e^x - 1 - x$

$g'(x) = e^x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff x = 0$

$\lim\limits_{-\infty} g(x) = \lim\limits_{-\infty} e^x - 1 - x = +\infty$ (car $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} e^x - 1 - x = +\infty$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1\right)$ $\left(\lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\right)$

Ex 10 : 1) On pose $f(t)=t^{\alpha}$ $\quad \alpha \in]0,1[$

a) $f'(t)=\alpha t^{\alpha-1} = \alpha \cdot \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ $\quad (1-\alpha>0)$

- $f(t)=t^{\alpha}$ continue sur chaque $[n, n+1]$ $n>0$
- $f(t)=t^{\alpha}$ dérivable // // $]n, n+1[$

d'après T.A.F, il existe $c \in]n, n+1[$ tq

$$(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} = \alpha \cdot \frac{1}{c^{1-\alpha}}$$

Or $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{n}$

d'où $\dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} < \dfrac{\alpha}{c^{1-\alpha}} < \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$

càd

$$\forall n>0, \ \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} < (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} < \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

b) • pour $n=1$: $\frac{\alpha}{2^{1-\alpha}} < 2^{\alpha} - 1^{\alpha} < \frac{\alpha}{1^{1-\alpha}}$

$+$ $n=2$: $\frac{\alpha}{3^{1-\alpha}} < 3^{\alpha} - 2^{\alpha} < \frac{\alpha}{2^{1-\alpha}}$

$+$ $\vdots$

$+$ $\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} < n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha} < \frac{\alpha}{(n-1)^{1-\alpha}}$

$$\alpha\left(\frac{1}{2^{1-\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) < n^{\alpha} - 1^{\alpha} < \alpha\cdot\left(\frac{1}{1^{1-\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{1-\alpha}}\right)$$

$$\alpha\left(\frac{1}{1^{1-\alpha}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{1^{1-\alpha}}\right) < n^{\alpha} - 1 < \alpha\left(\frac{1}{1^{1-\alpha}} + \cdots \frac{1}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

$$\alpha \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{1} < n^{\alpha} - 1 < \alpha \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

d'où $\frac{n^{\alpha}-1}{\alpha} + \frac{1}{n^{1-\alpha}} < \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} < \frac{n^{\alpha}-1}{\alpha} + 1$

d'où $\lim_{+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} = +\infty$ (car $\lim_{+\infty} n^{\alpha} = +\infty$

On a : $\alpha \in]0,1[\iff 0 < \alpha < 1 \iff -1 < -\alpha < 0$

$\iff 0 < 1-\alpha < 1$