

Série 4

Exercice 1

Montrer que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $sh(x) \geq x$,
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 2

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) & 2) g(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \\ 3) h(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right) & 4) k(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \end{array}$$

Exercice 3 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} x \mapsto th(1+x^2) & x \mapsto \ln(ch(x)) \\ x \mapsto \operatorname{argch}(exp(x)) & x \mapsto \operatorname{argth}(cos(x)) \end{array}$$

Exercice 4 Déterminer le domaine de définition de la fonction f , puis simplifier son expression lorsqu'elle a un sens

$$f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Exercice 5 1. Calculer $\cos(\arctan(x))$, $\cos(\arcsin(x))$ et $\tan(\arcsin(x))$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$

- (a) Si $x > 0$, alors $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$,
- (b) Si $x < 0$, alors $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6 Examen 2016

1. Comment la fonction $g : x \mapsto \operatorname{argsh}x$ est-elle définie ? Déterminer, en justifiant son domaine de dérivabilité, l'expression de sa dérivée.
2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{ch(x)-1}{2}}\right)$$

- (a) Donner les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f .
- (b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- (c) Montrer que

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0, \\ f(x) = -\frac{x}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Série 4

Exercice 1

Montrer que

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $sh(x) \geq x$,
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Dém

1) on pose $f(x) = sh(x) - x$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = ch(x) - 1$$

et comme $ch(x) \geq 1$, donc f est croissante

d'où $\forall x \geq 0$ on a $f(x) \geq f(0) = 0$, donc $sh(x) - x \geq 0$

c'est-à-dire

$$\forall x \geq 0, sh(x) \geq x.$$

2) on pose $g(x) = ch(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = sh(x) - x$$

— Si $x \geq 0$, d'après la question 1 on a $sh(x) - x \geq 0$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$
d'où

$$g(x) \geq g(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall x \geq 0, ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2},$$

— Si $x < 0$, on remarque que $g(x)$ est une fonction paire, donc $g(x) = g(-x) \geq 0$
c'est-à-dire

$$\forall x < 0, ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2},$$

Clc : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 2

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = \operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ | 2) $g(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ |
| 3) $h(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)$ | 4) $k(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ |

Exercice 1

1) $f(x) = \operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$;

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \right\}$;
 $=]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$

x	-1	1
$x-1$	-	+
$x+1$	-	+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	+

2) $g(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \neq 0 \text{ et } \frac{2x}{1-x^2} \geq 1 \right\}$

$\frac{2x}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2+2x-1}{1-x^2}$; $x^2+2x-1: \Delta = 4+4=8$
 $x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2}$; $x_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	$-1+\sqrt{2}$	1	$+\infty$
x^2+2x-1	+	0	-	0	+	+
$1-x^2$	-	-	0	+	0	-
$\frac{x^2+2x-1}{1-x^2}$	-	0	+	0	+	-

Donc $D_g = [-1-\sqrt{2}, -1[\cup [-1+\sqrt{2}, 1[$

3) $h(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)$

$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{2x+1}{2x^2+2x+1} < 1 \right\}$

$\frac{2x+1}{2x^2+2x+1} - 1 = \frac{-2x^2}{2x^2+2x+1} \leq 0$ ($=0$ pour $x=0$)

$\frac{2x+1}{2x^2+2x+1} + 1 = \frac{2x^2+4x+2}{2x^2+2x+1} = \frac{2(x+1)^2}{2x^2+2x+1} \geq 0$ ($=0$ pour $x=-1$)

Donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

4) $K(x) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$D_K = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \right\}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{x^2}{1+x^2} < 1 \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow -1 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$

Donc $D_K = \mathbb{R}$.

Exercice 3 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \operatorname{th}(1+x^2) & x &\mapsto \ln(\operatorname{ch}(x)) \\ x &\mapsto \operatorname{argch}(\exp(x)) & x &\mapsto \operatorname{argth}(\cos(x)) \end{aligned}$$

Exercice 3: Calcul des dérivées.

* $f_1: x \mapsto \operatorname{th}(1+x^2)$, $D_{f_1} = \mathbb{R}$, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (1+x^2)' \operatorname{th}'(1+x^2) \\ &= 2x (1 - \operatorname{th}^2(1+x^2)) = \frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1+x^2)}. \end{aligned}$$

* $f_2: x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$, $\operatorname{ch}: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$, $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $D_{f_2} = \mathbb{R}$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) = \frac{\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x).$$

$f_3: x \mapsto \operatorname{argch}(\exp(x))$
 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, $\operatorname{argch}: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$

$D_{f_3} = \mathbb{R}^+$, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, f_3'(x) &= \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(\exp(x)))} \times \exp'(x) \\ &= \frac{\exp(x)}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(\exp(x)))} \\ &= \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x) - 1}} \end{aligned}$$

$f_4: x \mapsto \operatorname{argth}(\cos(x))$.
 $\cos: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$, $\operatorname{argth}:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

f_4 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et on a:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}, f_4'(x) &= \frac{\cos'(x)}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(\cos(x)))} \\ &= \frac{-\sin x}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(\cos(x)))} \\ &= \frac{-\sin x}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{-\sin x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Exercice 4 Déterminer le domaine de définition de la fonction f , puis simplifier son expression lorsqu'elle a un sens

$$f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Exercice 4 $f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$

* $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\right\}$
 $= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1\right\}$
 $= \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{x^2+1}{x} \geq 2\right\}$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x$
 si $x > 0$ on a $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$
 si $x < 0$ on a $\frac{x^2+1}{x} \leq 2$

donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$

* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}))$
 $f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$
 $= \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right)$
 $= \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{4}{4}}\right)$
 $= \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}\right)$
 $= \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{x}\right|\right)$

- Si $x \geq 1$ alors $x^2 \geq 1$ et $x \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{x}\right| = x - \frac{1}{x}$
 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \ln x$.

- Si $0 < x \leq 1$ alors $x^2 \leq 1$ et $x \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{x}\right| = -x + \frac{1}{x}$
 $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = -\ln x$

$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = |\ln x|$

Exercice 5 1. Calculer $\cos(\arctan(x))$, $\cos(\arcsin(x))$ et $\tan(\arcsin(x))$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$

(a) Si $x > 0$, alors $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$,

(b) Si $x < 0$, alors $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5

1) * $\cos(\arctan x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$

$$1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2$$

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Comme $x \mapsto \arctan x$ est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
donc $\cos(\arctan x) \geq 0$

Ainsi $\boxed{\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\forall x \in \mathbb{R})}$

* $\cos(\arcsin x)$

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$= 1 - x^2$$

donc $\boxed{\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad , \quad \forall x \in [-1, 1]}$

* $\tan(\arcsin x)$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sin^2(\arcsin x) = x^2$$

$$1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$$

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$$

$$1 + \tan^2(\arcsin x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\tan^2(\arcsin x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\pm x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

posons $g: x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

$$D_g =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

g est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Donc $g \stackrel{=0}{\text{est constante sur chacun des 2 intervalles}}$

$$\text{càd } g(x) = C_1 \text{ sur }]-\infty, 0[$$

$$\text{et } g(x) = C_2 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{Or } g(1) &= C_1 = \arctan(-1) + \arctan(-1) \\ &= 2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} g(1) &= C_2 = \arctan(1) + \arctan(1) \\ &= 2 \times \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Finalement: } \begin{cases} \forall x > 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \\ \forall x < 0, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 6 *Examen 2016*

1. Comment la fonction $g : x \mapsto \operatorname{argsh} x$ est-elle définie ? Déterminer, en justifiant son domaine de dérivabilité, l'expression de sa dérivée.
2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{ch(x) - 1}{2}}\right)$$

- (a) Donner les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f .
- (b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- (c) Montrer que

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0, \\ f(x) = -\frac{x}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

①

1) Soit $g(x) = \operatorname{argsh}(x)$.

~~car~~ $\operatorname{sh} x$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque notée argsh .
cette fonction est définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$

$$\text{Donc } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{argsh} x$$

- $\operatorname{sh}'(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fct argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$
- on a $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(u)) = u \quad \forall u \in \mathbb{R}$
donc $\operatorname{argsh}'(u) \times \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(u)) = 1$
d'où $\operatorname{argsh}'(u) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(u))}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (*)$$

$$(*) \text{ on } \operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh}(u)) + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh}(u)) = 1$$

$$\text{donc } \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(u)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{car } \operatorname{ch}(x) \geq 1$$

2) soit $f(x) = \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$

a)

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\cosh(x)-1}{2} \geq 0 \right\}$$

puisque $\cosh(x) \geq 1$

donc $\frac{\cosh(x)-1}{2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d'où $D_f = \mathbb{R}$

~~on a~~ on a $x \mapsto \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{\cosh(x)-1}{2}$ " " "

donc $\operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} \right)$ " "

• on a : $x \mapsto \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$, est dérivable
sur $\mathbb{R}^*$ car $\cosh(x)-1$ s'annule en 0.

d'où le domaine de la dérivabilité
de f est $\mathbb{R}^*$

b). Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\operatorname{argsh} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cosh x - 1} \right) \right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{\cosh x - 1})' \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(\cosh x - 1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh x - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(\cosh x - 1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh x - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(\cosh x - 1)}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{2} \frac{\sinh(x)}{|\sinh(x)|}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c) on a $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

donc $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2}x + C_2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$