Faculté des Sciences et Techniques - Mohammedia
Université Hassan II de Casablanca

ANNÉE UNIVERSITAIRE
2019-2020

MIP1 : M111

UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Série 5

Exercice 1

En utilisant la formule de Taylor, calculer le $DL_3(0)$ de $arctanx$. Puis calculer le $DL_n(0)$ de la fonction f dans les cas ci-dessous :

$$(1+2arctanx)(2e^x-\sin x) \quad n=3\,; \quad f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}} \quad n=2$$
$$f(x)=\frac{2+arctanx}{chx}, \quad n=4\,; \quad f(x)=\frac{x}{e^x-1}, \quad n=3$$
$$f(x)=e^{\sqrt{2+cosx}}, \quad n=2\,; \quad f(x)=ln(\frac{ln(1+x)}{x}), \quad n=2$$

Exercice 2

Caluler le $DL_n(x_0)$ de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=cos(x), \quad x_0=\frac{\pi}{2}, \quad n=3$
2) $f(x)=ln(x), \quad x_0=3, \quad n=2$
3) $f(x)=\sqrt{2e-e^x}, \quad x_0=1, \quad n=2$
4) $f(x)=^4\sqrt{2-ln(x)}, \quad x_0=1, \quad n=2$

Exercice 3 *Calculer la limite en x_0 de la fonction f dans les cas suivants :*

1) $f(x)=\frac{x-arcsinx}{sin^3(x)}, \quad x_0=0$
2) $f(x)=(\frac{1-x}{1+x})^{\frac{1}{x}}, \quad x_0=0$
3) $f(x)=(\frac{shx}{sinx})^{\frac{1}{x^2}}, \quad x_0=0$

Exercice 4

Etudier à l'infini : asymptote à la courbe représentative de f, position par rapport à l'asymptote, les fonctions suivantes :

$$f(x)=x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$
$$f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x+1}}$$
$$f(x)=ln(e^{2x}-e^x+3e^{-3x}+1)$$

Solution TD5 (Développements limités)

Exo1

On a ;

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)}$$

où $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.
Et avec la notation « petit o » cela donne :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

	Arctan(0)=0
Arctan'(x)=$1/(1+x^2)$,	Arctan(0)=1
Arctan''(x)=-2x/$(1+x^2)$^2,	Arcant''(0)=0
Arctan'''(x) =($2x^2$-2) / $(1+x^2)$^3,	Arctan'''(0)=--2
Arcant(x) = x+o(x) n=1	
Arcant(x) = x+o(x^2) n=2	
Arcant(x) = x-x^3/3+o(x^3) n=3	
Arctan(x) = x-x^3/3+o(x^4) n=4	

$(1+2arctanx)(2e^x - \sin x) \quad n=3$

1. a) On part des *d.l.* de $\arctan x$, e^x et $\sin x$ à l'ordre 3 en zéro. On obtient

$$1 + 2\arctan x = 1 + 2x - \frac{2x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

et

$$2e^x - \sin x = \left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3) = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \circ(x^3)\,.$$

On effectue le produit en tronquant à l'ordre 3, ce qui donne

$$(1 + 2\arctan x)(2e^x - \sin x) = 2 + 5x + 3x^2 + \frac{7x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$

$$f(x) = \frac{2 + arctanx}{chx}, \quad n = 4\,; \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$$

c) Le dénominateur de la fraction ne s'annulant pas en zéro, on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4,

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
2 & +x & & -x^3/3 & & 1 & & +x^2/2 & & +x^4/24 \\
\cline{6-10}
-2 & & -x^2 & & -x^4/12 & 2 & +x & -x^2 & -5x^3/6 & +5x^4/12 \\
\cline{1-5}
 & x & -x^2 & -x^3/3 & -x^4/12 & & & & & \\
 & -x & & -x^3/2 & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & -x^2 & -5x^3/6 & -x^4/12 & & & & & \\
 & & x^2 & & +x^4/2 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & -5x^3/6 & +5x^4/12 & & & & & \\
 & & & 5x^3/6 & & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & +5x^4/12 & & & & & \\
 & & & & -5x^4/12 & & & & & \\
\cline{5-5}
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

ce qui donne

$$\frac{2 + \arctan x}{\operatorname{ch} x} = 2 + x - x^2 - \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{12} + \circ(x^4)\,.$$

$$f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} \quad n = 2$$

Rp

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

$$(1 + 2x)^{1/x} = e^{\left(\dfrac{\ln(1 + 2x)}{x}\right)}.$$

Puisque l'on divise par x, on part d'un *d.l.* de $\ln(1 + 2x)$ à l'ordre 3. On obtient

$$\ln(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

puis

$$e^{\left(\dfrac{\ln(1 + 2x)}{x}\right)} = e^{\left(2 - 2x + \dfrac{8x^2}{3} + \circ(x^2)\right)} = e^2\, e^{\left(-2x + \dfrac{8x^2}{3} + \circ(x^2)\right)}.$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x à l'ordre 2 en zéro.

$$e^{\left(\dfrac{\ln(1 + 2x)}{x}\right)} = e^2\left[1 + \left(-2x + \frac{8x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-2x + \frac{8x^2}{3}\right)^2\right] + \circ(x^2) = e^2\left(1 - 2x + \frac{14x^2}{3}\right) + \circ(x^2).$$

$$f(x) = e^{\sqrt{2+cosx}}, \quad n = 2$$

On a tout d'abord

$$2 + \cos x = 3 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2),$$

donc

$$\sqrt{2+\cos x} = \sqrt{3 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)^{1/2}.$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^m$ en zéro avec $m = 1/2$. On obtient

$$\sqrt{2+\cos x} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right) = \sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right).$$

$$e^{\sqrt{2+\cos x}} = e^{\sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right)} = e^{\sqrt{3}} e^{\left(-\frac{\sqrt{3}\,x^2}{12} + \circ(x^2)\right)}.$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x en zéro, d'où

$$e^{\sqrt{2+\cos x}} = e^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}\,x^2}{12}\right) + \circ(x^2).$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \quad n = 3$$

Le premier terme non nul du d.l. du dénominateur étant de degré 1, on part de l'ordre 4. On Obtient

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4),$$

et donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \circ(x^3)}.$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3,

$$
\begin{array}{rrrr|llll}
1 & & & & 1 & +x/2 & +x^2/6 & +x^3/24 \\ \cline{5-8}
-1 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & 1 & -x/2 & +x^2/12 & \\ \cline{1-4}
 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & & & & \\
 & x/2 & +x^2/4 & +x^3/12 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2/12 & +x^3/24 & & & & \\
 & & -x^2/12 & -x^3/24 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

ce qui donne

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \circ(x^3)\,.$$

$$f(x) = ln(\frac{ln(1+x)}{x}), \quad n = 2$$

Puisque l'on divise par x, on part d'un d.l. de ln(1 + x) à l'ordre 3. On obtient

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

donc

$$\ln\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)\,.$$

On utilise alors le *d.l.* à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$ pour obtenir

$$\ln\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \circ(x^2) = -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} + \circ(x^2)\,.$$

Exo 2

$$f(x) = cos(x), \quad x_0 = \tfrac{\pi}{3}, \quad n = 3$$

On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - \pi/3$. On a alors

$$f(x) = \cos\left(h + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h\,,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6}\right) + \circ(h^3)\,,$$

et finalement

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)\,.$$

$f(x) = ln(x), \quad x_0 = 3, \quad n = 2$

En 3, on se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 3$. On obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3+h) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \\ &= \ln 3 + \frac{h}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \circ(h^2), \end{aligned}$$

donc

$$\ln x = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \circ((x-3)^2).$$

$f(x) = \sqrt{2e - e^x}, \quad x_0 = 1, \quad n = 2$

On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 1$. On obtient alors

$$f(h+1) = \sqrt{2e - e^{h+1}}.$$

Mais

$$2e - e^{h+1} = 2e - e \cdot e^h = 2e - e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right) = e\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right).$$

Alors

$$f(h+1) = \sqrt{e}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right)^{1/2},$$

et en utilisant le développement limité $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \circ(x^2)$, on a

$$\begin{aligned} f(h+1) &= \sqrt{e}\left(1 + \frac{1}{2}\left(-h - \frac{h^2}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(-h - \frac{h^2}{2}\right)^2 + \circ(h^2)\right) \\ &= \sqrt{e}\left(1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{8} + \circ(h^2)\right) \\ &= \sqrt{e}\left(1 - \frac{h}{2} - \frac{3h^2}{8} + \circ(h^2)\right). \end{aligned}$$

On obtient donc finalement

$$\sqrt{2e - e^x} = \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{2}(x-1) - \frac{3\sqrt{e}}{8}(x-1)^2 + \circ((x-1)^2).$$

$f(x) =^4 \sqrt{2 - ln(x)}, \quad x_0 = 1, \quad n = 2$

On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 1$. On obtient tout d'abord

$$2 - \ln(1+h) = 2 - h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\,,$$

donc

$$f(1+h) = \left(2 - h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right)^{1/4} = 2^{1/4}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\right)^{1/4}.$$

D'autre part

$$(1+h)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}h + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\frac{h^2}{2} + \circ(h^2) = 1 + \frac{h}{4} - \frac{3h^2}{32} + \circ(h^2)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 2^{1/4}\left[1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) - \frac{3}{32}\left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right)^2 + \circ(h^2)\right] \\ &= 2^{1/4}\left[1 - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} - \frac{3}{32}\frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\right] \\ &= 2^{1/4}\left[1 - \frac{h}{8} + \frac{5h^2}{128} + \circ(h^2)\right], \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt[4]{2 - \ln x} = 2^{1/4}\left[1 - \frac{x-1}{8} + \frac{5(x-1)^2}{128} + \circ((x-1)^2)\right].$$

Exo 3

Le d.l. du dénominateur ayant son premier terme non nul de degré 3, on cherche un d.l. d'ordre 3 du numérateur. Pour obtenir le d.l. d'arcsin x, on part du d.l. d'ordre 2 de la dérivée. On a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,.$$

Donc en intégrant, et puisque $\arcsin 0 = 0$,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$

Alors

$$x - \arcsin x = -\frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}\,,$$

et

$$\sin^3 x \sim x^3\,,$$

d'où

$$\frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} \sim -\frac{1}{6}\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{6}\,.$$

$$2)\ f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x}\right]$$

Comme dans le calcul figure une division par x, on part de d.l. à l'ordre 1. On a tout d'abord

$$\frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1-x+\circ(x)) = 1-2x+\circ(x)\,,$$

puis

$$\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{x}\ln(1-2x+\circ(x)) = \frac{1}{x}(-2x+\circ(x)) = -2+\circ(1)\ .$$

Alors

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x}\right] = e^{-2}$$

$$3)\ f(x) = \left(\frac{shx}{sinx}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad x_0 = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)}$$

Comme sh x a un d.l. en zéro dont le premier terme non nul est de degré 1, et que l'on effectue une division par x^2, on partira de d.l. d'ordre 3. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)}{x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)}{1 + \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \circ(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\,.\end{aligned}$$

Alors
$$\ln\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = \ln\left(1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right) = -\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\,,$$
puis
$$\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = -\frac{1}{3}+\circ(1)\ .$$
Finalement
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)} = e^{-1/3}\,.$$

Exercice 4
Etudier à l'infini : asymptote à la courbe représentative de f, position par rapport à l'asymptote, les fonctions suivantes :

$$f(x) = x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

Posons $h = 1/x$, on a
$$\begin{aligned} hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \sqrt{\frac{1}{h^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{h^2}-1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{h^2}}\,(\sqrt{1+h^2}-\sqrt{1-h^2})\,. \end{aligned}$$
On utilise le *d.l.* de $(1+u)^{1/2}$ à l'orde 3 en zéro. On obtient
$$\begin{aligned} (1+u)^{1/2} &= 1+\frac{u}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}u^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}u^3+\circ(u^3) \\ &= 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+\circ(u^3)\,. \end{aligned}$$
On en déduit
$$\begin{aligned} \sqrt{1+h^2}-\sqrt{1-h^2} &= \left(1+\frac{h^2}{2}-\frac{h^4}{8}+\frac{h^6}{16}+\circ(h^6)\right)-\left(1-\frac{h^2}{2}-\frac{h^4}{8}-\frac{h^6}{16}+\circ(h^6)\right) \\ &= h^2+\frac{h^6}{8}+\circ(h^6)\,. \end{aligned}$$

Alors, puisque $\sqrt{h^2} = |h|$, on obtient, si $h>0$,
$$f\left(\frac{1}{h}\right) = 1+\frac{h^4}{8}+\circ(h^4)\,,$$

donc

$$f(x) = 1 + \frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

et la courbe admet comme asymptote à $+\infty$ la droite d'équation

$$y = 1\,.$$

De plus

$$f(x) - 1 = \frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{1}{8x^4}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $1/(8x^4)$. La courbe est au-dessus de l'asymptote.

En $-\infty$ les signes changent

$$f(x) = -1 - \frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

et la courbe admet comme asymptote à $-\infty$ la droite d'équation

$$y = -1\,.$$

Alors

$$f(x) + 1 = -\frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim -\frac{1}{8x^4}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $-1/(8x^4)$. La courbe est au-dessous de l'asymptote.

Remarque : la fonction f étant impaire, le résultat à $-\infty$ provient, par symétrie par rapport à l'origine, de celui à $+\infty$.

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x+1}}$$

Il est préférable ici de prendre $h = 1/(x+1)$, c'est-à-dire $x = -1 + 1/h$. On a alors

$$f(x) = f\left(-1 + \frac{1}{h}\right) = \left(\frac{1}{h} - 2\right) e^h \,,$$

donc

$$\begin{aligned} hf\left(-1+\frac{1}{h}\right) &= (1-2h)e^h \\ &= (1-2h)\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\circ(h^2)\right) \\ &= 1-h-\frac{3h^2}{2}+\circ(h^2)\,. \end{aligned}$$

On en déduit

$$f\left(-1+\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h} - 1 - \frac{3h}{2} + \circ(h)\,.$$

Alors

$$f(x) = (x+1) - 1 - \frac{3}{2(x+1)} + \circ\left(\frac{1}{x+1}\right) = x - \frac{3}{2(x+1)} + \circ\left(\frac{1}{x+1}\right)\,.$$

La courbe admet comme asymptote à $\pm\infty$ la droite d'équation

$$y = x\,,$$

et

$$f(x) - x = -\frac{3}{2(x+1)} + \circ\left(\frac{1}{x+1}\right) \sim -\frac{3}{2(x+1)}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $-3/(2(x+1))$. La courbe est au-dessous de l'asymptote à $+\infty$ et au-dessus à $-\infty$.

$$f(x) = ln(e^{2x} - e^x + 3e^{-3x} + 1)$$

f) Lorsque x tend vers $+\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est e^{2x}. On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x} + 3e^{-5x})] = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x} + 3e^{-5x})\,.$$

Posons $e^{-x} = h$. Cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 1 en zéro de

$$\ln(1 - h + h^2 + 3h^5) = \ln(1 - h + \circ(h))\,.$$

On obtient

$$\ln(1 - h + h^2 + 3h^5) = -h + \circ(h)\,,$$

donc

$$f(x) = 2x - e^{-x} + \circ(e^{-x})\,.$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = 2x\,,$$

et la différence

$$f(x) - 2x = -e^{-x} + \circ(e^{-x}) \sim -e^{-x}\,,$$

est du signe de $-e^{-x}$. La courbe est en dessous de son asymptote à $+\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est $3e^{-3x}$. On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln\left[3e^{-3x}\left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right)\right] = -3x + \ln 3 + \left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right)\,.$$

Posons $e^{x} = h$. Cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de

$$\ln\left(1 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{3}\right) = \ln\left(1 + \frac{h^3}{3} + \circ(h^3)\right)\,.$$

On obtient

$$\ln\left(1 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{3}\right) = \frac{h^3}{3} + \circ(h^3)\,,$$

donc

$$f(x) = -3x + \ln 3 + \frac{1}{3}e^{3x} + \circ(e^{3x})\,.$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = -3x + \ln 3\,,$$

et la différence

$$f(x) - (-3x + \ln 3) = \frac{1}{3}e^{3x} + \circ(e^{3x}) \sim \frac{1}{3}e^{3x}\,,$$

est du signe de $e^{3x}/3$. La courbe est au-dessus de son asymptote à $-\infty$.