

Examen d'Analyse: M111 : durée 1h45, 29-Mai-2018

Exercice 1

1. Démontrer que pour tout réel x , $E(x+p) = E(x) + p$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x et $p \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer qu'une suite $(U_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si les deux sous-suites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l .
3. Etudier la convergence de la suite $(U_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exercice 2

1. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{n \rightarrow \infty} \ln n.$$

3. Soit h la fonction définie par $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ pour $x > 1$.

(a) Montrer que

$$f(x) = 2 + (x-1)\left(1 + \frac{1}{c}\right)^c (\ln(1+c) - \ln(c) - \frac{1}{1+c})$$

pour un certain c vérifiant $1 < c < x$.

(b) Montrer que $f(x) \geq 2$.

(c) Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de $\arcsin x$.

(d) En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$$

(e) Etudier à l'infini : asymptote à la courbe représentative de f , position par rapport à l'asymptote.

Exercice 3

1. Comment la fonction $h : x \mapsto \operatorname{argch} x$ est-elle définie? montrer qu'elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer h' .
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction $h(\sqrt{2+x^2})$, puis déterminer son développement limité à l'ordre 5 au point 0.

Bon courage