

Examen d'Analyse: M111 : durée 1h45, 21-Mai-2019

Exercice 1

1. Comment la fonction $f : x \mapsto \operatorname{argsh} x$ est-elle définie? Préciser son domaine de définition D_f .
2. Etudier la parité de f .
3. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée f' .
4. Montrer que pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.
5. Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(x) = \operatorname{argsh}\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$$

- (a) Préciser l'ensemble de définition de h .
- (b) Calculer $h'(x)$.
- (c) Simplifier l'expression $h(x)$.

Exercice 2

Soit (U_n) la suite de terme général $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer par récurrence sur p que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

2. Montrer que la suite $(U_n)_n$ est de Cauchy.
3. On pose $V_n = U_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Tournez la page, svp!

Exercice 3

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}.$$

2. Etudier le sens de variations de la fonction $g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$

4. En utilisant les DL, déterminer les équations des asymptotes au voisinage de l'infini $(\pm\infty)$ à la courbe représentative de :

$$\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}$$

, puis préciser la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Rappel

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x)$$

Bon courage