Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques

Parcours MIP
Module M111: Analyse1
Année 2016- 2017

Partiel en Analyse1, durée $2h00$, 28-Mai-2017

Exercice 1

1. *Soit* $(a,b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, *tel que* $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.
2. *Démontrer que pour tout réel* x, $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$, *où* $E(x)$ *désigne la partie entière de* x.
3. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites réelles définies par*

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_{2n}, \ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad \textbf{et} \quad w_n = u_{2n+1}, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

   (a) *Etudier la monotonie des suites* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) *Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties* X *et* Y, *ensuite, déduire celles de* Z *avec* X, Y *et* Z *sont les ensembles définis par*

$$X = \{1 + \frac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^*\}, \quad Y = \{-1 + \frac{1}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\} \quad \textbf{et} \quad Z = \{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_n$ *la suite définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

a. *Montrer que les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont adjacentes.*
b. *Que peut-on dire de la convergence de la suite* (u_n).

Exercice 3

Soient I *un intervalle ouvert et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction trois fois dérivable sur* I. *Soient* a *et* b *deux nombres réels appartenants à* I *et tel que* $a < b$. *Soit* $g : I \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(a) + f'(x)) + K(x-a)^3$$

où K *est le nombre réel tel que* $g(b) = 0$

1. *Montrer que* g *est deux fois dérivable sur* I, *et calculer* $g'(x)$ *pour tout* $x \in I$.
2. *Montrer qu'il existe un nombre* $c \in]a,b[$ *tel que* $g'(c) = 0$.
3. *Montrer qu'il existe un nombre* $\theta \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(\theta)$$

Exercice 4

1. *Comment la fonction* $h : x \mapsto \arctan x$ *est-t-elle définie? Déterminer sa parité? puis, montrer qu'elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que sa dérivée est* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
2. *Déterminer le developpement limité de la fonction* h *à l'ordre* 3 *au point* 0.
3. *Soit* f *la fonction à variable réelle définie par*

$$f(x) = arctan(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}})$$

   (a) *Donner le developpement limité de la fonction* $u : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$ *à l'ordre* 3 *au point* 0.

   (b) *Déduire le developpement asymptotique en* $+\infty$ *à l'ordre* 6 *de la fonction* $v : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

   (c) *Donner le developpement asymptotique en* $+\infty$ *à l'ordre* 6 *de la fonction* f.

   (d) *Déduire le developpement asymptotique en* $-\infty$ *à l'ordre* 6 *de la fonction* f. *(on rappele que :* $arctan X + arctan\frac{1}{X} = -\frac{\pi}{2}$, $\forall X < 0$*).*

   (e) *Déterminer les équations des asymptotes ainsi que leurs positions relatives par rapport à la courbe de* f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

Bon courage

Exercice 1

1) Soit $(a,b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$, tel que $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$.

Montrons que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, donc $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

tel $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \frac{p}{q}$.

Donc $(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q}$.

On a $(\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2 = \underbrace{a + 9b}_{\in \mathbb{Q}^+} + \underset{\mathbb{Q}}{\underset{\uparrow}{6}}\underset{\not\in\mathbb{Q}}{\sqrt{ab}}$.

1

$6\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$ et donc $(a+9b) + 6\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q}$

absurde.

Donc $\boxed{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, Montrons que $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$

Posons $k = E(x)$ donc $k \leq x < k+1$

* si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ on a $x + \frac{1}{2} \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$

0,75

donc $E(x+\frac{1}{2}) = k$ 0,25

Ainsi $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = k + k = 2k$

Et $x \in [k, k+\frac{1}{2}[\Rightarrow 2x \in [2k, 2k+1[$

$\Rightarrow E(2x) = 2k$ 0,25

Donc $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$. 0,25

* Si $x \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$, on a $x + \frac{1}{2} \in [k+1, k+2[$

donc $E(x+\frac{1}{2}) = k+1$ 0,25

0,75

et $2x \in [2k+1, 2k+2[$

donc $E(2x) = 2k+1$ 0,25

Ainsi $E(x) + E(x+\frac{1}{2}) = k + k+1 = 2k+1 = E(2x)$.

0,25

B) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$.

3-a * La monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{2n+2} - 1 - \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{2n - 2n - 2}{2n(2n+2)}$$

$$= \frac{-1}{2n(n+1)} < 0$$

0,25 Donc (v_n) est une suite décroissante.

* La monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

0,25 Donc (w_n) est une suite décroissante.

3-b

* $X = \left\{1 + \frac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante, donc

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n < v_1$ 0,25 / $v_1 = \frac{3}{2}$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = 1$ 0,25

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leqslant v_n \leqslant \frac{3}{2}$ 0,25

Ainsi $\inf X = 1, \quad \sup X = \frac{3}{2}$ 0,25

* $Y = \left\{-1 + \frac{1}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

2

On a: (w_n) est une suite décroissante $\forall n,\ w_n \leqslant w_0 \leqslant 0$ (0,25)

$w_0 = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = -1$ (0,25)

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leqslant w_n \leqslant 0$ (0,25)

Ceci donne : $\inf Y = -1, \quad \sup Y = 0$ (0,25)

* $Z = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$= X \cup Y$

$\inf Z = \min(\inf X, \inf Y) = \min(1, -1) = -1$ (0,25)

$\sup Z = \max(\sup X, \sup Y) = \min\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}$ (0,25)

3

Exercice 2:

Soit $(U_n)_n$ la suite réelle de terme général

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

1) Montrons les suites $\underset{(V_n)=}{(U_{2n})}$ et $\underset{=(W_n)}{(U_{2n+1})}$ sont adjacentes:

(0,25) * $V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} < 0$ donc $(V_n) \searrow$.

(0,25) * $W_{n+1} - W_n = \frac{-1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} > 0$ donc $(W_n) \nearrow$.

(0,25) * $W_n - V_n = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} < 0$ donc $W_n \leq V_n, \forall n$

(0,25) * $\lim_{n \to +\infty} W_n - V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

Donc les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.

2) La convergence de la suite (U_n).

Puisque les deux suites $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ sont adjacentes,

(0,5) alors, elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

(0,5) Ainsi la suite $(U_n)_n$ converge aussi vers la même limite ℓ.

(4)

Exercice 3 :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction 3 fois dérivable sur I.

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\left(f'(a) + f'(x)\right) + k(x-a)^3$

où k est un nbre réel tel que : $g(b) = 0$.

1) * g est deux fois dérivable sur I :

f est 3 fois dérivable sur I donc elle est 2 fois dérivable sur I.

Et f' est deux fois dérivable sur I

0,1 Donc $x \longmapsto f(x) - f(a)$ est 2 fois dérivable sur I

$x \longmapsto \frac{x-a}{2}\left(f'(x) + f'(a)\right)$ est " " "

$x \longmapsto k(x-a)^3$ est aussi 2 " " "

Ainsi g est 2 fois dérivable sur I.

* $g'(x)$, $x \in I$? (g est 2 fois dérivable sur I, elle est donc dérivable sur I).

Soit $x \in I$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}\left(f'(a) + f'(x)\right) - \frac{x-a}{2} f''(x) + 3k(x-a)^2$$

0,1 $$\boxed{g'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) - f'(a)\right) - \frac{x-a}{2} f''(x) + 3k(x-a)^2}$$

5

1pt

2) Montrons qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$

g étant continue (0,25) sur $[a,b]$ et dérivable (0,25) sur $]a,b[$

et $g(a)=0$ (0,25) et $g(b)=0$, alors, par application

du Théorème de Rolle on déduit qu'il existe

un réel $c \in]a,b[$ qui vérifie $g'(c)=0$. (0,25)

3) Montrons qu'il existe un nombre $\theta \in]a,b[$ tel que:

2pts

$$f(b)-f(a) = \frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(\theta).$$

La fonction g est 2 fois dérivable sur I

Donc g' est continue (0,25) sur l'intervalle $[a,c]$ et dérivable (0,25)

sur $]a,c[$. De plus on a:

$g'(a)=0$ et $g'(c)=0$ (0,25)

Donc, par application du th de Rolle à g' sur

$[a,c]$, il existe un réel $\theta \in]a,c[\subset]a,b[$

qui vérifie $g''(\theta)=0$ (0,25)

Or $g''(\theta)=0 \iff \frac{\theta-a}{2} f'''(\theta) = 6k(\theta-a)$

$\iff k = \frac{1}{12} f'''(\theta)$ (0,5)

Donc

$$g(b)=0 \iff f(b)-f(a) = \frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right) - \frac{1}{12} f'''(\theta)(b-a)^3.$$

(0,5)

6

Exercice 4 :

1\. * Définition de la fction : $x \mapsto \arctan$:

Puisque la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan x$ est continue et strictement croissante, elle définit donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

0,5

Sa bijection réciproque f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qu'on note $f^{-1}(x) = \arctan x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

* Dérivabilité de la fonction : $x \mapsto \arctan x$

La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on a

0,5

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad f'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0$.

Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur $f\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \mathbb{R}$ et on a

0,5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

* Parité de la fonction $x \longmapsto \arctan x$: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$y = \arctan(-x) \iff \tan y = -x \iff \tan(-y) = x \iff -y = \arctan x \iff y = -\arctan x$$

$\arctan(-x) = -\arctan x$

7

2) Montrons que : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0$.

soit $\varphi :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

Q1) la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ dans $]-\infty,0[$

et la fct : $x \mapsto \arctan x$ est derivable sur $]-\infty,0[$

Donc la fct $x \mapsto \arctan \frac{1}{x}$ est derivable sur $]-\infty,0[$

Ainsi φ est aussi dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\forall x \in]-\infty,0[, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

$$= 0$$

Ceci veut dire que φ est constante sur $]-\infty,0[$

Donc $\forall x \in]-\infty,0[\quad \varphi(x) = \varphi(-1)$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

8

3) Le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \arctan x$.

Au voisinage de 0, on a :

0,5 $\quad \operatorname{Arctan} x = \underset{0}{\operatorname{Arctan} 0} + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

Or $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$

0,5 Donc $\boxed{\operatorname{Arctan} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$

4) $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$.

4-a : $DL_3(0)$ de la fonction, $u : x \longmapsto \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$1 - \sqrt{1+x} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

0,5 $\quad = -\frac{1}{2}x\left(1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)$

$1 + \sqrt{1+x} = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)}$

0,5 $\quad = \frac{1}{2} \times (1 - t + t^2) + o(x^2) \quad / \; t = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)$

$t^2 = \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)$

9

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2\right) + o(x^2)$$

$$u(x) = \left(1 - \sqrt{1+x}\right) \times \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

0,5

$$= -\frac{1}{4}x\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$\boxed{u(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{64}x^3 + o(x^3)}$$

4-b) $DL_{(6)}(+\infty)$ de $v : x \longmapsto \dfrac{1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Au vois de $+\infty$, $h = \frac{1}{x^2}$ est au vois de 0.

Donc $v(x) = v\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right) = v\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$

$$= u(h)$$

$$= -\frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + \frac{3}{64}h^3 + o(h^3)$$

0,5 $$\boxed{v(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{x^4} + \frac{3}{64} \times \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)}$$

4-c) $DL_6(+\infty)$ de la fonction f.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

0,5 $$= \arctan(v(x)).$$

10

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0$

Donc, Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = v(x) - \frac{1}{3}\left(v(x)\right)^3$$

$$v(x) = -\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8x^4} + \frac{3}{64} \times \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

0,25 $$\left(v(x)\right)^3 = \left(-\frac{1}{4x^2}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

$$= \frac{-1}{64x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

0,25 $$\boxed{f(x) = \frac{-1}{4x^2} + \frac{1}{8x^4} + \frac{5}{96} \times \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).}$$

4-d) Au voisinage de $-\infty$, $|x| = -x$

donc $$f(x) = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+1/x^2}}{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

0,25 $$= \arctan\left(\frac{1}{v(x)}\right)$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > x^2 \implies \sqrt{x^2+1} > |x|$

$$\implies \begin{cases} \sqrt{1+x^2} > x \\ \sqrt{1+x^2} > -x \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $v(x) < 0$

Or $\forall y \in \mathbb{R}^-$ $\operatorname{Arctan} y + \operatorname{Arctan} \frac{1}{y} = -\frac{\pi}{2}$

0,25 Donc $$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{v(x)}\right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(v(x))$$

11

Ainsi, Au vois de $-\infty$:

0,25 $f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{8x^4} - \frac{5}{96} \times \frac{1}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$.

4- e)

- Au vois de $+\infty$:

0,25 $y = 0$ est une équation de l'asymptote à (C_f) au vois de $+\infty$.

De plus : $f(x) - y \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2}$

0,25 Donc (C_f) est en dessous de son asymptote en $+\infty$.

- Au vois de $-\infty$:

0,25 $y = -\frac{\pi}{2}$ est une équation de l'asymptote à (C_f) au vois de $-\infty$.

De plus $f(x) - y \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{4x^2}$

0,25 Donc (C_f) est au-dessus de son asymptote en $-\infty$.

(12)