

Université Moulay ISMAÏL
Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse II Mathématiques
Filière MIP (M123)

Pr Hamid BOUTANFIT & Pr Abderazak Soullami

Année universitaire 2022-2023

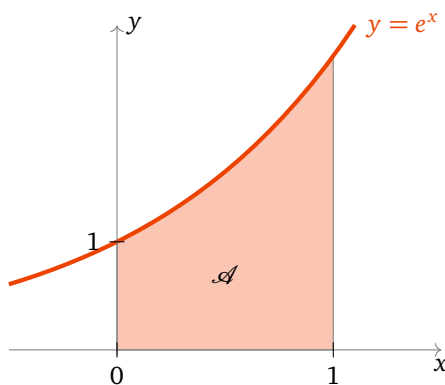
Table des matières

1	Fonctions Riemann Intégrales	3
1	Fonctions en escalier	4
1.1	Subdivisions	4
1.2	Fonctions en escalier	5
2	L'intégrale de Riemann	5
2.1	Intégrale d'une fonction en escalier	6
2.2	Fonction intégrable	7
2.3	Définitions	7
2.4	Opérations sur les fonctions intégrables	11
2.5	Intégrales et inégalités	12
2.6	Intégrales et produits	14
3	Familles de fonctions intégrables	16
3.1	Manipulation de fonctions intégrables	16
3.2	Monotonie	17
3.3	Continuité	17
3.4	Relation de Chasles	19
4	Primitive et intégrales	20
4.1	Le théorème fondamental	20
4.2	Primitives des fonctions usuelles	23
4.3	Relation primitive-intégrale	24
5	Intégration par parties – Changement de variable	25
5.1	Intégration par parties	25
5.2	Changement de variable	27
6	Intégration des fractions rationnelles	29
6.1	Trois situations de base	29
6.2	Intégration des éléments simples	30
6.3	Intégration des fonctions trigonométriques	30
7	Sommes de Darboux et de Riemann	31
7.1	Sommes de Darboux	31
7.2	Sommes de Riemann	32
8	Intégrale généralisée	34

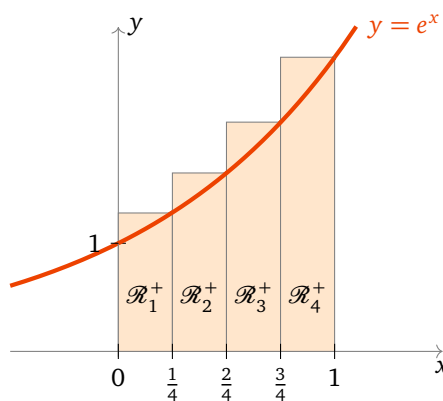
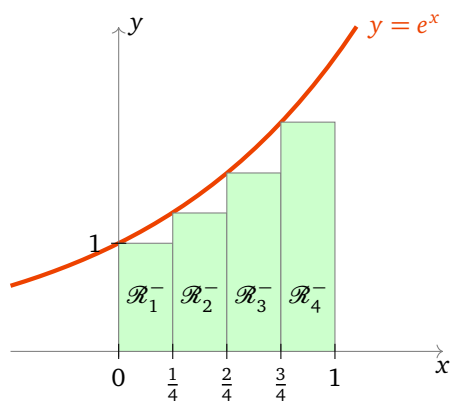
Fonctions Riemann Intégrales

Introduction

Nous allons introduire l'intégrale à l'aide d'un exemple. Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ en-dessous du graphe de f et entre les droites d'équation $(x = 0)$, $(x = 1)$ et l'axe (Ox) .



Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geq 1$ un entier ; découpons notre intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$. On considère les « rectangles inférieurs » $\mathcal{R}_i^-$, chacun ayant pour base l'intervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ et pour hauteur $f(\frac{i-1}{n}) = e^{(i-1)/n}$. L'entier i varie de 1 à n . L'aire de $\mathcal{R}_i^-$ est « base $\times$ hauteur » : $(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.



La somme des aires des $\mathcal{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

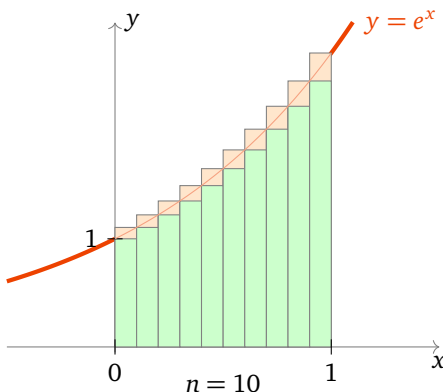
$$\sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^{i-1} = \frac{1}{n} \frac{1 - (e^{\frac{1}{n}})^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} (e - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e - 1.$$

Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (avec ici $x = \frac{1}{n}$).

Soit maintenant les « rectangles supérieurs » $\mathcal{R}_i^+$, ayant la même base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ mais la hauteur $f(\frac{i}{n}) = e^{i/n}$.

Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^n \frac{e^{i/n}}{n} \rightarrow e - 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

L'aire $\mathcal{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire $\mathcal{A}$ de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e - 1$. Donc l'aire de notre région est $\mathcal{A} = e - 1$.

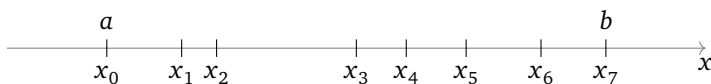


1. Fonctions en escalier

1.1. Subdivisions

Définition 1.

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$). On appelle une **subdivision** de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.



On appelle diamètre de la subdivision S la quantité :

$$\delta = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Une subdivision S_1 de $[a; b]$ est dite plus fine qu'une subdivision S_0 de $[a; b]$ si $S_0 \subset S_1$. Cela veut dire que S_1 découpe $[a; b]$ en plus de morceaux. En particulier dans ce cas, on a évidemment $\delta(S_0) \geq \delta(S_1)$.

Exemple 1.

Soient $[a; b] \subset \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ alors

$$S_n = \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b\}$$

est une subdivision de $[a, b]$ dont le diamètre est $\delta(S_n) = \frac{b-a}{n}$

1.2. Fonctions en escalier

Définition 2.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et des nombres réels $c_1, \dots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$$

Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

Exemple 2.

Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \\ 1 & \text{si } x = x_i, i = 0, 1, 2; \dots, n \end{cases}$$

où pour tout $n \geq 1$, les x_i sont les points de la subdivision de $[0, 1]$ donnée par

$$S_n = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1\}$$

Proposition 1.

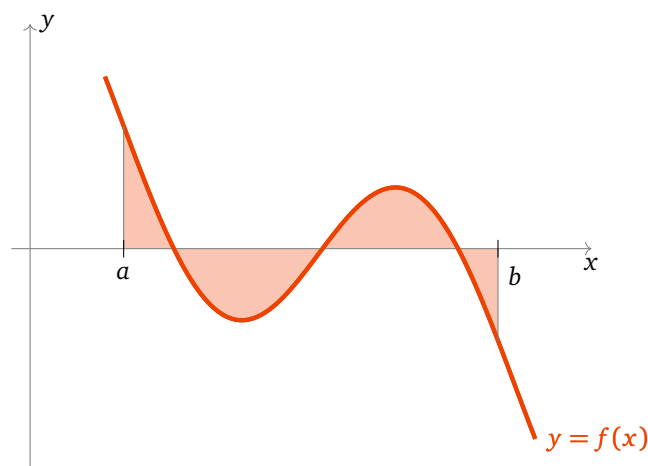
Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|f|$, $f + g$, λf et $f g$ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Preuve.

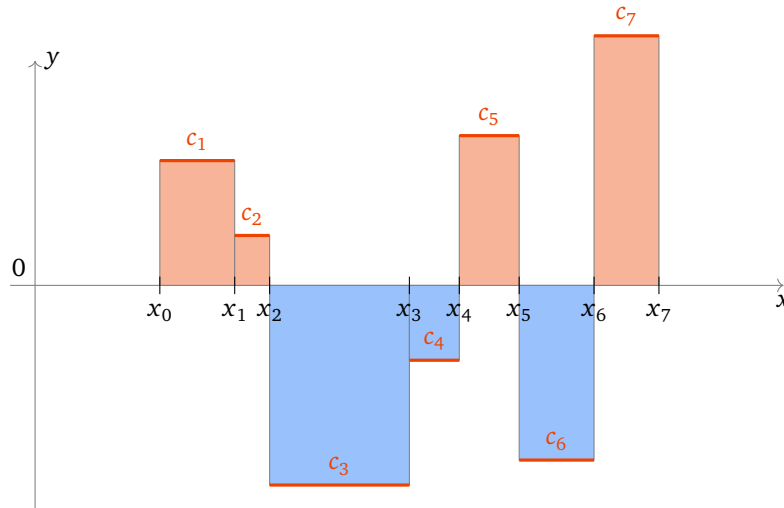
Si S_0 et S_1 sont des subdivisions associées à f et g respectivement alors $S = S_0 \cup S_1$ est associée à f et à g . On peut donc supposer que f et g sont en escalier sur la même subdivision $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Ainsi f et g sont constantes, égales respectivement à c_i et d_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|f|$, λf , $f + g$ et $f g$ sont égales à $|c_i|$, λc_i , $c_i + d_i$ et $c_i d_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. D'où la proposition.

2. L'intégrale de Riemann

Nous allons reprendre la construction faite dans l'introduction pour une fonction f quelconque. Ce qui va remplacer les rectangles seront des **fonctions en escalier**. Si la limite des aires en-dessous égale la limite des aires au-dessus on appelle cette limite commune **l'intégrale** de f que l'on note $\int_a^b f(x) dx$. Cependant il n'est pas toujours vrai que ces limites soient égales, l'intégrale n'est donc définie que pour les fonctions **intégrables**. Heureusement nous verrons que si la fonction f est continue alors elle est intégrable.



2.1. Intégrale d'une fonction en escalier



Définition 3.

Pour une fonction en escalier comme ci-dessus, son **intégrale** est le réel $\int_a^b f(x) dx$ défini par

$$\int_a^b f(x) dx = I_S(f) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$$

Remarque.

Notez que chaque terme $c_i(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i . Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe « + » si $c_i > 0$ et un signe « - » si $c_i < 0$.

L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses (ici en rouge) moins l'aire de la partie située en-dessous (en bleu). L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

Proposition 2.

La quantité $I_S(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision S associée à f , elle ne dépend que de f et de $[a, b]$.

Preuve.

Considérons deux subdivisions $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $S' = (y_j)_{0 \leq j \leq m}$ associées à f .

- 1^{er} cas $S \subset S'$ sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ la fonction f est constante égale à c_i . Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalles $]y_k; y_{k+1}[$, $k = l_0, l_0 + 1, l_0 + 2, \dots, l_1$ où f prend des valeurs d_l qui sont forcément toutes égales à c_i . Donc $\sum_{l=l_0}^{l_1-1} d_l(y_{l+1} - y_l) = \sum_{l=l_0}^{l_1-1} c_i(y_{l+1} - y_l) = c_i \sum_{l=l_0}^{l_1-1} (y_{l+1} - y_l) = c_i(x_{i+1} - x_i)$ En faisant la somme sur tous les $i = 0; 1, 2, \dots, n-1$ on aura

$$\sum_{l=0}^{m-1} d_l(y_{l+1} - y_l) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$$

Ainsi, dans ce cas, $I_{S'}(f) = I_S(f)$

- 2^{ème} cas
si S et S' sont quelconques, associées à f alors $S'' = S \cup S'$ est une subdivision associée à f vérifiant $S \subset S''$ et $S' \subset S''$. D'après le cas premier, on a :

$$I_S(f) = I_{S''}(f) = I_{S'}(f)$$

Cette quantité qui ne dépend donc que de f et de $[a, b]$ est notée $\int_a^b f(t)$ et appelée l'intégrale de f entre a et b .

Proposition 3.

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a; b]$.

1. Si f est positive sur tout $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
2. Si $f \geq g$ sur tout $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.
3. On a $\int_a^b |f(t)|dt \geq \left| \int_a^b f(t)dt \right|$.

Preuve. 1. Soit $S = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision associée à f alors toutes les valeurs c_i de f sur $]x_i; x_{i+1}[$ sont positives. Comme les $(x_{i+1} - x_i)$ sont tous positifs, donc :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) \geq 0$$

2. Il suffit d'appliquer 1) à $f - g$.

3. Pour tout $x \in [a, b]$ on a, $|f(x)| \geq f(x) \geq -|f(x)|$ l'assertion 2) implique :

$$\int_a^b |f(x)|dt \geq \int_a^b f(t)dt \geq - \int_a^b |f(x)|dt$$

D'où

$$\int_a^b |f(t)|dt \geq \left| \int_a^b f(t)dt \right|.$$

□

2.2. Fonction intégrable

2.3. Définitions

Soit f une fonction définie et bornée sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note :

$$E_-(f) = \{ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leq f \},$$

$$E_+(f) = \{ \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \psi \text{ en escalier et } f \leq \psi \},$$

$$I_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt : \varphi \in E_-(f) \right\},$$

$$I_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(t)dt : \psi \in E_+(f) \right\}.$$

Comme f est bornée, donc $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, existent bien dans $\mathbb{R}$ et les fonctions $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $m(x) = m$ et $M(x) = M$ vérifiant $m \leq f \leq M$. Donc $m \in E_-(f)$ et $M \in E_+(f)$, ainsi :

$$m(b-a) = \int_a^b m dt \in I_-(f) \Rightarrow I_-(f) \neq \emptyset$$

et

$$M(b-a) = \int_a^b M dt \in I_+(f) \Rightarrow I_+(f) \neq \emptyset$$

Clairement $M(b-a)$ est un majorant de $I_-(f)$ et $m(b-a)$ est un minorant de $I_+(f)$. Donc

$$I_a^b(f) = \sup(I_-(f)) \text{ et } I_a^b(f) = \inf(I_+(f))$$

existent dans $\mathbb{R}$ et vérifient évidemment :

$$i_a^b(f) \leq I_a^b(f).$$

Définition 4.

On dit qu'une fonction bornée f sur $[a, b]$ est intégrable au sens de **Riemann** (ou bien **Riemann** intégrable) si $i_a^b(f) = I_a^b(f)$. Cette valeur commune est notée :

$$\int_a^b f(t)dt,$$

et appelée intégrale de f entre a et b .

En analyse réelle, il est souvent utile de ramener un problème à une propriété séquentielle convenable par exemple une fonction f est continue en un point a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers a sa suite image $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$. C'est le cas de la définition précédente.

Théorème 1.

Une fonction f définie et bornée sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que :

- $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ pour tout n ,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$.

Dans ce cas on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt$ et cette limite commune est $\int_a^b f(t)dt$.

Preuve.

Supposons que $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int_a^b f(t)dt$. Par définition de la borne inférieure et supérieure on a :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in E_-(f) & \int_a^b \varphi(t)dt \leq i_a^b(f), \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon \in E_-(f) & i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi_\varepsilon(t)dt. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall \psi \in E_+(f) & \int_a^b \psi(t)dt \geq I_a^b(f) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \psi_\varepsilon \in E_+(f) & I_a^b(f) + \varepsilon > \int_a^b \psi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

Ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \geq 1$ il existe alors deux fonctions $\varphi_n \in E_-(f)$ et $\psi_n \in E_+(f)$ telles que

$$\begin{aligned} i_a^b(f) - \frac{1}{n} &< \int_a^b \varphi_n(t)dt \leq i_a^b(f) \\ I_a^b(f) &\leq \int_a^b \psi_n(t)dt < I_a^b(f) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Si on fait tendre n vers l'infini, on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = i_a^b(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = I_a^b(f)$$

Par construction, les fonctions φ_n et ψ_n sont bien en escalier et satisfont $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$. Ainsi la preuve dans un sens est faite.

Réciproquement, si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ telles que :

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0,$$

alors on a l'implication suivante :

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt \leq i_a^b(f) \leq I_a^b(f) \leq \int_a^b \psi_n(t)dt \Rightarrow 0 \leq I_a^b(f) - i_a^b(f) \leq \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t))dt$$

Ce qui montre que $I_a^b(f) = i_a^b(f)$. De plus on a :

$$0 \leq i_a^b(f) - \int_a^b \varphi_n(t) dt \leq \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t)) dt,$$

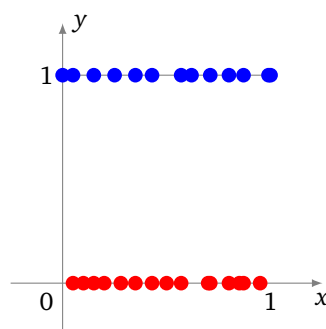
$$\text{et } 0 \leq \int_a^b \psi_n(t) - I_a^b(f) \leq \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t)) dt.$$

Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini pour conclure. $\square$

Exemple 3.

- Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I_a^b(f)$ et supérieure $i_a^b(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier définie lors du paragraphe 1.2.
- Nous verrons dans la section suivante que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.
- Cependant toutes les fonctions ne sont pas intégrables. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si sinon} \end{cases}$$

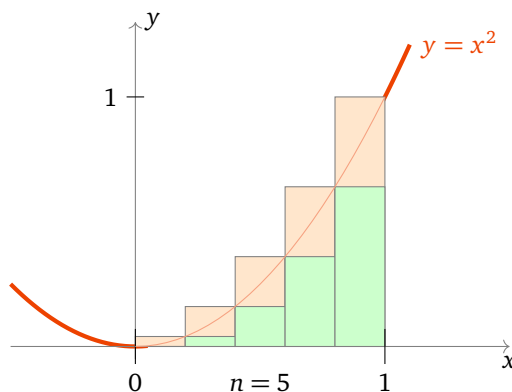


On montre que $i_0^1(f) \leq 0 < 1 \leq I_0^1(f) \Rightarrow i_0^1(f) \neq I_0^1(f)$, (Les bornes inférieure et supérieure ne coïncident pas) donc f n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$. (voir TD)

Il n'est pas si facile de calculer des exemples avec la définition. Nous avons vu l'exemple de la fonction exponentielle dans l'introduction où nous avons en fait montré que $\int_0^1 e^x dx = e - 1$. Nous allons voir maintenant l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$. Plus tard nous verrons que les primitives permettent de calculer simplement beaucoup d'intégrales.

Exemple 4.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons $\int_0^1 f(x) dx$.



Solution Soit $n \geq 1$ et considérons la subdivision régulière de $[0, 1]$ suivante $\mathcal{S} = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$. Sur l'intervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ nous avons

$$\forall x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \quad \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

Nous construisons une fonction en escalier ϕ^- en-dessous de f par $\phi^-(x) = \frac{(i-1)^2}{n^2}$ si $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ (pour chaque $i = 1, \dots, n$) et $\phi^-(1) = 1$. De même nous construisons une fonction en escalier ϕ^+ au-dessus de f

définie par $\phi^+(x) = \frac{i^2}{n^2}$ si $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ (pour chaque $i = 1, \dots, n$) et $\phi^+(1) = 1$. ϕ^- et ϕ^+ sont des fonctions en escalier et l'on a $\phi^- \leq f \leq \phi^+$.

L'intégrale de la fonction en escalier ϕ^+ est par définition

$$\int_0^1 \phi^+(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

On se souvient de la formule $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et donc

$$\int_0^1 \phi^+(x) dx = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

De même pour la fonction ϕ^- :

$$\int_0^1 \phi^-(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Maintenant $i_0^1(f)$ est la borne supérieure sur toutes les fonctions en escalier inférieures à f donc en particulier $i_0^1(f) \geq \int_0^1 \phi^-(x) dx$. De même $I_0^1(f) \leq \int_0^1 \phi^+(x) dx$. En résumé :

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \int_0^1 \phi^-(x) dx \leq i_0^1(f) \leq I_0^1(f) \leq \int_0^1 \phi^+(x) dx = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$ alors les deux extrémités tendent vers $\frac{1}{3}$. On en déduit que $i_0^1(f) = I_0^1(f) = \frac{1}{3}$. Ainsi f est intégrable et $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Exemple 5.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

Avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrons à l'aide du théorème caractéristique ci-dessus (qu'on peut considérer comme définition), que la fonction f est Riemann intégrable sur $[0, 1]$. Pour tous $n \geq 1$, on considère la subdivision de $[0, 1]$ telle que :

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1 \right\},$$

qui va être associée aux fonctions en escalier définies par :

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= ax_i, \psi_n(t) = ax_{i+1}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \varphi_n(x_i) &= 0, \psi_n(x_i) = a, i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Puisque f est strictement croissante, donc : $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_n(t) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} a \frac{i}{n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{a}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{a}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_n(t) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_{i+1} (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} a \frac{i+1}{n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{a}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{a}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \psi_n(t) dt = \frac{a}{2}.$$

Ainsi f est intégrable sur $[0, 1]$ et son intégrale vaut $\int_0^1 (at) dt = \frac{a}{2}$.

2.4. Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 4.

Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f + g$ sont intégrables sur $[a, b]$ et on a :

- $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$,
- $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.

Preuve.

Comme f et g sont intégrables on sait qu'il existe des suites $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, $(\psi_n)_{n \geq 1}$, $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \geq 1$:

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } u_n \leq g \leq v_n,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(t) dt = 0.$$

Il s'en suit que :

★ Si $\lambda > 0$, alors : $\lambda \varphi_n \leq \lambda f \leq \lambda \psi_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda \psi_n - \lambda \varphi_n)(t) dt = 0$.

★ si $\lambda < 0$, alors : $\lambda \psi_n \leq \lambda f \leq \lambda \varphi_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda \varphi_n - \lambda \psi_n)(t) dt = 0$. Pour $\lambda = 0$ c'est trivial. Donc λf est intégrable sur $[a, b]$. On a déjà vu que pour les fonctions en escalier l'intégrale est linéaire et de la linéarité de la limite on déduit que :

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \lambda \varphi_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda \int_a^b \varphi_n(t) dt \right) \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt \\ &= \lambda \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\varphi_n + u_n \leq f + g \leq \psi_n + v_n$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n + v_n)(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b v_n dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b u_n dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n + u_n)(t) dt \\ &= \int_a^b (f + g)(t) dt \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Notons $\mathcal{R}([a, b])$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$ (qui contient évidemment les fonctions en escalier sur $[a, b]$). La proposition 2.1 nous informe que $\mathcal{R}([a, b])$ est un espace vectoriel réel et que $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une application linéaire de $\mathcal{R}([a, b])$ dans $\mathbb{R}$ (donc c'est une forme linéaire de $\mathcal{R}([a, b])$).

1. Si $S = (x_j)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision associée à f alors elle l'est à λf aussi. Si f prenait les valeurs c_i sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$ alors λf prend les valeurs λc_i sur ces mêmes intervalles. On obtient donc

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda c_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda \int_a^b f(t) dt.$$

2. Soit $S = (x_j)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision associée à f et à g . Chacune de ces fonctions vaut c_i et d_i respectivement sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$. Ainsi $f + g$ vaut $c_i + d_i$ sur ces intervalles et on aura :

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(t) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} (c_i + d_i) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \end{aligned}$$

□

Mini-exercices.

- En admettant que $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Calculer l'intégrale $\int_0^1 P(x) dx$ où $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Trouver un polynôme $P(x)$ non nul de degré 2 dont l'intégrale est nulle : $\int_0^1 P(x) dx = 0$.
- A-t-on $\int_a^b f(x)^2 dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$; $\int_a^b \sqrt{f(x)} dx = \sqrt{\int_a^b f(x) dx}$; $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$; $\int |f(x) + g(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_a^b g(x) dx \right|$?
- Peut-on trouver $a < b$ tels que $\int_a^b x dx = -1$; $\int_a^b x dx = 0$; $\int_a^b x dx = +1$? Mêmes questions avec $\int_a^b x^2 dx$.
- Montrer que $0 \leq \int_1^2 \sin^2 x dx \leq 1$ et $\left| \int_a^b \cos^3 x dx \right| \leq |b - a|$.

2.5. Intégrales et inégalités

Les inégalités liées aux intégrales de fonctions en escalier vont s'étendre sans difficulté aux fonctions Riemann intégrables.

Proposition 5.

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a; b]$ de $\mathbb{R}$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$.

Preuve. 1. Comme f est intégrable, on sait qu'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que $f \leq \psi_n$ pour tout n et

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t) dt$$

Comme f est positive, toutes les fonctions ψ_n le sont aussi, donc les intégrales $\int_a^b \psi_n(t) dt$ sont positives et leur limite aussi.

2. Il suffit d'appliquer 1) à $f - g \geq 0$

□

Maintenant soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$ on pose

$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} \text{ et } f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

Il est clair que ces deux fonctions sont positives et que

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

Proposition 6.

Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$, alors f_+, f_- et $|f|$ sont aussi intégrables et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Preuve.

Comme f est intégrable alors il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ vérifiant $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et dont les intégrales convergent vers celle de f . On vérifie alors facilement que

$$(\varphi_n)_+ \leq f_+ \leq (\psi_n)_+$$

et que $(\psi_n)_+ - (\varphi_n)_+ \leq \psi_n - \varphi_n$. Donc f_+ est intégrable sur $[a, b]$. Par la même méthode, f_- est intégrable sur $[a, b]$. D'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable sur $[a, b]$.

L'inégalité des intégrales découle de 2) de la proposition 4. appliquée à

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

Proposition 7 (Formule de la moyenne I).

Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$ avec $a < b$. Soient m et M la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a, b]$. Alors le réel

$$\kappa = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

appartient à $[m, M]$.

Preuve.

Comme on a $m \leq f \leq M$ on en déduit

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

Exemple 6 (Application).

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2 + \cos(t)} dt \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t(1 + \cos^2(t))} dt \right)$$

Pour calculer la première limite, il suffit d'appliquer la formule de la moyenne à $[a, b] = [0, x]$ et à la fonction $t \mapsto f(t) = \frac{e^{t^2}}{2 + \cos(t)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ le compact $[0, 1] \supset [0, x]$, $x \sim 0^+$. Soient alors $m = \min\{f(t), t \in [0, 1]\}$ et $M = \max\{f(t), t \in [0, 1]\}$. La formule de la moyenne nous mène à

$$m \leq \frac{1}{x-0} \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2 + \cos(t)} dt \leq M$$

Par suite

$$xm \leq \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2 + \cos(t)} dt \leq xM$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2 + \cos(t)} dt \right) = 0$$

De même la fonction

$$g : t \mapsto g(t) = \frac{t+1}{t(1+\cos^2(t))}$$

est continue sur $[1, +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(t) = 1$. Or pour $x \sim +\infty$ on a $[x, 2x] \subset [1, +\infty[$, donc

$$m = \inf\{g(t), 1 \leq t < +\infty\} \text{ et } M = \sup\{g(t), 1 \leq t < +\infty\}$$

existent bien dans $\mathbb{R}$ et d'après la formule de la moyenne

$$m \leq \frac{1}{2x-x} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t(1+\cos^2(t))} dt \leq M$$

Puisque $x > 0$ on aura

$$\frac{m}{x} \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t(1+\cos^2(t))} dt \leq \frac{M}{x}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t(1+\cos^2(t))} dt \right) = 0.$$

Théorème 2 (Formule de la moyenne II).

Soient f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et g intégrable sur $[a, b]$ avec g de signe constant. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve.

Quitte à considérer $-g$, on peut supposer que g est positive. La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes :

$$m = \min\{f(x) : a \leq x \leq b\}, M = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}$$

Par ailleurs on a ;

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

- Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, d'après la dernière inégalité, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et le théorème devient trivial.
- Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ alors $\int_a^b g(x)dx > 0$ et les inégalités précédentes nous donnent

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.
Ce qu'il fallait démontrer.

2.6. Intégrales et produits

Proposition 8.

Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ alors fg est bornée et intégrable sur $[a, b]$.
Mais en général $\int_a^b (fg)(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right)$.

Preuve.

* Cas où f et g sont toutes les deux positives. On pose

$$M = \max\{f(x), a \leq x \leq b\} \text{ et } N = \max\{g(x), a \leq x \leq b\}$$

Par définition, il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n, (u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } u_n \leq g \leq v_n$$

Posons

$$\varphi'_n(x) = \max\{\varphi_n(x), 0\}, \psi'_n(x) = \min\{\psi_n(x), M\}$$

$$u'_n(x) = \max\{u_n(x), 0\}, v'_n(x) = \min\{v_n(x), N\}$$

Ce sont toutes des fonctions en escalier qui vérifient bien :

$$\varphi_n \leq \varphi'_n \text{ et } 0 \leq \varphi'_n \leq f \leq \psi'_n \leq \psi_n$$

$$u_n \leq u'_n \text{ et } 0 \leq u'_n \leq g \leq v'_n \leq v_n$$

A cause de la positivité, on aura donc

$$\varphi'_n u'_n \leq f g \leq \psi'_n v'_n$$

le fonctions qui encadrent $f g$ sont en escalier. Montrons la convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt = 0$$

Pour ce la on va utiliser les assertion satisfaites suivantes

$$v'_n \leq N, \varphi'_n \leq \psi'_n \leq M$$

$$0 \leq \psi'_n - \varphi'_n \leq \psi_n - \varphi_n$$

$$0 \leq v'_n - u'_n \leq v_n - u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(t) dt = 0$$

pour pouvoir écrire :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt \\ &= \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n v'_n + \varphi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt \\ &= \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n v'_n)(t) dt + \int_a^b (\varphi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt \\ &= \int_a^b v'_n(t) (\psi'_n - \varphi'_n)(t) dt + \int_a^b \varphi'_n(t) (v'_n - u'_n)(t) dt \\ &\leq \int_a^b v'_n(t) (\psi'_n - \varphi'_n)(t) dt + \int_a^b \psi'_n(t) (v'_n - u'_n)(t) dt \\ &\leq N \int_a^b (\psi'_n - \varphi'_n)(t) dt + M \int_a^b (v'_n - u'_n)(t) dt \\ &\leq N \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt + M \int_a^b (v_n - u_n)(t) dt \end{aligned}$$

(2.1) montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt = 0$$

Donc $f g$ est R-intégrable.

★ f et g bornées intégrables non nécessairement positive. Posons

$$m = \min\{f(x), a \leq x \leq b\} \text{ et } m' = \min\{g(x), a \leq x \leq b\}$$

Les fonctions $f - m$ et $g - m'$ qui sont bornées et intégrables sont positives. D'après le cas précédent, $(f - m)(g - m')$, est intégrable. Puisque

$$fg = (f - m)(g - m') + mg + m'f - mm',$$

on en déduit que fg est bornée Riemann intégrable. Pour voir qu'on n'a pas toujours l'égalité, il suffit de prendre $[a, b] = [0, 2]$ et $f = g = 1$

$$\int_0^2 (fg)(t)dt = \int_0^2 dt = 2 \neq 4 = \left(\int_0^2 dt \right)^2 = \int_0^2 (f)(t)dt \times \int_0^2 (g)(t)dt.$$

Théorème 3 (Inégalité de Cauchy-Schwartz).

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)$$

Preuve.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est intégrable, donc $(f + \lambda g)^2$ l'est aussi. Comme c'est une fonction positive, donc

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx \geq 0$$

Ainsi

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (f(x))^2 dx \geq 0$$

est un polynôme de degré deux en λ et qui est toujours du signe du coefficient $\int_a^b (g(x))^2 dx$ de λ^2 , donc son discriminant est négatif, c'est-à-dire :

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right) \leq 0$$

3. Familles de fonctions intégrables

3.1. Manipulation de fonctions intégrables

Proposition 9.

Soient f est une fonction bornée et intégrable et g une fonction définie sur $[a, b]$ est égale à f sauf sur un nombre fini de points, alors g est intégrable et

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve.

Par hypothèse il existe une subdivision $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que $f = g$ sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. La fonction $f - g$ est donc nulle sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En d'autres termes, la fonction $f - g$ est en escalier. Elle est donc intégrable et son intégrale est clairement nulle. La fonction $g = f - (f - g)$ est donc intégrable et son intégrale est égale à celle de f .

Remarque.

Cette proposition signifie que si on change les valeurs d'une fonction R-intégrable sur $[a, b]$ en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors elle reste encore intégrable et garde la même intégrale.

3.2. Monotonie

Théorème 4.

Toute fonction monotone sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est intégrable.

Preuve.

supposons que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée est croissante (sinon on considérera $-f$ qui sera croissante).

Pour tout $n \geq 1$ considérons la subdivision : $S_n = \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b\}$, qui permet de construire les fonctions en escalier :

$$\varphi_n(t) = f(x_i), \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

et

$$\psi_n(t) = f(x_{i+1}), \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

On a évidemment $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$, par suite f est intégrable sur $[a, b]$. $\square$

3.3. Continuité

Définition 5.

Une fonction f est continue en un point a d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{a,\varepsilon} > 0, |x - a| < \eta_{a,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f est dite continue sur I si f est continue en tout point a de I .

Remarque.

Dans cette définition, il faut noter que le $\eta_{a,\varepsilon} > 0$ ci-dessus dépend de ε évidemment mais aussi de a .

Définition 6.

Une fonction f est dite uniformément continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, |x - y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exemple 7.

$$\exists K > 0 : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \forall (x, y) \in I^2$$

sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$. De telles fonctions sont obtenues par le théorème des accroissements finis, Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivée est bornée alors f est Lipschitziennes.

Évidemment la continuité uniforme implique la continuité. La réciproque n'est pas toujours vraie. Cependant, sur les compacts cette réciproque devient satisfaite.

Théorème 5 (Heine).

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$

Preuve.

Si f est continue, montrons qu'elle est uniformément continue, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0, \quad |x - y| < \eta_{a,\epsilon} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Raisonnons par absurde, $\exists \epsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$ on peut trouver x_η, y_η dans $[a, b]$ tels que $|x_\eta - y_\eta| < \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geq \epsilon_0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$ en particulier pour les $\frac{1}{n}, n \geq 1$. Il existe donc des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ dans $[a, b]$ telles que

$$|x_n - y_n| < 1/n \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0 \quad (*)$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ qui converge dans $[a, b]$ vers c . Alors $(y_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ converge aussi vers c . Puisque $|y_{\varphi(n)} - c| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| \leq |x_{\varphi(n)} - c| < \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow +\infty$.
écrivons $(*)$ pour $\varphi(n)$, on aura : $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})|$, ce qui mène à la contradiction avec la continuité de f en c si on fait tendre n vers l'infini.

Voici le résultat théorique le plus important de ce chapitre.

Théorème 6.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Preuve.

Par hypothèse, f est continue, d'après le théorème de Heine, f est aussi uniformément continue, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ telle que

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

On considère une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ telles que $\max(x_{i+1} - x_i) < \eta$; puis que $\frac{b-a}{m}$ converge vers zéro, soit $m \geq 1$ tel que $\frac{b-a}{m} < \eta$, Il suffit de prendre $S = \{x_i = a + i \frac{b-a}{m}\}_{0 \leq i \leq m-1}$. on définit les fonctions en escalier :

$$\varphi_\epsilon(t) = f(x_i) - \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \psi_\epsilon(t) = f(x_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \quad x_i < t < x_{i+1}, \quad 0 < i < m-1,$$

Pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$ on a $0 < t - x_i < x_{i+1} - x_i < \eta$ donc

$|f(x_i) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ ce qui signifie que $f(x_i) - \frac{\epsilon}{2(b-a)} < f(t) < f(x_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ c'est-à-dire $\varphi_\epsilon(t) < f(t) < \psi_\epsilon(t)$ par ailleurs

$$\int_a^b \psi_\epsilon(t) - \varphi_\epsilon(t) dt = \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} - f(x_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}) (x_{i+1} - x_i)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_\epsilon(t) - \varphi_\epsilon(t) dt &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(f(x_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} - f(x_i) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \right) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\epsilon}{2(b-a)} \right) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Pour $\epsilon = 1/n$, on aura alors des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ telles que :

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

3.4. Relation de Chasles

Proposition 10 (Relation de Chasles).

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$.

(i) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$

(ii) Si f est intégrable sur $[a, c]$ sur $[c, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$

(iii) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Preuve.

La relation de Chasles est évidente pour les fonctions en escalier.

(i) Si pour $\epsilon > 0$ il existe φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \int_a^b (\psi - \varphi)(t) dt < \epsilon$$

alors les restrictions ψ_1 et φ_1 (Respectivement ψ_2 et φ_2 de φ et ψ à $[a, c]$ (respectivement à $[c, b]$)

alors ces quatre fonctions sont en escalier et encadrent f avec

$$0 \leq \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t) dt < \epsilon \text{ et } 0 \leq \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t) dt < \epsilon$$

alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

(ii) Si f est intégrable sur $[a, c]$ sur $[c, b]$ alors pour $\epsilon > 0$ il existe

ψ_1, φ_1 et ψ_2, φ_2 respectivement sur $[a, c]$ et $[c, b]$ telles que $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ et $\varphi_2 \leq f \leq \psi_2$ respectivement sur $[a, c]$ et $[c, b]$ avec $0 \leq \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t) dt < \epsilon$ et $0 \leq \int_c^b (\psi_2 - \varphi_2)(t) dt < \epsilon$ considérons les fonctions φ et ψ données sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } a \leq x < c \\ \varphi_2(x) & \text{si } c \leq x < b \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{si } a \leq x < c \\ \psi_2(x) & \text{si } c \leq x < b \end{cases}$$

Il est claire que φ et ψ sont en escalier sur $[a, b]$ avec

$$0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi)(t) dt = \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t) dt + \int_c^b (\psi_2 - \varphi_2)(t) dt < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Ainsi f est intégrable sur $[a, b]$

(iii) Pour les fonctions en escalier on a si

$$\varphi_{1,n} \leq f \leq \psi_{1,n} \text{ sur } [a, c] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c (\psi_{1,n} - \varphi_{1,n})(t) dt = 0$$

et

$$\varphi_{2,n} \leq f \leq \psi_{2,n} \text{ sur } [c, b] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b (\psi_{2,n} - \varphi_{2,n})(t) dt = 0$$

alors φ_n et ψ_n définie comme φ et ψ ci-dessus satisfont

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ sur } [c, b] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t)dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^c \psi_n(t)dt + \int_c^b \psi_n(t)dt \right) \\
 \int_a^b f(t)dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^c \psi_n(t)dt + \int_c^b \psi_n(t)dt \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c \psi_n(t)dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b \psi_n(t)dt \\
 &= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt
 \end{aligned}$$

Puisque

$$0 = \int_a^a f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

on aura donc

Corollaire 1.

Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

En particulier, la relation

$$\int_e^d f(x) dx = \int_e^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

est vraie quel que soient les relations d'ordre entre e , c et d dans $[a, b]$.

Théorème 7.

Si f est continue (respectivement monotone) par morceaux sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Se déduit d'après la relation de Chasles et la propriété de la continuité et de la monotonie

4. Primitive et intégrales

Dans cette section, $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$.

4.1. Le théorème fondamental

On s'intéresse à la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$x \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Proposition 11.

si $|f| \leq M$ sur $[a, b]$, alors pour tous x et y dans $[a, b]$,

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$$

Preuve.

Supposons que $x \geq y$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| = \left| \int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)dt \right|$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)dt \right| \\ &= \int_y^x f(t)dt \\ &< \int_y^x M dt \\ &= M(x - y) \end{aligned}$$

Corollaire 2.

La fonction $F : x \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est Lipschitzienne donc uniformément continue sur $[a, b]$

Théorème 8.

Soit $x_0 \in [a, b]$. Les assertions suivantes sont satisfaites :

(a) Si f admet une limite réelle l à droite au point x_0 alors F admet une dérivée à droite en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(t) = l \in \mathbf{R} \Rightarrow F'_d(x_0) = l$$

(b) Si f admet une limite réelle l à gauche au point x_0 alors F admet une dérivée à gauche en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(t) = l \in \mathbf{R} \Rightarrow F'_g(x_0) = l$$

(c) Si f admet une limite réelle l au point x_0 alors F admet une dérivée en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(t) = l \in \mathbf{R} \Rightarrow F'(x_0) = l$$

(d) Si f est continue au point x_0 alors F a une dérivée en x_0 égale à $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0) \in \mathbf{R} \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

Preuve.

.

(a) Si f admet une limite réelle l à droite au point x_0 c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon, \exists \eta > 0 : 0 < h < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon, \forall x \in]x_0, x_0 + h[\quad (*)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - l \right| &= \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - lh}{h} \right| \\
 &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - lh \right| \\
 &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - l| dt \\
 &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon dt \\
 &= \epsilon
 \end{aligned}$$

D'où $F'_d(x_0) = l$

(b) la même que (a)

(c) c'est juste (a) et (b)

(d) c'est (c) pour $l = f(x_0)$.

Théorème 9.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors F est dérivable avec $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]a, b[$, $F'_d(a) = f(a)$ et $F'_g(b) = f(b)$

On remarque que si la fonction F n'est pas dérivable, alors f ne sera plus continue. Un exemple est donné par :

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

n'est pas dérivable puisque $F'_g(1) = 1$ et $F'_d(1) = 2$ et pour laquelle

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

n'est pas continue.

Définition 7.

On dit que G est une **primitive** de f sur $[a, b]$ si G est une fonction dérivable sur $[a, b]$ vérifiant $G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemple 8.

1. Soit $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f . La fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f .
2. Soit $I = [0, +\infty[$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I . Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g .

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition 12.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$ mais comme $F'(x) = f(x)$ alors $G'(x) = f(x)$ et G est bien une primitive de f .

Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f . Alors $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, ainsi la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, c'est donc une fonction constante ! Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$. Autrement dit $G(x) = F(x) + c$ (pour tout $x \in I$). $\square$

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t) dt$ ou $\int f(x) dx$ ou $\int f(u) du$ (les lettres $t, x, u, \dots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.

La proposition 12 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c , tel que $F = \int f(t) dt + c$. Attention : $\int f(t) dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément nous verrons que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 13.

Soient F une primitive de f et G une primitive de g . Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf .

4.2. Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x dx = e^x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \cos x dx = \sin x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \quad \text{sur }]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c \quad \text{sur }]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[$

$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c, \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad \text{sur }]-1, 1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} x + c \\ \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Argch} x + c \\ \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c \end{cases} \quad \text{sur } x \in]1, +\infty[$

Remarque.

Ces primitives sont à connaître par cœur.

1. Voici comment lire ce tableau. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ alors la fonction : $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Les primitives de f sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (pour c une constante réelle quelconque). Et on écrit $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.
2. Souvenez vous que la variable sous le symbole intégrale est une variable muette. On peut aussi bien écrire $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$.
3. La constante est définie pour un intervalle. Si l'on a deux intervalles, il y a deux constantes qui peuvent être différentes. Par exemple pour $\int \frac{1}{x} dx$ nous avons deux domaines de validité : $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$. Donc $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c_1$ si $x > 0$ et $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c_2 = \ln(-x) + c_2$ si $x < 0$.
4. On peut trouver des primitives aux allures très différentes par exemple $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arccos x$ sont deux primitives de la même fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Mais bien sûr on sait que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, donc les primitives diffèrent bien d'une constante !

4.3. Relation primitive-intégrale**Théorème 10.**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de f , c'est-à-dire F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Notation. On note $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 9.

Nous allons pouvoir calculer plein d'intégrales. Recalculons d'abord les intégrales déjà rencontrées.

1. Pour $f(x) = e^x$ une primitive est $F(x) = e^x$ donc

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

2. Pour $g(x) = x^2$ une primitive est $G(x) = \frac{x^3}{3}$ donc

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. $\int_a^x \cos t dt = [\sin t]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$ est une primitive de $\cos x$.

4. Si f est impaire alors ses primitives sont paires (le montrer). En déduire que $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Remarque.

1. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est même **l'unique primitive de f qui s'annule en a** .

2. En particulier si F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$.

- On évitera la notation $\int_a^x f(x) dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t) dt$ ou $\int_a^x f(u) du$ pour éviter toute confusion.
- Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérons par exemple $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. f est intégrable sur $[0, 1]$ mais elle n'admet pas de primitive sur $[0, 1]$. En effet par l'absurde si F était une primitive de f , par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$. Alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $F(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Mais alors nous obtenons une contradiction car F n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

5. Intégration par parties – Changement de variable

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent de calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

5.1. Intégration par parties

Théorème 11.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Notation. Le crochet $[F]_a^b$ est par définition $[F]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Si l'on omet les bornes alors $[F]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.

La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x) dx = [uv] - \int u'(x)v(x) dx.$$

La preuve est très simple :

Démonstration. On a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc $\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$. D'où $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$. $\square$

L'utilisation de l'intégration par parties repose sur l'idée suivante : on ne sait pas calculer directement l'intégrale d'une fonction f s'écrivant comme un produit $f(x) = u(x)v'(x)$ mais si l'on sait calculer l'intégrale de $g(x) = u'(x)v(x)$ (que l'on espère plus simple) alors par la formule d'intégration par parties on aura l'intégrale de f .

Exemple 10.

- Calcul de $\int_0^1 xe^x dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx \\ &= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e^1 - e^0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Calcul de $\int_1^e x \ln x \, dx$.

On pose cette fois $u = \ln x$ et $v' = x$. Ainsi $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \cdot x \, dx &= \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\ &= \left(\ln e \frac{e^2}{2} - \ln 1 \frac{1^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4} \end{aligned}$$

3. Calcul de $\int \arcsin x \, dx$.

Pour déterminer une primitive de $\arcsin x$, nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant $\arcsin x = 1 \cdot \arcsin x$ pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose $u = \arcsin x$, $v' = 1$ (et donc $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v = x$) alors

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \arcsin x \, dx &= [x \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= [x \arcsin x] - [-\sqrt{1-x^2}] \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

4. Calcul de $\int x^2 e^x \, dx$. On pose $u = x^2$ et $v' = e^x$ pour obtenir :

$$\int x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x] - 2 \int x e^x \, dx$$

On refait une deuxième intégration par parties pour calculer

$$\int x e^x \, dx = [x e^x] - \int e^x \, dx = (x-1)e^x + c$$

D'où

$$\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

Exemple 11.

Nous allons étudier les intégrales définies par $I_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n} \, dx$, pour tout entier $n > 0$.

1. Montrer que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

Pour $0 \leq x \leq 1$, on a $0 < x+n \leq x+n+1$ et $\sin(\pi x) \geq 0$, donc $0 \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leq \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$. D'où $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ par la positivité de l'intégrale.

2. Montrer que $I_n \leq \ln \frac{n+1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

De $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$, on a $\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leq \frac{1}{x+n}$. D'où $0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n} \, dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln \frac{n+1}{n} \rightarrow 0$.

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.

Nous allons faire une intégration par parties avec $u = \frac{1}{x+n}$ et $v' = \sin(\pi x)$ (et donc $u' = -\frac{1}{(x+n)^2}$ et $v = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$) :

$$\begin{aligned} nI_n &= n \int_0^1 \frac{1}{x+n} \sin(\pi x) \, dx \\ &= -\frac{n}{\pi} \left[\frac{1}{x+n} \cos(\pi x) \right]_0^1 - \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2} \cos(\pi x) \, dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi} J_n \end{aligned}$$

Il nous reste à évaluer $J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{\pi} J_n \right| &\leq \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2} dx \leq \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2} dx \\ &= \frac{n}{\pi} \left[-\frac{1}{x+n} \right]_0^1 = \frac{n}{\pi} \left(-\frac{1}{1+n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi} J_n = \frac{2}{\pi}$.

5.2. Changement de variable

Théorème 12.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Voici un moyen simple de s'en souvenir. En effet si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t) dt$. D'où la substitution $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

Démonstration. Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \quad \square$

Remarque.

Comme φ est une bijection de J sur $\varphi(J)$, sa réciproque φ^{-1} existe et est dérivable sauf quand φ s'annule. Si φ ne s'annule pas, on peut écrire $t = \varphi^{-1}(x)$ et faire un changement de variable en sens inverse.

Exemple 12.

Calculons la primitive $F = \int \tan t dt$.

$$F = \int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt.$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln|u|$. Donc $F = \int -\frac{u'}{u} = -[\ln|u|] = -\ln|u| + c = -\ln|\cos t| + c$.

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$; alors $F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t) dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x) dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln|x| + c.$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.

Remarque : pour que l'intégrale soit bien définie il faut que $\tan t$ soit définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. La restriction d'une primitive à un intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ est donc de la forme $-\ln|\cos t| + c$. Mais la constante c peut être différente sur un intervalle différent.

Exemple 13.

Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$.

Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \varphi'(x) dx = -2x dx$. Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x) = -2x$, φ est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, \frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{x dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2} \int_1^{3/4} u^{-3/2} du \\ &= -\frac{1}{2} \left[-2u^{-1/2} \right]_1^{3/4} = \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1. \end{aligned}$$

Exemple 14.

Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx$.

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$ et $dx = \cos t dt$. De plus $t = \arcsin x$ donc pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Comme φ est une bijection de $[0, \frac{\pi}{6}]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t} dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t} dt = [\tan t]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exemple 15.

Calcul de $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

Soit le changement de variable $x = \tan t$ donc $t = \arctan x$ et $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ (la fonction tangente établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$). Donc

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \int (\cos^2 t)^{3/2} \frac{dt}{\cos^2 t} \quad \text{car } 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ &= \int \cos t dt = [\sin t] = \sin t + c = \sin(\arctan x) + c \end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \sin(\arctan x) + c.$$

En manipulant un peu les fonctions on trouverait que la primitive s'écrit aussi $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$.

Mini-exercices.

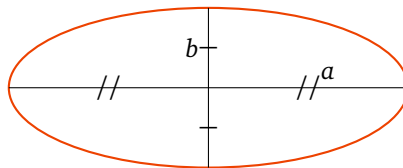
1. Calculer les intégrales à l'aide d'intégrations par parties : $\int_0^{\pi/2} t \sin t dt$, $\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt$, puis par récurrence $\int_0^{\pi/2} t^n \sin t dt$.
2. Déterminer les primitives à l'aide d'intégrations par parties : $\int t \operatorname{sh} t dt$, $\int t^2 \operatorname{sh} t dt$, puis par récurrence $\int t^n \operatorname{sh} t dt$.
3. Calculer les intégrales à l'aide de changements de variable : $\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} dt$; $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt$ (pour ce dernier poser deux changements de variables : $u = \cos t$, puis $v = 1 - u$).

4. Déterminer les primitives suivantes à l'aide de changements de variable : $\int \operatorname{th} t \, dt$ où $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $\int e^{\sqrt{t}} \, dt$.

6. Intégration des fractions rationnelles

Nous savons intégrer beaucoup de fonctions simples. Par exemple toutes les fonctions polynomiales : si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ alors $\int f(x) \, dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \dots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

Il faut être conscient cependant que beaucoup de fonctions ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions simples. Par exemple si $f(t) = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$ alors l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(t) \, dt$ ne peut pas s'exprimer comme somme, produit, inverse ou composition de fonctions que vous connaissez. En fait cette intégrale vaut la longueur d'une ellipse d'équation paramétrique $(a \cos t, b \sin t)$; il n'y a donc pas de formule pour le périmètre d'une ellipse (sauf si $a = b$ auquel cas l'ellipse est un cercle!).



Mais de façon remarquable, il y a toute une famille de fonctions que l'on saura intégrer : les fractions rationnelles.

6.1. Trois situations de base

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{ax+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{ax+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.

On a donc

$$\int f(x) \, dx = A \ln |x - x_1| + B \ln |x - x_2| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[,]x_1, x_2[,]x_2, +\infty[$ (si $x_1 < x_2$).

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x) = \frac{ax+\beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$. On a alors

$$\int f(x) \, dx = -\frac{A}{x-x_0} + B \ln |x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[,]x_0, +\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple.

Exemple 16.

Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$. Voir (TD)

6.2. Intégration des éléments simples

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x), Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels. Alors la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^k} \quad \text{avec } b^2 - 4ac < 0$$

où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. On sait intégrer le polynôme $E(x)$.

2. Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$.

(a) Si $k = 1$ alors $\int \frac{\gamma dx}{x-x_0} = \gamma \ln|x-x_0| + c_0$ (sur $] -\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).

(b) Si $k \geq 2$ alors $\int \frac{\gamma dx}{(x-x_0)^k} = \gamma \int (x-x_0)^{-k} dx = \frac{\gamma}{-k+1} (x-x_0)^{-k+1} + c_0$ (sur $] -\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).

3. Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^k}$. On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^k} = \gamma \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^k} + \delta \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

(a) Si $k = 1$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + c_0 = \ln|ax^2 + bx + c| + c_0$.

(b) Si $k \geq 2$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k} dx = \frac{1}{-k+1} u(x)^{-k+1} + c_0 = \frac{1}{-k+1} (ax^2 + bx + c)^{-k+1} + c_0$.

(c) Si $k = 1$, calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$. Par un changement de variable $u = px + q$ on se ramène à calculer une primitive du type $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c_0$.

(d) Si $k \geq 2$, calcul de $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k} dx$. On effectue le changement de variable $u = px + q$ pour se ramener au calcul de $I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1} .

Par exemple calculons I_2 . Partant de $I_1 = \int \frac{du}{u^2+1}$ on pose $f = \frac{1}{u^2+1}$ et $g' = 1$. La formule d'intégration par parties $\int f g' = [f g] - \int f' g$ donne (avec $f' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g = u$)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{du}{u^2+1} = \left[\frac{u}{u^2+1} \right] + \int \frac{2u^2 du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1} \right] + 2 \int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2} du \\ &= \left[\frac{u}{u^2+1} \right] + 2 \int \frac{du}{u^2+1} - 2 \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1} \right] + 2I_1 - 2I_2 \end{aligned}$$

On en déduit $I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \frac{u}{u^2+1} + c_0$. Mais comme $I_1 = \arctan u$ alors

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2} \arctan u + \frac{1}{2} \frac{u}{u^2+1} + c_0.$$

6.3. Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x) dx$ ou de la forme $\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle.

Il existe deux méthodes :

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;
- le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Les règles de Bioche. On note $\omega(x) = f(x) dx$. On a alors $\omega(-x) = f(-x) d(-x) = -f(-x) dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x) d(\pi - x) = -f(\pi - x) dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple 17.

Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x \, dx}{2 - \cos^2 x}$ Voir (TD)

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan \frac{x}{2}$.

Avec $t = \tan \frac{x}{2}$ on a		
$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$
et $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$.		

Exemple 18.

Calcul de l'intégrale $\int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{1 - \sin x}$.

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[-1, 0]$ (pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $t = -1$ et pour $x = 0$, $t = 0$). De plus on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{1 - \sin x} &= \int_{-1}^0 \frac{\frac{2 \, dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = 2 \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2 \int_{-1}^0 \frac{dt}{(1-t)^2} = 2 \left[\frac{1}{1-t} \right]_{-1}^0 = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Mini-exercices.

1. Calculer les primitives $\int \frac{4x+5}{x^2+x-2} \, dx$, $\int \frac{6-x}{x^2-4x+4} \, dx$, $\int \frac{2x-4}{(x-2)^2+1} \, dx$, $\int \frac{1}{(x-2)^2+1} \, dx$.
2. Calculer les primitives $I_k = \int \frac{dx}{(x-1)^k}$ pour tout $k \geq 1$. Idem avec $J_k = \int \frac{x \, dx}{(x^2+1)^k}$.
3. Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, $\int_0^1 \frac{x \, dx}{x^2+x+1}$, $\int_0^1 \frac{x \, dx}{(x^2+x+1)^2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.
4. Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x \, dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$, $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$.

7. Sommes de Darboux et de Riemann

7.1. Sommes de Darboux

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$. On note :

- $m_k = \inf_{x_k < x < x_{k+1}} f(x)$, $M_k = \sup_{x_k < x < x_{k+1}} f(x)$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$.
- $\mathfrak{s}(S, f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$ et $\mathfrak{S}(S, f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$, (appelées petite et grande sommes de Darboux).
- $\mathfrak{s}_a^b(f) = \sup\{\mathfrak{s}(S, f), S \text{ subdivision de } [a, b]\}$.
- $\mathfrak{S}_a^b(f) = \inf\{\mathfrak{S}(S, f), S \text{ subdivision de } [a, b]\}$.

Théorème 13.

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est intégrable.
2. $\mathfrak{s}_a^b(f) = \mathfrak{S}_a^b(f)$.

Preuve.

Évidemment,

$$\mathfrak{s}_a^b(f) \leq i_a^b(f) \leq I_a^b(f) \leq \mathfrak{S}_a^b(f)$$

Donc si 2) est vérifié alors f est intégrable. Réciproquement si f est intégrable alors $i_a^b(f) = \int_a^b f(t)dt$ et pour $\varepsilon > 0$ il existe φ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\varphi \leq f$ et

$$i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(t)dt \leq i_a^b(\varphi)$$

Il est à noter que pour une fonction en escalier φ on a

$$\mathfrak{s}_a^b(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt = \mathfrak{S}_a^b(\varphi)$$

donc

$$i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(t)dt = \mathfrak{s}_a^b(\varphi) \leq \mathfrak{s}_a^b(f)$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $i_a^b(f) - \varepsilon < \mathfrak{s}_a^b(f)$ donc $i_a^b(f) \leq \mathfrak{s}_a^b(f)$ et par suite, $i_a^b(f) = \mathfrak{s}_a^b(f)$. De la même façon, $I_a^b(f) = \mathfrak{S}_a^b(f)$. D'où 2). $\square$

7.2. Sommes de Riemann

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$. On considère $\mathfrak{E} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$ une famille de réels tels que $e_i \in [x_i, x_{i+1}]$ pour tout i . On note

$$\mathfrak{R}(S, \mathfrak{E}, f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(e_k)(x_{k+1} - x_k)$$

(appelées sommes de Riemann de f relative à $\mathfrak{E}$ dans S)

Théorème 14.

Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} [\mathfrak{R}(S, \mathfrak{E}, f)]$$

Preuve.

Identique à celle des sommes de Darboux.

Un cas particulier de ce théorème est lorsqu'on considère la subdivision

$$S_n = \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b\}, n \geq 1$$

sur $[a, b]$ dont le diamètre est $\delta(S_n) = \frac{b-a}{n}$ donc $\delta(S_n)$ converge vers 0 ainsi On peut ainsi énoncer

Corollaire 3.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors

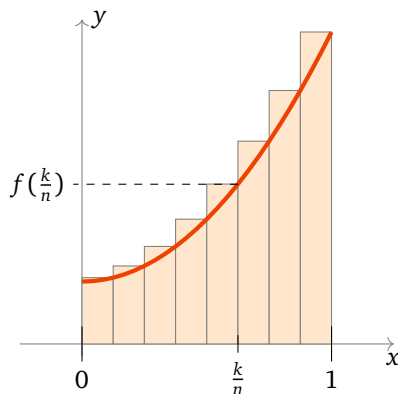
$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx}$$

La somme S_n s'appelle la **somme de Riemann** associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité

droite.

Le cas le plus utile est le cas où $a = 0$, $b = 1$ alors $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f(a + k\frac{b-a}{n}) = f(\frac{k}{n})$ et ainsi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$



Remarque.

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Exemple 19.

Calculer la limite de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

On a $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \dots$

La somme S_n s'écrit aussi $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \rightarrow \ln 2$ (lorsque $n \rightarrow +\infty$).

Mini-exercices.

1. Trouver les primitives des fonctions : $x^3 - x^7$, $\cos x + \exp x$, $\sin(2x)$, $1 + \sqrt{x} + x$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{x+1}$.
2. Trouver les primitives des fonctions : $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(\frac{x}{2})$, $\frac{1}{1+4x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Trouver une primitive de $x^2 e^x$ sous la forme $(ax^2 + bx + c)e^x$.
4. Trouver toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ (préciser les intervalles et les constantes).
5. Calculer les intégrales $\int_0^1 x^n dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_1^e \frac{1-x}{x^2} dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1}$.
6. Calculer la limite (lorsque $n \rightarrow +\infty$) de la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{k/n}}{n}$. Idem avec $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2}$.

8. Intégrale généralisée

Définition 8.

Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est Intégrale généralisée si

- (1) $a = -\infty$ ou
- (2) $a = +\infty$ ou
- (3) $\sup\{|f(x)|, x \in (a, b)\} = +\infty$

Pour tout intervalle borné $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, f est Riemann intégrable sur $[\alpha, \beta]$ Par définition,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a, \beta \rightarrow b} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Lorsque cette limite existe dans $\mathbf{R}$ on dit que l'intégrale généralisée est convergente. Si cette limite n'existe pas on dira que l'intégrale impropre est divergente.

Exemple 20.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp^{-x^2} dx, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx, \quad I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)} \quad I_5 = \int_0^2 \frac{dx}{x-1}$$

(1) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} dx$. On pose

$$I_1(\beta) = \int_0^{\beta} \frac{dx}{x^2+1} dx, \quad \beta \in \mathbf{R}_+$$

qui est bien une intégrale de Riemann.

$$\begin{aligned} I_1(\beta) &= \int_0^{\beta} \frac{dx}{x^2+1} dx \\ &= [\arctan(x)]_0^{\beta} \\ &= \arctan(\beta) \end{aligned}$$

$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} (I_1(\beta)) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\arctan(\beta)) = \pi/2$ l'intégrale généralisée I_1 est convergente avec

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} dx = \pi/2$$

(2) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp^{-x^2} dx$ est une intégrale généralisée qui est égale, d'après la relation de Chasles, à

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x \exp^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} x \exp^{-x^2} dx$$

On pose alors $I_{2,1}(\alpha) = \int_{\alpha}^0 x \exp^{-x^2} dx$ et $I_{2,2}(\beta) = \int_0^{\beta} x \exp^{-x^2} dx$ où $0 \in [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} I_{2,1}(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 x \exp^{-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \exp^{-x^2}\right]_{\alpha}^0 \end{aligned}$$

qui converge vers $-\frac{1}{2}$.

Identiquement on aura $I_{2,2}$ converge vers $\frac{1}{2}$ ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp^{-x^2} dx = 0$

(3) $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ est une intégrale généralisée puisque :

$$\sup_{0 < x < 1} \left\{ \left| \frac{1}{x} \right| \right\} = +\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\ln(x)]_{\alpha}^1 = +\infty$$

Donc I_3 est divergente.

(4) $I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ est une intégrale impropre qui admet deux points de singularité : 0 et 2. On pose

$$I_{(4,1)} = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} \text{ et } I_{(4,2)} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)}$$

$$I_{(4,1)}(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)} \text{ et } I_{(4,2)}(\beta) = \int_1^\beta \frac{dx}{x(x-2)}$$

par réduction en élément simple on aura

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)} dx = -\infty$$

D'où $I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge donc l'intégrale impropre $I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge.

(5) $I_5 = \int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ est impropre. D'après la relation de Chasles on a

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$$

$$I_{(5,1)} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} \text{ et } I_{(5,2)} = \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$$

$$I_{(5,1)}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{x-1} \text{ et } I_{(5,2)}(\beta) = \int_\beta^2 \frac{dx}{x-1}$$

$$I_{(5,2)}(\beta) = \int_\beta^2 \frac{dx}{x-1}$$

$$= [\ln(x-1)]_\beta^2$$

$$= -\ln(\beta-1)$$

Et

$$\lim_{\beta \rightarrow 1^+} I_{(5,2)}(\beta) = +\infty$$

Ainsi $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ diverge et par conséquence $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ est divergente.