Université Moulay Ismail
FST-Errachidia
Département de Mathématiques
Responsables: Profs. A. Hafidi et M. Tahiri

Année Universitaire 2022-2023
Filière MIP
Module M111

Examen d'Analyse 1 (durée : 2 heurs)
20 Janvier 2023

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables sont également interdits.

Exercice 1.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \dfrac{1}{n+2}$. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = nu_n$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
   b. En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0, 1]$.
   c. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L(1-L)$.
   d. On suppose ici $L \neq 1$. Montrer :
   $\exists n_0 \in \mathbb{N} |\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1-L)}{2n}$.

Exercice 2.

1. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$,
$$\frac{\alpha}{(k+1)^{1-\alpha}} \leq (k+1)^\alpha - k^\alpha \leq \frac{\alpha}{k^{1-\alpha}}.$$

2. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a
$$\frac{(n+1)^\alpha - 1}{\alpha} \leq S_n \leq \frac{n^\alpha - 1}{\alpha} + 1.$$

   b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3.

1. Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :

   a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}$, b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\sin^2(x)}$.

2. Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$.

   a) Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

   b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Bonne chance.