

Travaux dirigés : Calcul de résidus

- Exercice 1** 1. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x^2 + ixy^3$. Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que $f|_U$ est holomorphe ?
2. Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Si $z = x + iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = \ln|z| + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
Montrer que f est holomorphe sur U .

- Exercice 2** 1. Calculer par la formule intégrale de Cauchy :

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz.$$

où C est le cercle unité $|z| = 1$ parcouru dans le sens direct.

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sin \theta) e^{\cos(\theta)} d\theta.$$

- Exercice 3** Soit f la fonction définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$

- Déterminer les pôles de f avec leur ordre de multiplicité.
- Calculer $\operatorname{Res}(f, \frac{i\pi}{2})$.
- Soient R un réel strictement positif et $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R, R, R+i\pi$ et $-R+i\pi$ orienté dans le sens positif. On notera également $\gamma_1(R)$ le segment orienté de $-R$ à R , $\gamma_2(R)$ le segment orienté de R à $R+i\pi$, $\gamma_3(R)$ le segment orienté de $R+i\pi$ à $-R+i\pi$ et $\gamma_4(R)$ le segment orienté de $-R+i\pi$ à $-R$.

(a) Justifier que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2(R)} f(z) dz = 0$

(b) Justifier que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_4(R)} f(z) dz = 0$

(c) Exprimer $\int_{\gamma_3(R)} f(z) dz$ en fonction de $\int_{\gamma_1(R)} f(z) dz$

(d) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx$

- Exercice 4** Soit Γ_R le contour défini par le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamètre $[-R, R]$ parcouru dans le sens direct, avec $R > 1$.

1. Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$.

2. En déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

3. Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Serie 4

Conditions de Cauchy-Riemann

Soit f une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Ecrivant un nombre complexe z sous la forme $z = x + iy$ où

$x, y \in \mathbb{R}$. f peut être vue comme une fonction de deux variables,

qu'on écrit $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$

Supposons que f soit différentiable

en $z_0 = (x_0, y_0)$, comme fonction

de deux variables. Une condition nécessaire et suffisante pour

que f soit holomorphe en z_0

est que les équations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

^

EX01

$$\underline{1)} \quad z = x + iy$$

$$f(z) = x^2 + ixy^3$$

f holomorphe en z ssi f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann avec $P(x, y) = x^2$ et $Q(x, y) = xy^3$

$$\text{on a } \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 3xy^2$$

Donc f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en z ssi $z = 0$ et puisque $\{0\}$

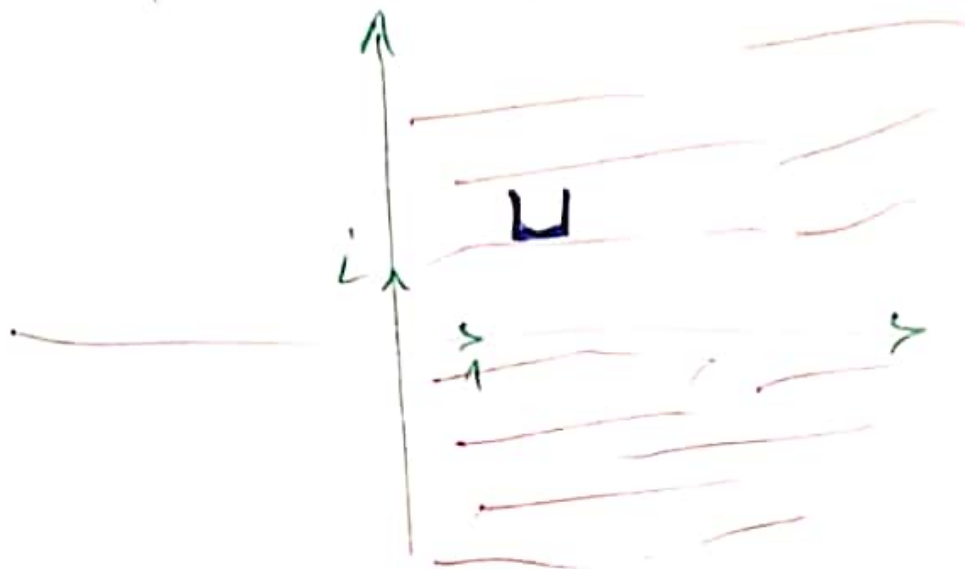
ne contient aucun ouvert de $\mathbb{C}$, alors il n'existe aucun ouvert U de $\mathbb{C}$ tq $f|_U$ est

holomorphe

Exo 1

2)

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$$



$$\begin{aligned} f(z) &= \ln(z) + i \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \ln(x^2 + y^2)^{1/2} + i \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ Q(x, y) &= \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = - \frac{\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \\ &= - \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Série 4

EX01

2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(x, y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_y}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1/x}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

On voit facilement que les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées sur $\mathbb{D}$ ainsi que f est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

EX02

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \rightarrow e^z$

f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et γ est un chemin fermé orienté positivement, alors d'après la formule intégrale de Cauchy on obtient

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

Série 4

EX02

2) Dédution

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i$$

$$\text{Sur } C \text{ on a } z = e^{i\theta} \text{ ou } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow \frac{dz}{z} = i d\theta$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{e^z}{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} i d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i\sin\theta} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} (\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)) d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} \sin(\sin\theta) e^{\cos\theta} d\theta$$

et par identification, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \cos(\sin\theta) e^{\cos\theta} d\theta = 2\pi$$

Série 4

Exercice 3 Solution :

1. Écrivons $z = a + ib$ de sorte que $e^{2z} = e^{2a}e^{2ib}$. Prenons le module. On obtient $e^{2a} = 1$ et donc $a = 0$. On a ensuite $e^{2ib} = -1 = e^{i\pi}$ dont les solutions sont $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{i\frac{\pi}{2} + ik\pi\}$. Puisque $e^z + e^{-z} = 0$ si et seulement si $e^{2z} = -1$, donc les pôles de f sont $\{i\frac{\pi}{2} + ik\pi\}$ qui sont des pôles simples.
2. Posons $h(z) = e^{iz}$ et $g(z) = e^z + e^{-z}$. Alors

$$\text{Res}(f, \frac{i\pi}{2}) = \frac{h(\frac{i\pi}{2})}{g'(\frac{i\pi}{2})} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i} = -i \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

3. (a) On a

$$\int_{\gamma_2(R)} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{ie^{iR-t}}{e^{R+it} + e^{-R-it}} dt = ie^{iR} \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{e^R e^{it} + e^{-R} e^{-it}} dt$$

On majore en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\int_{\gamma_2(R)} f(z) dz| &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-t}}{e^R - e^{-R}} dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{1}{e^R - e^{-R}} dt \\ &\leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \end{aligned}$$

Par passage à la limite on obtient le résultat demandé.

- (b) De la même manière que la question précédente.

- (c) On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3(R)} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}} dx \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{-i\pi} e^{ix}}{-e^x - e^{-x}} dx \\ &= e^{-i\pi} \int_{\gamma_1(R)} f(z) dz \end{aligned}$$

- (d) On a

$$\int_{\Gamma(R)} f(z) dz = (1 + e^{-i\pi}) \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx + \int_{\gamma_2(R)} f(z) dz + \int_{\gamma_4(R)} f(z) dz$$

Faisant tendre R vers $+\infty$ en utilisant les questions précédentes, on a

$$\pi e^{-\frac{\pi}{2}} = (1 + e^{-i\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx$$

On en déduit que

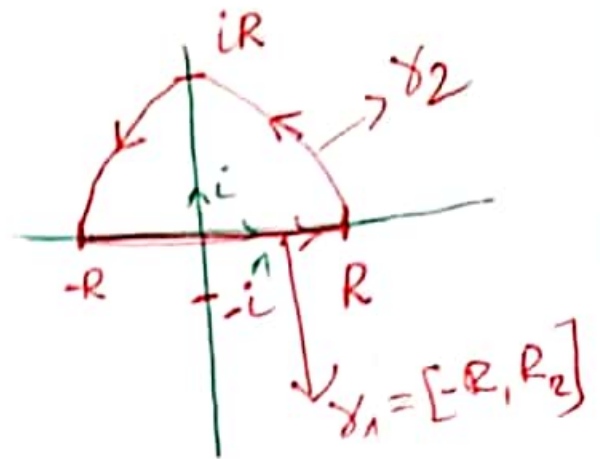
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{-i\pi}} = \frac{\pi}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

Prenant la partie réelle de cette égalité, on obtient le résultat demandé.

Série 4

Exo 4

1) Calculer l'intégrale

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$$


On a:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz &= \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \left(\frac{e^{iz}}{z-i} - \frac{e^{iz}}{z+i} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z-i} dz - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+i} dz \\ &= \pi \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z-i} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z+i} dz \right) \\ &= \pi e^{i(i)} - 0 \quad \left(\begin{array}{l} -i \text{ se trouve} \\ \text{à l'extérieur} \\ \text{du chemin} \end{array} \right) \\ &= \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

Déduction de la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

Exo 4

2) On a

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$$

or $\int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \quad (z=x)$

$$= \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin(x)}{1+x^2} dx$$

$$= \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

et $\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{1+(Re^{i\theta})^2} iRe^{i\theta} d\theta \quad (z=Re^{i\theta})$

$$= iR \int_0^\pi \frac{e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} e^{i\theta}}{1+R^2 e^{2i\theta}} d\theta$$

Passons à la norme

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| = R \left| \int_0^\pi \frac{e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} e^{i\theta}}{1+R^2 e^{2i\theta}} d\theta \right|$$

$$\leq R \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2 - 1} d\theta$$

$$\leq \frac{R\pi}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

8

Série 4

Exo 4

2) D'où $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{e} &= \int_{H_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

3) Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

Considérons la fonction suivante :

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{1}{1+z^4}$$

Déterminons les pôles de f
 z pôle de f ssi z racine du
polynôme $1+z^4$

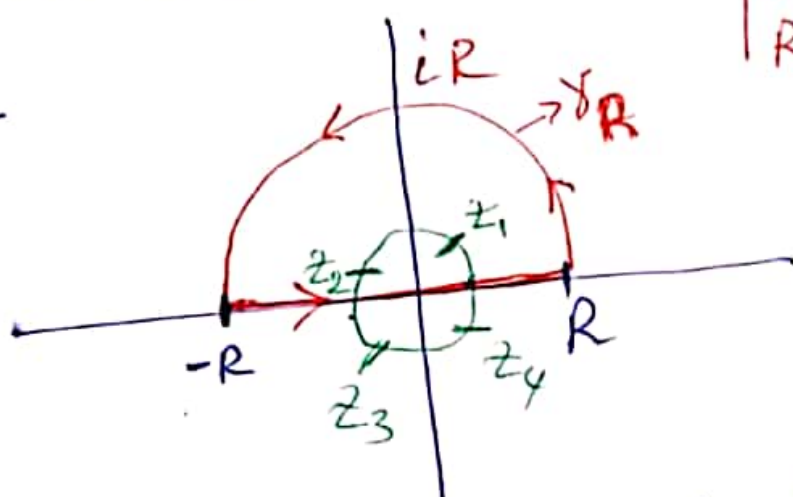
Série 4

Exo 4

3] On a: $z^4 + 1 = 0$ ssi $z^4 = -1$
 ssi $z^4 = e^{i\pi + i2k\pi}$
 ssi $z^4 = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2k\pi}{2}}$
 ssi $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Alors les pôles de f sont
 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$
 sont tous des pôles simples
 et considérons le chemin suivant

$R > 1$



C'est un chemin orienté positif
 et contient deux pôles z_1 et z_2
 D'après le Théorème des résidus

On a

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2))$$

Série 4

Exo 4

3) Posons $h(z) = 1$ et $g(z) = 1 + z^4$
 alors $\text{Res}(f, z_1) = \frac{h(z_1)}{g'(z_1)} = \frac{1}{4z_1^3}$

$$= \frac{z_1}{-4}$$

De même $\text{Res}(f, z_2) = \frac{z_2}{-4}$

et
$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \frac{z_1 + z_2}{-4}$$

$$= 2\pi i \frac{2i \sin(\frac{\pi}{4})}{-4}$$

$$= -\pi \sin(\frac{\pi}{4}) = + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

on a aussi

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$

$$= \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz$$

car sur $[-R, R]$ on a $z = x$.

Série 4

EX04

$$\begin{aligned} \text{On a } \int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+R^4 e^{i4\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \\ &\quad \left(\begin{array}{l} z = R e^{i\theta} \\ dz = i R e^{i\theta} d\theta \end{array} \right) \end{aligned}$$

Passons à la norme

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &= R \left| \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta}}{1+R^4 e^{i4\theta}} d\theta \right| \\ &\leq R \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^4 - 1} d\theta \\ &\leq \frac{\pi R}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \end{aligned}$$

Fin