Fonctions Riemann intégrables

Mustapha LAAYOUNI

Dimanche 17 mai 2020

1 Fonctions en escalier

1.1 Subdivisions

Une subdivision d'un intervalle $[a,b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) est une famille finie $S = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$ de réels tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. On appelle diamètre de la subdivision S la quantité:

$$\delta(S) = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, 2..., n-1\}$$

Une subdivision S_1 de $[a;b]$ est dite plus fine qu'une subdivision S_0 de $[a;b]$ si $S_1 \subset S_0$. Cela veut dire que S_0 découpe $[a;b]$ en plus de morceaux. En particulier dans ce cas, on a évidemment $\delta(S_1) \geqslant \delta(S_0)$.

Exemple 1.1 Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ alors

$$S_n = \left\{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_k = a + k\frac{b-a}{n}, ...x_n = b\right\}$$

est une subdivision de $[a,b]$ dont le diamètre est $\delta(S_n) = \dfrac{b-a}{n}$

1.2 Fonctions en escalier

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction f sur $[a,b]$ est en escalier, s'il existe une subdivision $S = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$ de $[a,b]$ telle que*

$$f(t) = c_i \in \mathbb{R},\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

On dira que S est une subdivision associée à f.

Remarquez qu'on ne parle que des intervalles ouverts, rien n'est imposé sur les points x_i, on peut bien avoir de la continuité à droite ou à gauche en certain de ces points,etc...

Exemple 1.2 soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par,

$$f_n(x) = \begin{cases} x_i & si\ x_i < x < x_{i+1} \\ 1 & si\ x = x_i, i = 0, 1; ...n \end{cases}$$

où pour tout $n \geqslant 1$, les x_i sont les points de la subdivision de $[0,1]$ donnée par

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_k = \frac{k}{n}, ...x_n = 1 \right\}$$

Proposition 1.1 *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|f|$, $f+g$, λf et fg sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*

Preuve. Si S_0 et S_1 sont des subdivisions associées à f et g respectivement alors $S = S_0 \cup S_1$ est associée à f et à g. On peut donc supposer que f et g sont en escalier sur la même subdivision $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Ainsi f et g sont constantes, égales respectivement à c_i et d_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|f|$, λf, $f+g$ et fg sont égales à $|c_i|$, λc_i, $c_i + d_i$ et $c_i d_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. D'où la proposition.

■

1.3 Intégrales de fonctions en escalier

Définition 1.2 *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associée à f: c'est-à-dire f est éegale à c_i sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$, on note $I_S(f)$ la surface algébrique de la famille de rectangles sous la courbe de f :*

$$I_S(f) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$

Proposition 1.2 *La quantité $I_S(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision S associée à f, elle ne dépend que de f et de $[a,b]$.*

Preuve. Considérons deux subdivisions $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $S' = (y_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ associées à f.

1^{er} cas $S \subset S'$. Sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ la fonction f est constante égale à c_i. Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalles $]y_k; y_{k+1}[$, $k = l_0, l_0+1, l_0+2, ..., l_1$ où f prend des valeurs d_l qui sont forcément toutes égales à c_i. Donc

$$\sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} d_l \left(y_{l+1} - y_l\right) = \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} c_i \left(y_{l+1} - y_l\right) = c_i \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} \left(y_{l+1} - y_l\right) = c_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

En faisant la somme sur tous les $i = 0; 1, 2, ..., n-1$ on aura

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} d_l \left(y_{l+1} - y_l\right) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

Ainsi, dans ce cas, $I_{S'}(f) = I_S(f)$.

2^{ieme} cas si S et S' sont quelconques, associées à f alors $S'' = S \cup S'$ est une subdivision associée à f vérifiant $S \subset S''$ et $S' \subset S''$. D'après le cas premier, on a:

$$I_S(f) = I_{S''}(f) = I_{S'}(f)$$

■

Cette quantité qui ne dépend donc que de f et de $[a, b]$ est notée

$$\int_a^b f(t)dt$$

et appelée l'intégrale de f entre a et b.

Proposition 1.3 *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:*

1) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$

2) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

En d'autre termes: $\chi : f \mapsto \chi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est une forme linéaire sur l'espace vectoriele des fonctions en escalier sur* $[a, b]$.

Preuve. 1) Si $S = (x_j)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision associée à f alors elle l'est à λf aussi. Si f prenait les valeurs c_i sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$ alors λf prend les valeurs λc_i sur ces mêmes intervalles. On obtient donc

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

2) Soit $S = (x_j)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associée à f et à g. Chacune de ces fonctions vaut c_i et d_i respectivement sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$. Ainsi $f + g$ vaut $c_i + d_i$ sur ces intervalles et on aura

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(t)dt &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (c_i + d_i)\left(x_{i+1} - x_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) + \sum_{i=0}^{i=n-1} d_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \\ &= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4 *Soient f et g deux fonctions en escalier sur [a; b].*

1) Si f est positive sur tout $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

2) Si $f \geqslant g$ sur tout $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$$

3) On a

$$\int_a^b |f(t)|dt \geqslant \left| \int_a^b f(t)dt \right|$$

Preuve. 1) Soit $S = (x_j)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associée à f alors toutes les valeurs c_i de f sur $]x_i; x_{i+1}[$ sont positives. Comme les $x_{i+1} - x_i$ sont tous positifs, donc

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i\left(x_{i+1} - x_i\right) \geqslant 0$$

2) Il suffit d'appliquer 1) à $f - g$.

3) Tout $x \in [a, b]$ vérifie, $|f(x)| \geqslant f(x) \geqslant -|f(x)|$ l'assertion 2) implique

$$\int_a^b |f(x)|dt \geqslant \int_a^b f(t)dt \geqslant -\int_a^b |f(x)|dt$$

D'où

$$\int_a^b |f(t)|dt \geqslant \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

■

2 Fonctions Riemann-intégrables

2.1 Définitions

Soit f une fonction définie et bornée sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note

$$E_-\left(f\right) = \{\varphi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ telle que } \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leqslant f\}$$

$$E_+\left(f\right) = \{\psi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ telle que } \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\}$$

$$I_-\left(f\right) = \left\{\int_a^b \varphi(t)dt : \varphi \in E_-\left(f\right)\right\}$$

$$I_+\left(f\right) = \left\{\int_a^b \psi(t)dt : \psi \in E_+\left(f\right)\right\}$$

Comme f est bornée, donc

$$m = \min\left\{f(x) : x \in [a, b]\right\} \text{ et } M = \sup\left\{f(x) : x \in [a, b]\right\}$$

existent bien dans $\mathbb{R}$ et les fonctions $m : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $M : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies par $m(x) = m$ et $M(x) = M$ vérifient $m \leqslant f \leqslant M$. Donc $m \in E_- (f)$ et $M \in E_+ (f)$. Ainsi

$$m (b - a) = \int_a^b m dt \in I_- (f) \Rightarrow I_- (f) \neq \emptyset$$

et

$$M (b - a) = \int_a^b M dt \in I_+ (f) \Rightarrow I_+ (f) \neq \emptyset$$

Clairement $M(b-a)$ est un majorant de $I_- (f)$ et $m(b-a)$ est un minorant de $I_+ (f)$. Donc

$$i_a^b (f) = \sup (I_- (f)) \text{ et } I_a^b (f) = \inf (I_+ (f))$$

existent dans $\mathbb{R}$ et vérifient évidement:

$$i_a^b (f) \leqslant I_a^b (f)$$

Définition 2.1 *On dit qu'une fonction bornée f sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann si $i_a^b (f) = I_a^b (f)$. Cette valeur commune est notée*

$$\int_a^b f(t)dt$$

et appelée intégrale de f entre a et b.

En analyse réelle, il est souvent utile de ramener un problème à une propriété séquentielle convenable par exemple *une fonction f est continue en un point a si etseulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers a sa suite image $(f (x_n))_n$ converge vers $f (a)$.* C'est le cas de la définition précédente

Théorème 2.1 *Une fonction f définie et bornée sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que*

$$\begin{cases} \varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n & \forall n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_a^b (\psi_n - \varphi_n) (t)dt & = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \psi_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt$ *et cette limite commune est* $\int\limits_a^b f(t)dt$.

Preuve. Suppouons que $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int\limits_a^b f(t)dt$. Par définition de la borne inférieure et supérieure ona

$$\begin{cases} \forall\varphi\in E_-(f) & \int\limits_a^b \varphi(t)dt \leqslant i_a^b(f) \\ \forall\varepsilon>0, \exists\varphi_\varepsilon\in E_-(f) & i_a^b(f)-\varepsilon < \int\limits_a^b \varphi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall\psi\in E_+(f) & \int\limits_a^b \psi(t)dt \geqslant I_a^b(f) \\ \forall\varepsilon>0, \exists\varphi_\varepsilon\in E_+(f) & I_a^b(f)+\varepsilon > \int\limits_a^b \varphi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

Ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ il existe alors deux fonctions $\varphi_n \in E_-(f)$ et $\psi_n \in E_+(f)$ telles que

$$i_a^b(f) - \frac{1}{n} < \int\limits_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f)$$

$$I_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \psi_n(t)dt < I_a^b(f) + \frac{1}{n}$$

Si on fait tendre n vers l'infini, on aura

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt = i_a^b\left(f\right) = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \psi_n(t)dt = I_a^b\left(f\right)$$

Par construction, les fonctions φ_n et ψ_n sont bien en escalier et satisfont $\varphi_n \leqslant f \leqslant \omega_n$. Ainsi la preuve dans un sens est faite.

Réciproquement,, si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n, \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \left(\psi_n - \varphi_n\right)(t)dt = 0$$

alors comme on a

$$\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \psi_n(t)dt$$

on en déduit que

$$0 \leqslant I_a^b(f) - i_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \left(\psi_n(t) - \varphi_n(t)\right) ddt$$

Ce qui montre que $I_a^b(f) = i_a^b(f)$. De plus on a:

$$0 \leqslant i_a^b(f) - \int\limits_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant \int\limits_a^b \left(\psi_n(t) - \varphi_n(t)\right) ddt$$

et

$$0 \leqslant \int\limits_a^b \psi_n(t) - I_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \left(\psi_n(t) - \varphi_n(t)\right) ddt$$

Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini pour conclure.

$\blacksquare$

Exemple 2.1 • Soit f la fonction sur l'intervalle $[0;1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soient $\varphi \in E_-(f)$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associé à φ, donc

$$\varphi \leqslant f \text{ et } \varphi(t) = c_i,\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[$$

Or pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1,\ \mathbb{Q} \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset,$ donc si a est dans cette intersection non vide alors on aura

$$c_i = \varphi(a) \leqslant f(a) = 0$$

Puisque tous les $x_{i+1} - x_i$ sont positifs, donc

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) \leqslant 0$$

Donc $i_0^1(f) \leqslant 0$

De même si $\psi \in E_+(f)$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associé à ψ, alors

$$f \leqslant \psi \text{ et } \psi(t) = d_i,\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[$$

$\forall i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset,$ Soit un élément de cette intersection non vide, il vérifie donc

$$1 = f(b) \leqslant \psi(b) = d_i \Rightarrow d_i (x_{i+1} - x_i) \geqslant (x_{i+1} - x_i)$$

donc

$$\int_a^b \psi(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} d_i (x_{i+1} - x_i) \geqslant \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1$$

Ainsi $I_0^1(f) \geqslant 1$.

Conclusion: $i_0^1(f) \leqslant 0 < 1 \leqslant I_0^1(f) \Rightarrow i_0^1(f) \neq I_0^1(f)$ f n'est donc pas Riemann intégrable sur $[0,1]$

• Montrons à l'aide du théoème caractéristique ci-dessus (qu'on peut cosidérer comme définition), que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que:
$f(x) = ax$ pour un certain $a \in \mathbb{R}_+^*$ est intégrable sur $[0,1]$.

Pour tou $n \geqslant 1$, on consdère la subdivision de $[0,1]$ telle que

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_k = \frac{k}{n}, ...x_n = 1 \right\}$$

qui va être associée aux fonctions en escalier définies par

$$\varphi_n(t) = ax_i,\ \psi_n(t) = ax_{i+1}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, ..., n-1$$

$$\varphi_n(x_i) = 0, \psi_n(x_i) = a,\ i = 0, 1, ..., n-1$$

Puisque f es strictement croissante, donc

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a\frac{i}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n-1\right)}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_{i+1} \left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a\frac{i+1}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \\
&= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \psi_n(t)dt = \frac{a}{2}$$

Ainsi f est intégrable sur $[0,1]$ et son intégrale vaut $\displaystyle\int_0^1 (at)dt = \frac{a}{2}$.

2.2 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 2.1 *Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f+g$ sont intégrables sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Preuve. Comme f et g sont intégrables on sait qu'il existe des suites $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \ , \ u_n \leqslant g \leqslant v_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (v_n - u_n)(t) = 0$$

Il s'en suit que:
$\star$ si $\lambda > 0$ alors

$$\lambda\varphi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\lambda\psi_n - \lambda\varphi_n)(t)dt = 0$$

$\star$ si $\lambda < 0$ alors

$$\lambda\psi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\varphi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\lambda\varphi_n - \lambda\psi_n\right)(t) = 0$$

Pour $\lambda = 0$ c'est trivial. Donc λf est intégrable sur $[a, b]$. On a déjà vu que pour les fonctions en escalier l'intégrale est linéaire et de la linéarité de la limite on déduit que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \int_a^b \varphi_n(t)dt\right) \\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\varphi_n + u_n \leqslant f + g \leqslant \psi_n + v_n$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\psi_n+v_n)(t)dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n dt+\lim_{n\to+\infty}\int_a^b v_n dt\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n dt+\lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n dt\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\varphi_n+u_n)(t)dt\\
&= \int_a^b (f+g)(t)dt
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il falait démontrer.

■

Notons $\mathcal{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$ (qui contient évidement les fonctions en escalier sur $[a,b]$). La propostion2.1 nous informe que $\mathcal{R}([a,b])$ est un espace vectoriel réel et que $f\mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une application linéaire de $\mathcal{R}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ (donc c'est une forme linéaire de $\mathcal{R}([a,b])$).

2.3 Intégrales et inégalités

Les inégalités liées aux intégrales de fonctions en escalier vont s'étendre sans difficulté aux fonctions Riemann intégrables.

Proposition 2.2 *Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a;b]$ de $\mathbb{R}$.*

1) Si $f\geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt\geqslant 0$

2) Si $f\geqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt\geqslant \int_a^b g(t)dt$

Preuve. 1) Comme f est intégrable, on sait qu'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que $f \leqslant \psi_n$ pour tout n et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt$$

Comme f est positive, toutes les fonctions ψ_n le sont aussi, donc les intégrales $\int_a^b \psi_n(t)dt$ sont positives et leur limite aussi.

2) Il suffit d'appliquer 1) à $f - g \geqslant 0$

■

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$ on pose

$$f_-(x) = \max \{-f(x), 0\} \text{ et } f_+(x) = \max \{f(x), 0\}$$

Il est clair que ces deux fonctions sont positives et que

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

Proposition 2.3 *Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$, alors f_+, f_- et $|f|$ sont aussi intégrables et*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$$

Preuve. Comme f est intégrable alors il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ vérifiant $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et dont les intégrales convergent vers celle de f. On vérifie alors facilement que

$$(\varphi_n)_+ \leqslant f_+ \leqslant (\psi_n)_+$$

et que $(\psi_n)_+ - (\varphi_n)_+ \leqslant \psi_n - \varphi_n$. Donc f_+ est intégrable sur $[a, b]$. Par la même méthode, f_- est intégrable sur $[a, b]$ D'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable sur $[a, b]$.

L'inégalité des intégrales découle de 2) de la proposition2.2. appliquée à

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

■

Proposition 2.4 ***(Formule de la moyenneI)*** *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$ avec $a<b$. Soient m et M la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a,b]$. Alors le réel*

$$\kappa=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

appartient à $[m,M]$.

Preuve. Comme on a $m\leqslant f\leqslant M$ on en déduit

$$m\,(b-a)\leqslant\int_a^b f(t)dt\leqslant M\,(b-a)$$

■

Exemple 2.2 **(Application)** Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\int_x^{2x}\frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)}dt\right)$$

Pour calculer la première limite, il suffit d'appliquer la formule de la moyenne à $[a,b]=[0,x]$ et à la fonction $t\mapsto f(t)=\dfrac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ le compact $[0,1]\supset[0,x]$, $x\sim 0^+$. Soient alors $m=\min\{f(t),t\in[0,1]\}$ et $M=\max\{f(t),t\in[0,1]\}$. La formule de la moyenne nous mène à

$$m\leqslant\frac{1}{x-0}\int_0^x\frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}\leqslant M$$

Par suite

$$xm\leqslant\int_0^x\frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\leqslant xM$$

D'où

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x\frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\right)=0$$

De même la fonction

$$g : t \mapsto g(t) = \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)}$$

est continue sur $[1, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(t) = 1$. Or pour $x \sim +\infty$ on a $[x, 2x] \subset [1, +\infty[$, donc

$$m = \inf\left\{g(t), 1 \leqslant t < +\infty\right\} \text{ et } M = \sup\left\{g(t), 1 \leqslant t < +\infty\right\}$$

existent bien dans $\mathbb{R}$ et d'après la formule de la moyenne

$$m \leqslant \frac{1}{2x-x}\int_x^{2x} \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)} \leqslant M$$

Puisque $x > 0$ on aura

$$\frac{m}{x} \leqslant \frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)}dt \leqslant \frac{M}{x}$$

Par conséquence,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{t+1}{t\left(1+\cos^2(t)\right)}dt\right) = 0.$$

Théorème 2.2 ***(Formule de la moyenneII)*** *Soient f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et g intégrable sur $[a, b]$ avec g de signe constant. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Preuve. Quitte à considérer $-g$, on peut supposer que g est positive. La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes:

$$m = \min\left\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\right\}, \; M = \max\left\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\right\}$$

Par ailleurs on a;

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

• Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$, d'après la dernière inégalité, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et le théorème devient trivial.

• Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \neq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$ et les inégalités précédentes nous donnent

$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx}$. Ce qu'il falait démontrer.

$\blacksquare$

2.4 Intégrales et produits

Proposition 2.5 *Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ alors fg est bornée et intégrable sur $[a, b]$.*

Mais en général $\displaystyle\int_a^b (fg)(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b f(t)dt\right)$

Preuve. $\star$ Cas où f et g sont toutes les deux positives. On pose

$$M = \max\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\} \text{ et } N = \max\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

Par définition, il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n, (u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } u_n \leqslant g \leqslant v_n$$

Posons

$$\varphi'_n(x) = \max\{\varphi_n(x), 0\}, \ \psi'_n(x) = \min\{\psi_n(x), M\}$$

$$u'_n(x) = \max\{u_n(x), 0\}, \ v'_n(x) = \min\{v_n(x), N\}$$

Ce sont toutes des fonctions en escalier qui vérifient bien

$$\varphi_n \leqslant \varphi'_n \text{ et } 0 \leqslant \varphi'_n \leqslant f \leqslant \psi'_n \leqslant \psi_n$$

$$u_n \leqslant u'_n \text{ et } 0 \leqslant u'_n \leqslant g \leqslant v'_n \leqslant v_n$$

A cause de la positivité, on aura donc

$$\varphi'_n u'_n \leqslant fg \leqslant \psi'_n v'_n$$

le fonctions qui encadrent fg sont en escalier. Montrons la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n\right)(t)dt = 0$$

Pour ce la on va utiliser les assertion satisfaites suivantes

$$v'_n \leqslant N, \varphi'_n \leqslant \psi'_n \leqslant M$$

$$0 \leqslant \psi'_n - \varphi'_n \leqslant \psi_n - \varphi_n$$

$$0 \leqslant v'_n - u'_n \leqslant v_n - u_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\psi_n - \varphi_n\right)(t)dt = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(v_n - u_n\right)(t)dt = 0$$

pour pouvoir écrire

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt \\
&= \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n' + \varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt \\
&= \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n'\right)(t)dt + \int_a^b \left(\varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt \\
&= \int_a^b v_n'(t)\left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t)dt + \int_a^b \varphi_n'(t)\left(v_n' - u_n'\right)(t)dt \\
&\leqslant \int_a^b v_n'(t)\left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t)dt + \int_a^b \psi_n'(t)\left(v_n' - u_n'\right)(t)dt \\
&\leqslant N\int_a^b \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t)dt + M\int_a^b \left(v_n' - u_n'\right)(t)dt \\
&\leqslant N\int_a^b \left(\psi_n - \varphi_n\right)(t)dt + M\int_a^b \left(v_n - u_n\right)(t)dt \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

(2.1) montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt = 0$$

Donc fg est R-intégrable.

$\star$ f et g bornées intégrables non nécessairement positive. Posons

$$m = \min\left\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\right\} \text{ et } m' = \min\left\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\right\}$$

Les fonctions $f - m$ et $g - m'$ qui sont bornées et intégrables sont positives. D'après le cas précédent, $(f-m)(g-m')$, est intégrable. Puisque

$$fg = (f-m)(g-m') + mg + m'f - mm',$$

on en déduit que fg est bornée Riemann intégrable.

Pour voir qu'on n'a pas toujours l'égalité, il suffit de prendre $[a,b] = [0,2]$ et $f = g = 1$

$$\int_0^2 (fg)(t)dt = \int_0^2 dt = 2 \neq 4 = \left(\int_0^2 dt\right)^2 = \int_0^2 (f)(t)dt \times \int_0^2 (g)(t)dt$$

$\blacksquare$

Théorème 2.3 ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*** *Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ alors*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est intégrable, donc $(f + g\lambda)^2$ l'est aussi. Comme c'est une fonction positive, donc

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 \, dx \geqslant 0$$

Ainsi

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 \, dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (f(x))^2 \, dx \geqslant 0$$

est un polynôme de degré deux en λ et qui est toujours du signe du cœfficient $\int_a^b (g(x))^2 \, dx$ de λ^2, donc son discriminant est négatif, c'est-à-dire :

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b (f(x))^2 \, dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 \, dx\right) \leqslant 0$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz désirée. ■

3 Familles de fonctions intégrables

3.1 Manipulation de fonctions intégrables

Proposition 3.1 *Soient f est une fonction bornée et intégrable et g une fonction définie sur $[a, b]$ est égale à f sauf sur un nombre finis de points, alors g est intégrable et*

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve. Par hypothèse il existe une subdivision $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que $f = g$ sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. La fonction $f - g$ est donc nulle sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En d'autres termes, la fonction $f - g$ est en escalier. Elle est donc intégrable et son intgrale est clairement nulle. La fonction g= $f - (f - g)$ est donc intégrable et son intégrale est égale à celle de f.

■

Remarque 3.1 Cette proposition signifie que si on change les valeurs d'une fonction R-intégrable sur $[a, b]$ en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors elle reste encore intégrable et garde la même intégrale.

3.2 Monotonie

Théorème 3.1 *Toute fonction monotone sur un compact* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *est intégrable.*

Preuve. supposons que $f; [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée est croissante (sinon on considérera $-f$ qui sera croissante).

Pour tout $n \geqslant 1$ considérons la subdivision

$$S_n = \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_i = a + i\frac{b-a}{n}, ..., x_n = b \right\}$$

qui permet de construire les fonctions en escalier

$$\varphi_n(t) = f(x_i),\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

et

$$\psi_n(t) = f(x_{i+1}),\ \forall t \in]x_i, x_{i+1}[,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

On a évidement $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \qquad (3.2) \end{aligned}$$

(3.2) implique que $\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$ Ce qui montre que f est intégrable sur $[a, b]$.

■

3.3 Continuité

Définition 3.1 *Une fonction f est continue en un point a d'un interballe I de $\mathbb{R}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{a,\varepsilon} > 0 : |x - a| < \eta_{a,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f sera dite continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque 3.1 Dans cette définition, il faut noter que le $\eta_{a,\varepsilon} > 9$ ci-dessus dépend de ε évidement mais aussi de a. Prenons un exemple, la fonction

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Soit $a \in]0, +\infty[$ fixé, pour tout $\varepsilon > 0$, la condition $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ revient à $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Écrivons $x = a + (x - a)$, on obtient $|2a(x - a) + (x - a)^2| < \varepsilon$. Or $|2a(x - a)| < |2a(x - a) + (x - a)^2|$. On veut avoir $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|2a(x - a) + (x - a)^2| < \varepsilon$ alors $|2a(x - a)| < \varepsilon$ il faut donc avoir $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{2a}$ donc il faut que $\eta_{a,\varepsilon}$ vérifie $0 < \eta_{a,\varepsilon} < \dfrac{\varepsilon}{2a}$. On constate ainsi que le $\eta_{a,\varepsilon}$ qui réalise l'implication de la définition3.1 ne peut pas être choisi de la même manière pour $a \sim 0^+$ et pour $a \sim +\infty$.

Définition 3.2 *Une fonction f est dite uniformément continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; |x - y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Exemple 3.1 fonctions Lipschitziennes:

$$\exists K > 0 : |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|, \forall (x, y) \in I^2$$

sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$. De telles fonctions sont obtenues par le théorème des accroissements fini, Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivé est bornée alors f est Lipschitziennes.

Évidement la continuité uniforme implique la continuité. La réciproque n'est pas toujours vraie. Cependant, sur les compacts cette réciproque devient satisfaite.

Théorème 3.2 ***(Heine)*** *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné* $[a,b]$ *est uniformément continue sur* $[a,b]$*.*

Preuve. Si f est continue, montrons qu'elle est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_\varepsilon > 0 \text{ tel que } |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Raisonnons par absurde, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$ on peut trouver x_η, y_η dans $[a,b]$ tels que $|x_\eta - y_\eta| < \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geqslant \varepsilon_0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$ en particulier pour les $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Il existe donc des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ dans $[a,b]$ telles que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 \ (\star)$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ qui converge dans $[a,b]$ vers c. Alors $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers c. Puisque

$$|y_{\varphi(n)} - c| \leqslant |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| < \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \to 0 \text{ si } n \to +\infty$$

Écrivons $(\star)$ pour $\varphi(n)$, on aura: $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geqslant \varepsilon_0$, ce qui mène à la contradiction avec lacontinuité de f en c si on fait tendre n vers l'infini.

■

Théorème 3.3 *Toute fonction continue sur* $[a,b]$ *est intégrable.*

Preuve. Par hypothèse, f est continue, d'après le théorème de Heine, f est aussi uniformément continue, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ telle que

$$|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

On considère une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ telle que $\max(x_{i+1}-x_i)<\eta$: Puis que $\left(\dfrac{1}{m}\right)$ converge vers zéro, soit $m\geqslant 1$ tel que $\dfrac{1}{m}\leqslant\eta$. Il suffit de prendre $S=\left(x_i=a+i\dfrac{b-a}{m}\right)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$. On définit les fonctions en escalier

$\varphi_\varepsilon(t)=f(x_i)-\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\psi_\varepsilon(t)=f(x_i)+\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $x_i<t<x_{i+1}$, $0\leqslant i\leqslant n-1$

Pour tout $t\in]x_i,x_{i+1}[$ on a $0<t-x_i<x_{i+1}-x_i<\eta$ donc $|f(x_i)-f(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ce qui signifie que $f(x_i)-\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}<f(t)<f(x_i)+\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ c'est-à-dire $\varphi_\varepsilon(t)\leqslant f(t)\leqslant\psi_\varepsilon(t)$. Par ailleurs;

$$\int_a^b(\psi_\varepsilon(t)-\varphi_\varepsilon(t))\,dt$$

$$\begin{aligned}\int_a^b(\psi_\varepsilon(t)-\varphi_\varepsilon(t))\,dt &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}-f(x_i)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)(x_{i+1}-x_i)\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, on aura alors des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n,(\psi_n)_n$ telles que:

$$\varphi_n\leqslant f\leqslant\psi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_a^b(\psi_n(t)-\varphi_n(t))\,dt=0$$

Cela montre l'intégrabilité de f.

■

3.4 Relation de Chasles

Proposition 3.2 *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et $c\in[a,b]$.*

1) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

2) Si f est intégrable sur $[a,c]$, et sur $[c,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.

3) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$$

Preuve. La relation de Chasles est claire pour les fonctions en escalier.

1) Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ tellles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\displaystyle\int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt < \varepsilon$ alors les restrictions φ_1 et ψ_1 (Respectivement φ_2 et ψ_2) de φ et ψ à $[a,c]$ (respectivement à $[c,b]$) alors ces quatre fonctions sont en escalier et encadrent f avec $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \varepsilon$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon$ donc f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

2) Si f est intégrable sur $[a,c]$, et sur $[c,b]$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier φ_1, ψ_1 et φ_2, ψ_2 respectivement sur $[a,c]$ et $[c,b]$ telles que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \leqslant f \leqslant \psi_2$ respectivement sur $[a,c]$ et $[c,b]$ avec $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$ et $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons les fonctions φ et ψ données sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } a \leqslant x < c \\ \varphi_2(x) & \text{si } c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{si } a \leqslant x < c \\ \psi_2(x) & \text{si } c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

Il est claire que φ et ψ sont en escalier sur $[a,b]$ avec

$$0 \leqslant \int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt = \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt + \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi f est intégrable sur $[a,b]$.

3) L'égalité étant évidente pour les fonctions en escalier donc si

$$\varphi_{1,n} \leqslant f \leqslant \psi_{1,n} \text{ sur [a,c] avec } \lim_{n \to +\infty} \int_a^c (\psi_{1,n} - \varphi_{1,n})(t)dt = 0$$

et

$$\varphi_{2,n} \leqslant f \leqslant \psi_{2,n} \text{ sur [c,b] avec } \lim_{n \to +\infty} \int_c^b (\psi_{2,n} - \varphi_{2,n})(t)dt = 0$$

alors φ_n et ψ_n définies comme φ et ψ ci-dessus satisfont

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ sur [c,b] avec } \lim_{n \to +\infty} \int_c^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$$

D'où

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^c \psi_n(t)dt + \int_c^b \psi_n(t)dt\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^c \psi_n(t)dt + \int_c^b \psi_n(t)dt\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^c \psi_n(t)dt + \lim_{n\to+\infty}\int_c^b \psi_n(t)dt \\
&= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt
\end{aligned}$$

■

Puisque

$$0 = \int_a^a f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^a f(t)dt$$

on aura donc

Corollaire 3.1 *Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors*

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

En particulier, la relation

$$\int_e^d f(t)dt = \int_e^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt$$

est vraie quelques que soient les relations d'ordre entre e, c et d dans $[a,b]$.

On dit qu'une fonction f sur $[a,b]$ a une certaine propriété (comme être continue, monotone, dérivable, etc.) par morceaux si il existe une subdivision $S = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que f a cette propriété sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ et si elle admet un prolongement ayant cette même propriété sur $[x_i, x_{i+1}]$. En appliquant la relation de Chasles n fois on obtient:

Théorème 3.4 *Si f est continue (respectivement monotone) par morceaux sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*

4 Primitives et intégrales

Dans cette section, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$.

4.1 Le théorème fondamental

Nous allons nous intéresser à la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Proposition 4.1 *Si $|f| \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors pour tous x et y dans $[a, b]$,*

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M|x - y|$$

Preuve. Supposons que $x \geqslant y$ (l'autre cas se traite de la même façon). $|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right| = \left|\int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)dt\right|$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_y^x f(t)dt\right| \\
&\leqslant \int_y^x |f(t)|dt \\
&\leqslant \int_y^x M dt \\
&= M(x - y) \\
&= M|x - y|
\end{aligned}$$

■

Corollaire 4.1 *La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est Lipschitzienne donc uniformément continue sur $[a, b]$*

Théorème 4.1 *Soit $x_0 \in [a,b]$. Les assertions suivantes sont satisfaites:*

1) Si f admet une limite réelle l à droite au point x_0 alors F admet une dérivée à droite en x_0 égale à l:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'_d(x_0) = l$$

2) Si f admet une limite réelle l à gauche au point x_0 alors F admet une dérivée à gauche en x_0 égale à l:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'_g(x_0) = l$$

3) Si f admet une limite réelle l au point x_0 alors F admet une dérivée en x_0 égale à l:

$$\lim_{x \to x_0} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x_0) = l$$

4) Si f est continue au point x_0 alors F a une dérivée en x_0 égale à $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0 f(t) = f(x_0)} \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

Preuve. 1) Supposons que $\lim_{x \to x_0^+} f(t) = l \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : 0 < h < \eta \Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon,\ \forall t \in [x_0, x_0 + h]\ (\divideontimes)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - l \right| &= \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - lh}{h} \right| \\
&= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - lh \right| \\
&= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - l)\, dt \right| \\
&\leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - l| dt \\
&\leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où $F'_d(x_0) = l$.

2) se démontre de la même façon que 1).

3) c'est 1) et 2).

4) c'est 3) pour $l = f(x_0)$.

■

Il s'en suit que:

Théorème 4.2 *Si f est continue sur $[a, b]$ alors F est dérivable avec*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in]a, b[,\ F'_d(a) = f(a) \text{ et } F'_g(b) = f(b)$$

Remarquons que si f n'est pas continue, alors la fonction F ne sera plus dérivable. Un contrexemple est donné par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

pour laquelle

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

n'est pas dérivable puisque $F'_g(1) = 1$ et $F'_d(1) = 2$

Définition 4.1 *On dit que G est une primitive de f sur $[a, b]$ si $G' = f$ sur $[a, b]$.*

Proposition 4.2 *Si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$ alors $F - G$ est constante sur $[a, b]$.*

Preuve. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ donc $F - G = cte$. ■

Proposition 4.3 *Toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive sur $[a, b]$.*

Preuve. Il s'agit de $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

■

Remarque 4.1 Une fonction peut avoir une primitive sans qu'elle soit continue. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

est discontinue en zéro car: $\left(x_n = \dfrac{1}{2\pi + 2n\pi}\right)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini, alors que

$$(f(x_n)) = \left(\frac{2}{2\pi + 2n\pi}\sin(2\pi + 2n\pi) - \cos(2\pi + 2n\pi)\right) = -1$$

qui tend bien vers moins un si $n \to +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)) \neq f(0)$ et donc f est discontinue en zéro. Par ailleurs

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

est dérivable de dérivée f. En effet: pour $x \neq 0$, on a bien $F'(x) = f(x)$ et

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 = f(0)$$

Théorème 4.3 *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si G est une primitive de f alors*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Preuve. Soit G une primitive de f sur $[a, b]$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, il s'en suit que $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f, donc $G = F + cte$ et $G(b) - G(a) = (G(b) + cte) - (G(a) + cte) = F(b) - F(a) = F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

■

L'égalité $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ est notée $[G(t)]_a^b$.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 si f' est continue.

Théorème 4.4 *Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Preuve. Il suffit d'applquer la proposition.4.3 et le théorème .4.3 ■

4.2 Intégration par parties

Théorème 4.5 *Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [v(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Preuve. D'après ce qui précéde, on a

$$[v(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Ce qu'il fallait démontrer.

■

Exemple 4.1 les intégrales suivantes pour tout $n \geqslant 0$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

4.3 Changement de variables

Théorème 4.6 ***(Changement de variableI)*** *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit φ une fonction C^1 sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Alors*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Preuve. Puisque f est continue, elle admet une primitive: F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ qui est de classe C^1. Donc $F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ avec $(F \circ \varphi)'(t) = (F' \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)dt$. D'après le théorème.4.4 on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} (F\circ\varphi)'(t)dt \\
&= (F\circ\varphi)(\beta) - (F\circ\varphi)(\alpha) \\
&= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.7 ***(Changement de variableII)*** *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit ϕ une fonction C^1 sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\phi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Si ϕ est strictement monotone (ie strictement croissante ou décroissante) alors pour tout $[a',b'] \subset \phi([\alpha,\beta])$ on a:*

$$\int_{a'}^{b'} f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a')}^{\phi^{-1}(b')} f(\phi(t))\,\phi'(t)dt$$

Preuve. Comme ϕ est strictement monotone donc elle injective. Sa continuité permet (grace au théorème des valeurs intermédiaires) d'avoir sa surjectivité. Ainsi ϕ est bijective de $[\alpha,\beta]$ sur $\phi([\alpha,\beta])$

$$\begin{aligned}
\int_{a'}^{b'} f(x)dx &= \int_{\phi(\phi^{-1}(a'))}^{\phi\left(\phi^{-1}(b')\right)} f(x)dx \\
&= \int_{\phi^{-1}(a')}^{\phi^{-1}(b')} f(\phi(t))\,\phi'(t)dt \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

(4.3) est obtenue en appliquant le théorème4.6 à $\varphi = \phi$: $\alpha = \phi^{-1}(a')$ et $\beta = \phi^{-1}(b')$ ■

Exemple 4.2 1) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ *(Indic. $x = \cos(\theta)$).*

2) Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^x \sin\left(\sqrt{t}\right)dt$ *(Ind. $u = \sqrt{t}$).*

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et de signe constant sur $[a,b]$.

Montrer que si $\int_a^b f(x) = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

5 Sommes de Riemann et de Darboux

5.1 Sommes de Darboux

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$. On note

$$m_k = \inf_{x_k < x < x_{k+1}} f(x), \; M_k = \sup_{x_k < x < x_{k+1}} f(x), \; k = 0, 1, 2, ..., n$$

$$\mathfrak{s}(S, f) = \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \text{ et } \mathfrak{S}(S, f) = \sum_{k=0}^{k=n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

(appelées petite et grande sommes de Darboux)

$$\mathfrak{s}_a^b(f) = \sup \{\mathfrak{s}(S, f), \; S \text{ subdivision de } [a, b]\}$$

$$\mathfrak{S}_a^b(f) = \inf \{\mathfrak{S}(S, f), \; S \text{ subdivision de } [a, b]\}$$

Théorème 5.1 *Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
1) f est intégrables
2) $\mathfrak{s}_a^b(f) = \mathfrak{S}_a^b(f)$

Preuve. Évidement,

$$\mathfrak{s}_a^b(f) \leqslant i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f) \leqslant \mathfrak{S}_a^b(f)$$

Donc si 2) est vérifié alors f est intégrable. Réciproquement si f est intégrable alors $i_a^b(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et pour $\varepsilon > 0$ il existe φ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(t)dt \leqslant i_a^b(f)$$

Il est à noter que pour une fonction en escalier φ on a

$$\mathfrak{s}_a^b(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt = \mathfrak{S}_a^b(\varphi)$$

donc

$$i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(t)dt = \mathfrak{s}_a^b(\varphi) \leqslant \mathfrak{s}_a^b(f)$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $i_a^b(f) - \varepsilon < \mathfrak{s}_a^b(f)$ donc $i_a^b(f) \leqslant \mathfrak{s}_a^b(f)$ et par suite, $i_a^b(f) = \mathfrak{s}_a^b(f)$. De la même façon, $I_a^b(f) = \mathfrak{S}_a^b(f)$. D'où 2).

■

5.2 Sommes de Riemann

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$. On considère $\mathfrak{E} = \{e_0, e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ une famille de réels tels que $e_i \in [x_i, x_{i+1}]$ pour tout i. On note

$$\mathfrak{R}(S, \mathfrak{E}, f) = \sum_{k=0}^{k=n-1} f(e_i)(x_{i+1} - x_i)$$

(appelées sommes de Riemann de f relative à $\mathfrak{E}$ dans S)

Théorème 5.2 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur* $[a, b]$, *alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(S)\to 0} [\mathfrak{R}(S, \mathfrak{E}, f)]$$

Preuve. Identique à celle des sommes de Darboux.

■

Un cas particulier de ce théorème est lorsqu'on considère la subdivision

$$S_n = \left\{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_i = a + i\frac{b-a}{n}, ..., x_n = b\right\}, n \geqslant 1$$

$\delta(S_n) = \dfrac{b-a}{n}$ donc $\delta(S_n) \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$

On peut ainsi énoncer

Corollaire 5.1 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur* $[a, b]$, *alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Un cas intéressant est lorsque $[a, b] = [0, 1]$. Alors le corollaire donne

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \right]$$

On notera alors

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

qui constitue une approximation de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx$$

avec l'estimation de l'erreur suivante.

Proposition 5.1 *Soit f une fonction de classe C^1 telle que*

$$\sup\{|f'(x)|, \, x \in [0, 1]\} = M \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - R_n \right| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

Preuve. En utilisant la relation de Chasles et le théorème des accroissements finis sur $[x_i, x_{i+1}]$; on aura l'existence d'un réel c_i vérifiant à la fois $x_i < c_i < x < x_{i+1}$ et

$$|f(x) - f(x_i)| = |f'(c_i)(x - x_i)| = |f'(c)|(x - x_i) \leqslant M(x - x_i) = M\left(x - \frac{i}{n}\right)$$

Il faut aussi remarquer que pour toute constante $\kappa \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa dt = \kappa(x_{i+1} - x_i) = \kappa\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \kappa\frac{1}{n}$$

Ceci dit, on obtiendra donc:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{i=n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right] dx\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{i=n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| dx\right] \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{i=n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(c_i)||x - \frac{i}{n}|dx\right] \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{i=n-1}\left[\frac{M}{2}(x - \frac{i}{n})^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{i=n-1}\left[\frac{M}{2n^2}\right] \\
&= \frac{M}{2n}
\end{aligned}
$$

■

6 Intégrales généralisées

Définition 6.1 *Soit* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On dit que*

$$\int_a^b f(x)dx$$

est une intégrale généralisée si

1) $a = -\infty$ *ou*

2) $b = +\infty$ *ou*

3) $\sup\{|f(x)|, x \in (a,b)\} = +\infty$

Pour tout intervalle borné $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, f est Riemann intégrable sur $[\alpha, \beta]$ Par définition,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a, \beta \to b} \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Lorsque cette limite existe dans $\mathbb{R}$ on dit que l'intégrale généralisée est convergente. Si cette limite n'existe pas on dira que l'intégrale impropre est divergente.

Exemple 6.1 Considérons lesintégrales généralisées (ou impropres) suivantes:

- $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$. On pose

$$I_1(\beta) = \int_0^\beta \frac{dx}{x^2+1}, \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

qui est bien une intégrale de Riemann.

$$\begin{aligned} I_1(\beta) &= \int_0^\beta \frac{dx}{x^2+1} \\ &= [\arctan(x)]_0^\beta \\ &= \arctan(\beta) \end{aligned}$$

$\lim_{\beta \to +\infty} (I_1(\beta)) = \lim_{\beta \to +\infty} (\arctan(\beta)) = \frac{\pi}{2}$ L'intégrale généralisée I_1 est convergente avec

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

- $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ est une intégrale généralisée qui est égale, d'après la relation de Chasles, à

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$$

On pose alors

$$I_{(2,1)}(\alpha) = \int_\alpha^0 xe^{-x^2} dx \text{ et } I_{(2,2)}(\beta) = \int_0^\beta xe^{-x^2} dx \text{ où } 0 \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$$

On a bien

$$\begin{aligned} I_{(2,1)}(\alpha) &= \int_{\alpha}^{0} xe^{-x^2}dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{\alpha}^{0} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha^2}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

(6.4) implique que $I_{(2,1)} = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$.

Identiquement on aura

$$\begin{aligned} I_{(2,2)} &= \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx \\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta} xe^{-x^2}dx \\ &= \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{0}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $I_{(2.2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ est convergente avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$$

- $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x}dx$ est une intégrale généralisée puisque $\sup_{0<x<1}\left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to0^+}\left[\ln(x)\right]_{\alpha}^{1} = +\infty$$

donc $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty$. I_3 est une intégrale généralisée divergente.

• $I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ est une intégrale impropre qui admet deux points de singularité: 0 et 2. On pose

$$I_{(4,1)} = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} \text{ et } I_{(4,2)} \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)}$$

$$I_{(4,1)}(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)}, \; I_{(4,2)}(\beta) = \int_1^\beta \frac{dx}{x(x-2)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)} &= \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \left(\frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) dx \\ &= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \right]_\alpha^1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

D'où $\int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge donc l'intégrale impropre $\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge.

• $I_5 = \int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ est impropre. D'aprés la rela tion de Chasles on a

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$$

Posons $I_{5,2} = \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ et pour tout réel $1 < \alpha < 2$, $I_{5,2}(\alpha) = \int_\alpha^2 \frac{dx}{x-1}$ et $I_{5,1}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{x-1}$. On aura donc

$$\begin{aligned} I_{5,2}(\alpha) &= \int_\alpha^2 \frac{dx}{x-1} \\ &= [\ln(x-1)]_\alpha^2 \\ &= (-\ln(\alpha-1)) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

de sorte que $\lim_{\alpha \to 1^+} I_{5,2}(\alpha) = \lim_{\alpha \to 1^+} (-\ln(\alpha-1)) = +\infty$.

Ainsi $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ diverge et par conséquence $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ est divergente.