

Interpolation polynômiale d'Hermite, et interpolation spline

T.Mekkaoui

Interpolation polynômiale d'Hermite, et
interpolation spline

Interpolation polynômiale d'Hermite, et interpolation spline

5.1 Introduction

Interpoler une fonction f consiste à “faire passer ” le graphe d'une fonction p appartenant à un espace V de dimension finie par des points $(x_i, f(x_i))$ donnés en nombre égal à la dimension de V . L'estimation de la qualité de l'approximation de f par p est entièrement concentrée aux points x_i , on a besoin de ne rien savoir d'autre que les valeurs de $f(x_i)$ pour déterminer p .

5.1.1 Interpolation polynômiale classique

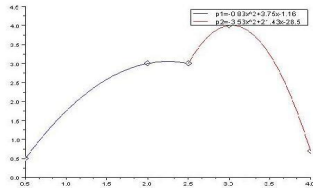
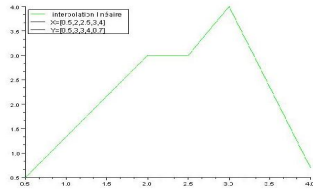
L'interpolation traditionnelle de f dans $[a, b]$ consiste à y approcher f par une fonction de premier degré $(\alpha x + \beta)$ prenant

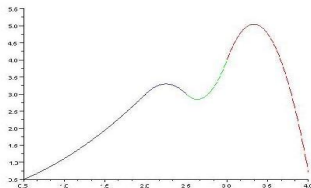
les valeurs $f(a)$ en a et $f(b)$ en b . problème élémentaire résolu par

$$p(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = \frac{x - b}{a - b}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b).$$

On remédie à la performance souvent médiocre de cet interpolant, soit en réduisant l'intervalle $[a, b]$ et en reprenant l'interpolation soit en augmentant le degré de p , soit encore en modifiant les conditions d'interpolation.

Ainsi dans les figures ci-dessous, on a interpolé linéairement entre deux points consécutifs, puis interpolé par du second degré en trois valeurs consécutives, puis enfin par des polynômes de degré deux en deux points consécutifs, mais en s'arrangeant pour avoir une dérivée continue aux points de racollement (Interpolation spline quadratique).





Déterminons $p \in \mathcal{P}_n$, en supposant f disponible aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ distincts :

$$p(x_i) = \alpha_0 x_i^n + \alpha_1 x_i^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x_i + \alpha_n = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n.$$

ce qui représente $(n+1)$ équations linéaires pour $(n+1)$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

La solubilité de ce système d'équations s'établit en principe par

l'étude de son déterminant

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}, \text{ ce qui peut \u00eatre d'ailleurs fait : il s'agit}$$

du d\u00e9terminant de Vandermonde qui vaut $\prod_{i=0}^n \prod_{j=i+1}^n (x_j - x_i)$,
effectivement non nul d\u00e8s que les x_i sont distincts.

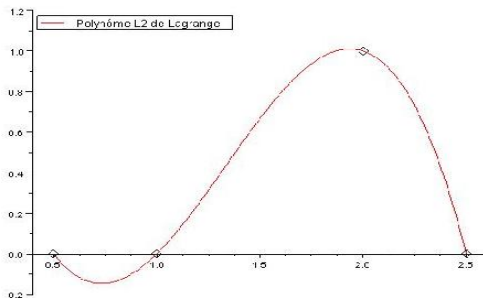
Formulation de Lagrange R\u00e9solvons le probl\u00e8me d'interpolation particulier suivant : soit L_j le polyn\u00f4me de $\mathcal{P}_n$ qui s'annule en tous les x_i sauf x_j , o\u00f9 il vaut 1 : $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$. Comme L_j doit s'annuler en $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$, il doit avoir la factorisation

$$L_j(x) = K(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n), \quad K$$

une constante puisque la factorisation contient déjà n facteurs du premier degré. Cette constante est telle que $L_j(x_j) = 1$, ce qui détermine entièrement le polynôme

$$L_j \in \mathcal{P}_n : L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right).$$

La figure ci-dessous représente L_2 de degré 3 passant par $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$, $(x_2, 1)$ et $(x_3, 0)$.



$$X = [0.5, 1, 2, 2.5]$$

La solution du problème d'interpolation dans $\mathcal{P}_n$ est alors

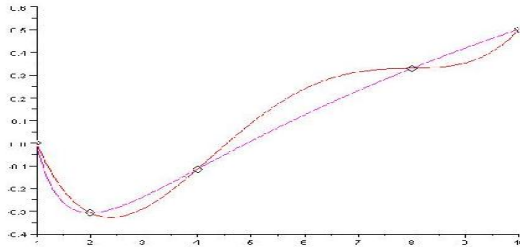
$$p(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i).$$

L'avantage de cette forme est de mettre en évidence le rôle des

valeurs de f . On voit bien que l'interpolant est le résultat d'une projection linéaire sur l'espace vectoriel engendré par les L_i .

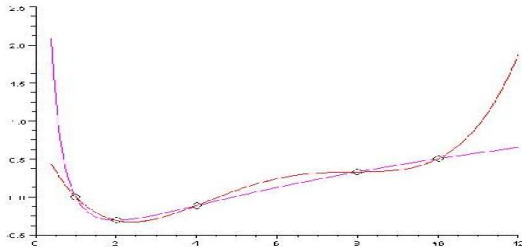
Exemple

La figure ci-dessous montre l'interpolation de $f(x) = \ln x - 2\frac{x-1}{x}$, aux points $[1, 2, 4, 8, 10]$



Remark

Lorsqu'on détermine un polynôme d'interpolation, on espère que le polynôme approche encore la fonction en dehors du domaine d'interpolation (extrapolation), le tracé de la fonction précédente et de son polynôme d'interpolation montre que ce n'est pas le cas, il y'a divergence rapide du polynôme d'interpolation par rapport à la fonction (voir figure suivante).



5.1.2 Erreur d'interpolation

L'erreur d'interpolation est donnée par un théorème de Cauchy : Si f est $(n + 1)$ fois continuellement différentiable sur

$$I = \left[\min_i(x_i, x), \max_i(x_i, x) \right], \text{ alors}$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \text{avec } \xi_x \in I.$$

Dans le cas où $x_i = x_0 + ih$ (points uniformément répartis), l'erreur d'interpolation est de l'ordre de $o(h^n)$.

Lemma (30)

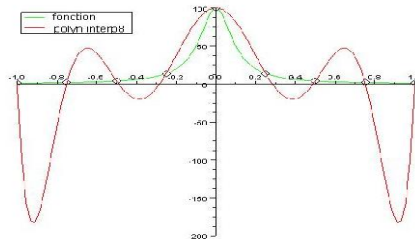
D'après le théorème précédent,

$$|f(x) - p(x)| \leq \max_{x \in I} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \right| \max_{x \in I} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Phénomène de Runge

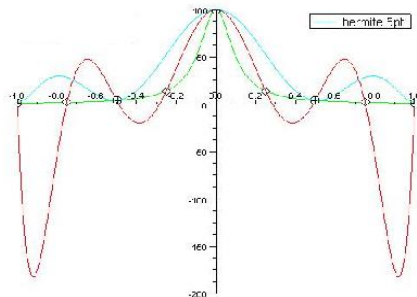
On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 + 0.01}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$,
et son polynôme d'interpolation de degré 8 en neuf points répartis

sur $[-1, 1]$ avec un pas $h = 0.25$. un phénomène très étrange apparait au bord de l'intervalle, et si on augmente le nombre de points, celà serait encore pire ! On appelle ce phénomène de non convergence des polynômes d'interpolation vers la fonction le phénomène de Runge.



Remark

Sur la même figure on a tracé le polynôme d'Hermite en $[-1, 0.5, 0, 0.5, 1]$; il est de degré 9 mais l'approximation est bien meilleure.



Remark

L'erreur résulte donc de deux termes :

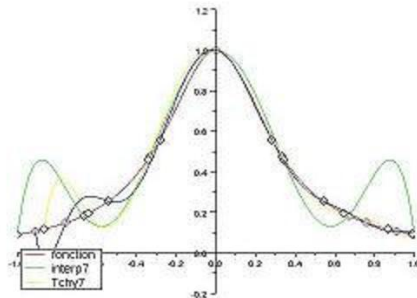
- *Le terme de dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de la fonction à interpoler, on y peut donc rien y changer, il sera simplement d'autant plus faible que la fonction est régulière.*
- *Par contre le deuxième terme dépend du choix des x_i .*

Le problème est le suivant : comment choisir les x_i pour rendre la quantité $\left(\max_{x \in [a,b]} \prod_{i=0}^n |x - x_i| \right)$ minimale ? On démontre que cette quantité est minimale pour les points x_i annulant les polynômes de Tchebychev, c'est à dire

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Exemple

Représentation de la fonction $f(x) = \frac{1}{1 + 10x^2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, de son polynôme de Lagrange avec répartition de Tchebychev en 7 points.



Rappel :

Les polynômes de Tchebychev T_k définis sur $[-1, 1]$ sont tels que

$$T_k(x) = \cos(k(\arccos(x))).$$

$$\text{On a } \begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1} \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Les polynômes de Tchebychev sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m \\ \pi & \text{si } k = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k = m \neq 0 \end{cases}$$

T_n admet exactement n racines simples définies par

$$x_k = \cos \left(\frac{2k+1}{n} \pi \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

T_n est de degré n , dont le coefficient du terme de degré n est 2^{n-1} .

T_n admet exactement $(n+1)$ extrema définis par $x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}$,
 $k = 0, \dots, n$.

Theorem (31)

Pour tout polynôme Q normalisé de degré $(n+1)$

$$\sup_{x \in [-1,1]} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)| \leq \sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)|$$

avec $x_k = \cos \left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi \right)$, $k = 0, \dots, n$.

Preuve : en exercice.

5.2 Interpolation d'Hermite

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ distincts et examinons maintenant l'interpolation d'Hermite où on fixe $f(x_i)$ et $f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$; on a donc $V = \mathcal{P}_{2n+1}$. Les éléments de la base d'Hermite sont :

1) $H_j \in \mathcal{P}_{2n+1}$ tel que $H_j(x_k) = 0$ et $H'_j(x_k) = 0$, $k = 0, \dots, n$, $k \neq j$; $H_j(x_j) = 1$ et $H'_j(x_j) = 0$.
Ce polynôme a donc n zéros double en x_k , $k \neq j$, ce qui donne

$$H_j(x) = (C_j x + D_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)^2 = (A_j x + B_j) L_j^2(x)$$

et puisque $H_j(x_j) = 1$ et $H'_j(x_j) = 0$, on a le système suivant

$$\begin{cases} 1 = A_j x_j + B_j \\ 0 = A_j + 2(A_j x_j + B_j) L'_j(x_j) \end{cases}$$

d'où $H_j(x) = \left[1 - 2(x - x_j) L'_j(x_j) \right] L_j^2(x) =$

$$= \left[1 - 2(x - x_j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)} \right] \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)^2.$$

2) $\tilde{H}_j \in \mathcal{P}_{2n+1}$ tel que $\tilde{H}_j(x_k) = 0$ et

$\tilde{H}'_j(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, n, \quad k \neq j; \quad \tilde{H}_j(x_j) = 0$ et $\tilde{H}'_j(x_j) = 1.$

Ce polynôme a donc n zéros double en $x_k, \quad k \neq j$, et un zéro simple en x_j , avec $\tilde{H}'_j(x_j) = 1$, ce qui donne

$$\tilde{H}_j(x) = (x - x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)^2.$$

D'où

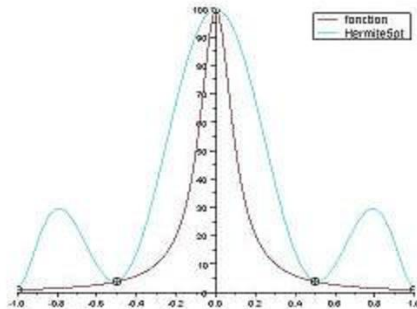
$$H(x) = \sum_{j=0}^n H_j(x) f(x_j) + \sum_{j=0}^n \tilde{H}_j(x) f'(x_j) =$$

$$\sum_{j=0}^n \left[1 - 2(x - x_j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)} \right] \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)^2 f(x_j) +$$

$$+ \sum_{j=0}^n (x - x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)^2 f'(x_j).$$

Exemple

Phénomène de Runge et amortissement de l'erreur avec l'interpolation d'Hermite.



5.2.1 Erreur d'interpolation

Theorem (32)

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^{2n+2}]a, b[, \mathbb{R}$, avec $x_0, x_1, \dots, x_n$ distincts dans $]a, b[$, alors $\forall x \in]a, b[, \exists \delta_x \in]a, b[$:

$$f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\delta_x)}{(2n+2)!} L^2(x) \quad \text{où} \quad L(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Preuve : Soit $x \in]a, b[$ fixé, si $x = x_i$, alors l'égalité est satisfaite.

Si $x \neq x_i \forall i$; on pose $\varphi(t) = f(t) - H(t) - \frac{f(x) - H(x)}{L^2(x)} L^2(t)$.

La fonction φ est bien définie sur $]a, b[$, elle est même de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.

On a $\varphi(x_k) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n$; et

$\varphi(x) = 0 \xrightarrow{\text{Th. Rolle}} \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ racines de φ' ($\alpha_i \neq x_k$).

On a aussi $\varphi'(x_k) = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n$. Donc φ' admet au moins $(2n + 2)$ racines réelles distinctes. En appliquant le théorème de Rolle successivement $\Rightarrow \varphi^{(2n+2)}$ admet au moins une racine notée δ_x .

$$\text{Or } \varphi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x) - H(x)}{L^2(x)} (2n + 2)!$$

$$\text{D'où le résultat } f(x) - H(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\delta_x)}{(2n + 2)!} L^2(x).$$

Corollary

Le polynôme d'interpolation d'Hermite est unique.

5.3 Interpolation par des splines

Lorsqu'on réalise une interpolation, on espère généralement que l'interpolation marche encore en dehors des points pris en compte pour calculer le polynôme. Or comme cela a été remarqué précédemment, l'interpolation polynomiale diverge rapidement en dehors des points d'interpolation. Ceci est aussi vrai sur les bords du domaine comme c'est le cas pour la fonction de Runge où les oscillations apparaissent lorsque le nombre de points est grand, une meilleure répartition des points (répartition de Tchebychev) permet de réduire l'erreur mais des oscillations subsistent. De plus, l'utilisation des polynôme de degré élevé est à éviter puisqu'on introduit rapidement des instabilités numériques.

On leur préfère alors une interpolation polynômiale par morceaux appelée spline.

Definition

Etant donnés $(n + 1)$ points (x_i, y_i) , la spline $S(x)$ est définie par

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Lorsque les polynômes $S_i(x)$ sont de degré 1, on parle de spline linéaire, quand ils sont de degré 2, on parle de spline quadratique. S'ils sont de degré 3, on parle alors de spline cubique.

5.3.1 Splines linéaires

Etant donnés $(n + 1)$ points (x_i, y_i) , (appelés noeuds), on cherche une spline linéaire $S(x)$ de la forme

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x + b_0, & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1x + b_1, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

vérifiant la condition d'interpolation $S(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$.

La première question à laquelle il faut répondre est : La spline est-elle unique ?

la détermination de la spline nécessite le calcul de $2n$ coefficients inconnus a_i et b_i , pour $i = 0, \dots, n - 1$. Pour cela on dispose de

$2n$ équations

- $(n + 1)$ équations d'interpolation

$$S(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n.$$

- $(n - 1)$ équations de continuité de la spline

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n - 2.$$

On en déduit donc de manière unique

$$\begin{cases} a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} & i = 0, \dots, n - 1 \\ b_i = y_i - a_i x_i & i = 0, \dots, n - 1 \end{cases}$$

5.3.2 Splines quadratiques

Nous avons vu précédemment que la spline linéaire ne permettait d'assurer que la continuité de la fonction S . Si on veut que S soit continuellement dérivable, il faut donc choisir des polynômes S_i de degré au moins égal à 2.

Definition

Supposons donnés $(n + 1)$ points (x_i, y_i) ($i = 0, \dots, n$).

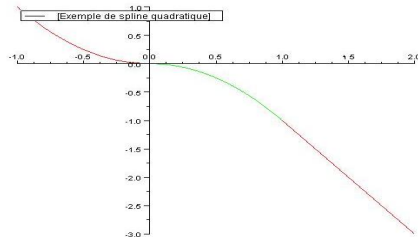
L'interpolation par des splines quadratiques équivaut à l'interpolation sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme du second degré. On impose aux différents points la continuité des valeurs et de leurs dérivées.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x^2 + b_0x + c_0, & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x^2 + b_{n-1}x + c_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Exemple

la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - 2x & x \geq 1 \end{cases}$$



représente une spline quadratique. En effet elle est continuellement dérivable sur $\mathbb{R}$.

La spline S est-elle unique ? La détermination de S nécessite le calcul de $3n$ inconnues (coefficients a_i , b_i , et c_i ; $i = 0, \dots, n-1$). Pour cela on dispose seulement de $(3n-1)$ équations :

- $(n+1)$ équations d'interpolation $S(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$.
- $(n-1)$ équations de continuité de la spline:

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n-2.$$

- $(n-1)$ équations de continuité de la dérivée de S :

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n-2.$$

Pour résoudre ce problème, il est donc nécessaire de fixer une

condition supplémentaire. Pour cela définissons la variable auxillaire $z_i = S'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$; et réécrivons

$$S_i(x) = \alpha_i(x - x_i)^2 + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i.$$

Des conditions d'interpolation, il apparait clairement que les γ_i sont déterminés de manière unique :

$$\gamma_i = S_i(x_i) \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

De plus par définition

$$\beta_i = S'_i(x_i) = z_i \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

Ce qui détermine les β_i . En écrivant maintenant les conditions de continuités de la dérivée, on obtient

$$2\alpha_i(x_{i+1} - x_i) + \beta_i = \beta_{i+1} \Rightarrow \alpha_i = \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{2(x_{i+1} - x_i)} = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)}.$$

Donc S_i se met sous la forme

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \cdot (x - x_i)^2 + z_i(x - x_i) + y_i.$$

Il ne reste plus qu' à calculer les z_i . Pour celà on écrit les équations de la continuité de la spline aux points x_{i+1} , $i = 0, \dots, n-2$.

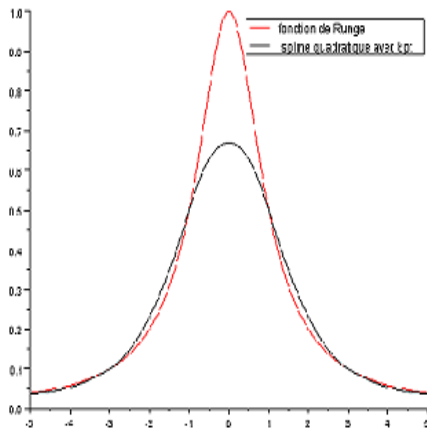
$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= \frac{z_{i+1} - z_i}{(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + z_i(x_{i+1} - x_i) + y_i = \\ S_{i+1}(x_{i+1}) &= y_{i+1} \end{aligned}$$

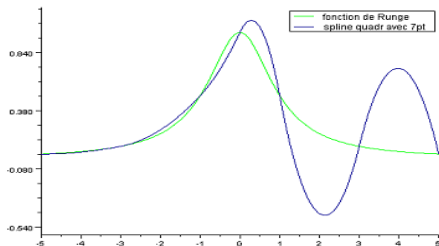
On en déduit donc que

$$z_{i+1} = 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - z_i \quad i = 0, \dots, n-2.$$

Et on voit apparaître naturellement la condition supplémentaire qui sera ici une condition d'initialisation de la récurrence sur les z_i . On doit choisir par exemple $z_0 = S'(x_0)$ (donnée), et faire une récurrence sur z_i . On pourra également fixer z_{n-1} et faire une récurrence descendante.

Les figures suivantes montrent les résultats obtenus pour la fonction de Runge $\left(f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}\right)$ respectivement aux points $[-5, -3, -1, 1, 3, 5]$ et $[-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5]$.





On remarque que le fait d'ajouter le point 0 améliore les résultats au voisinage de 0 mais dégrade les résultats sur l'intervalle $[2, 5]$.

On observe en effet des oscillations de forte amplitude.

5.3.3 Splines cubiques

L'interpolation par des splines cubiques (polynômes de degré 3)

entraîne la continuité de la spline, de sa dérivée première et de la

dérivée seconde.

Définissons $m_k = S_k''(x_k)$, S_k étant un polynôme de degré 3, alors

S_k'' est linéaire avec $S_k''(x_k) = m_k$ et $S_k''(x_{k+1}) = m_{k+1}$, d'où

$S_k''(x) = m_k \left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) + m_{k+1} \left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)$; en intégrant successivement on obtient pour $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ et

$k = 0, \dots, n-1$:

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1}-x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x-x_k)^3 + p_k(x_{k+1}-x) + q_k(x-x_k)$$

avec $h_k = x_{k+1} - x_k$.

Par interpolation $S_k(x_k) = y_k$ et $S_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$, on a

$$y_k = \frac{m_k}{6}h_k^2 + p_k h_k \text{ et } y_{k+1} = \frac{m_{k+1}}{6}h_k^2 + q_k h_k.$$

D'où

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6h_k}(x - x_k)^3 + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k h_k}{6}\right)(x_{k+1} - x) + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1} h_k}{6}\right)(x - x_k).$$

Pour déterminer S_k , il suffit de calculer les m_k , pour

$$k = 1, \dots, n-1.$$

En utilisant la continuité de S' aux points x_k , $S'_{k-1}(x_k) = S'_k(x_k)$, on obtient en posant $d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$, la relation entre m_{k-1} , m_k et m_{k+1} par :

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = 6(d_k - d_{k-1})$$

$$k=1, \dots, n-1.$$

5.3.4 Conditions frontières

Dans les splines dites **naturelles**, nous ajoutons les deux équations

$$m_0 = m_n = 0.$$

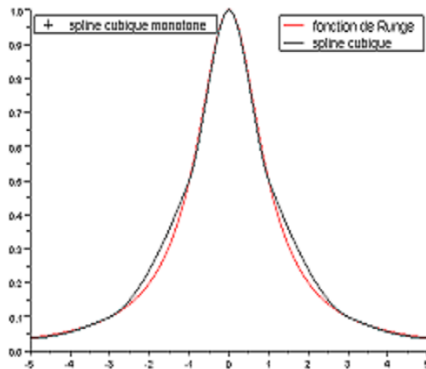
Le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $u_k = 6(d_k - d_{k-1})$.

La figure suivante montre un exemple de spline cubique monotone obtenue pour la fonction de Runge aux points d'interpolation $[-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5]$.



Theorem (33)

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, b]$, et soit $(n + 1)$ points $a = x_0, \dots, x_n = b$ et $f(x_i) = y_i$, alors la spline naturelle S qui réalise l'interpolation de f aux noeuds (x_i, y_i) , vérifie

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx.$$

Remark

suivant les conditions aux bords, nous avons différents types de splines :

- *Spline périodique : $S'(a) = S'(b)$ et $S''(a) = S''(b)$.*
- *Spline scellé : $S'(a) = \gamma_0$ et $S'(b) = \gamma_n$.*
- *Spline naturelle : $S''(a) = S''(b) = 0$.*
- *Spline monotone : Si $y(i) \leq y(i+1)$, S est croissante sur $[x(i), x(i+1)]$ et si $y(i) \geq y(i+1)$, S est décroissante sur $[x(i), x(i+1)]$.*