# Fonctions Riemann intégrables

lundi 31 mars 2020

## 1 Fonctions en escalier

### 1.1 Subdivisions

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ ( $-\infty < a < b < +\infty$) est une famille finie $S = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$ de réels tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. On appelle diamètre de la subdivision $S$ la quantité:

$$\delta(S) = \min \{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, 2..., n-1\}$$

Une subdivision $S_1$ de $[a; b]$ est dite plus fine qu'une subdivision $S_0$ de $[a; b]$ si $S_1 \subset S_0$. Cela veut dire que $S_0$ découpe $[a; b]$ en plus de morceaux. En particulier dans ce cas, on a évidemment $\delta(S_1) \geqslant \delta(S_0)$.

**Exemple 1.1** Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ alors

$$S_n = \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_k = a + k\frac{b-a}{n}, ...x_n = b \right\}$$

est une subdivision de $[a, b]$ dont le diamètre est $\delta(S_n) = \dfrac{b-a}{n}$

### 1.2 Fonctions en escalier

**Définition 1.1** *On dit qu'une fonction $f$ sur $[a, b]$ est en escalier, s'il existe une subdivision $S = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$ de $[a, b]$ telle que*

$$f(t) = c_i \in \mathbb{R}, \forall t \in ]x_i, x_{i+1}[, \; i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

*On dira que $S$ est une subdivision associée à $f$.*

Remarquez qu'on ne parle que des intervalles ouverts, rien n'est imposé sur les points $x_i$, on peut bien avoir de la continuité à droite ou à gauche en certain de ces points,etc...

**Exemple 1.2** soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par,

$$f_n(x) = \begin{cases} x_i & si\ x_i < x < x_{i+1} \\ 1 & si\ x = x_i, i = 0, 1; ...n \end{cases}$$

où pour tout $n \geqslant 1$, les $x_i$ sont les points de la subdivision de $[0,1]$ donnée par

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, ..., x_k = \frac{k}{n}, ...x_n = 1 \right\}$$

**Proposition 1.1** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|f|$, $f+g$, $\lambda f$ et $fg$ sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*

*Preuve.* Si $S_0$ et $S_1$ sont des subdivisions associées à $f$ et $g$ respectivement alors $S = S_0 \cup S_1$ est associée à $f$ et à $g$. On peut donc supposer que $f$ et $g$ sont en escalier sur la même subdivision $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Ainsi $f$ et $g$ sont constantes, égales respectivement à $c_i$ et $d_i$ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|f|$, $\lambda f$, $f+g$ et $fg$ sont égales à $|c_i|$, $\lambda c_i$, $c_i + d_i$ et $c_i d_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. D'où la proposition.

■

## 1.3 Intégrales de fonctions en escalier

**Définition 1.2** *Soit $f$ une fonction en escalier sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associée à $f$: c'est-à-dire $f$ est éegale à $c_i$ sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$, on note $I_S(f)$ la surface algébrique de la famille de rectangles sous la courbe de $f$ :*

$$I_S(f) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$

**Proposition 1.2** *La quantité $I_S(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision $S$ associée à $f$, elle ne dépend que de $f$ et de $[a,b]$.*

*Preuve.* Considérons deux subdivisions $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $S' = (y_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ associées à $f$.

$1^{er}$ cas $S \subset S'$. Sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ la fonction $f$ est constante égale à $c_i$. Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalles $]y_k; y_{k+1}[$, $k = l_0, l_0+1, l_0+2, ..., l_1$ où $f$ prend des valeurs $d_l$ qui sont forcément toutes égales à $c_i$. Donc

$$\sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} d_l \left(y_{l+1} - y_l\right) = \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} c_i \left(y_{l+1} - y_l\right) = c_i \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} \left(y_{l+1} - y_l\right) = c_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

En faisant la somme sur tous les $i = 0; 1, 2, ..., n-1$ on aura

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} d_l \left(y_{l+1} - y_l\right) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

Ainsi, dans ce cas, $I_{S'}(f) = I_S(f)$.

$2^{ieme}$ cas si $S$ et $S'$ sont quelconques, associées à $f$ alors $S'' = S \cup S'$ est une subdivision associée à $f$ vérifiant $S \subset S''$ et $S' \subset S''$. D'après le cas premier, on a:

$$I_S(f) = I_{S''}(f) = I_{S'}(f)$$

■

Cette quantité qui ne dépend donc que de $f$ et de $[a, b]$ est notée

$$\int_a^b f(t)dt$$

et appelée l'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$.

**Proposition 1.3** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:*

*1)* $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$

*2)* $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

*En d'autre termes:* $\chi : f \mapsto \chi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est une forme linéaire sur l'espace vectoriele des fonctions en escalier sur* $[a, b]$.

*Preuve.* 1) Si $S = (x_j)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision associée à $f$ alors elle l'est à $\lambda f$ aussi. Si $f$ prenait les valeurs $c_i$ sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$ alors $\lambda f$ prend les valeurs $\lambda c_i$ sur ces mêmes intervalles. On obtient donc

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

2) Soit $S = (x_j)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associée à $f$ et à $g$. Chacune de ces fonctions vaut $c_i$ et $d_i$ respectivement sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$. Ainsi $f + g$ vaut $c_i + d_i$ sur ces intervalles et on aura

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} (c_i + d_i)\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) + \sum_{i=0}^{i=n-1} d_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

$$= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

■

**Proposition 1.4** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions en escalier sur [a; b].*

*1) Si $f$ est positive sur tout $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

*2) Si $f \geqslant g$ sur tout $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$$

*3) On a*

$$\int_a^b |f(t)|dt \geqslant \left| \int_a^b f(t)dt \right|$$

*Preuve.* 1) Soit $S=(x_j)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associée à $f$ alors toutes les valeurs $c_i$ de $f$ sur $]x_i;x_{i+1}[$ sont positives. Comme les $x_{i+1}-x_i$ sont tous positifs, donc

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{i=0}^{i=n-1} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right)\geqslant 0$$

2) Il suffit d'appliquer 1) à $f-g$.

3) Tout $x\in[a,b]$ vérifie, $|f(x)|\geqslant f(x)\geqslant -|f(x)|$ l'assertion 2) implique

$$\int_a^b |f(x)|dt\geqslant\int_a^b f(t)dt\geqslant -\int_a^b |f(x)|dt$$

D'où

$$\int_a^b |f(t)|dt\geqslant\left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

■

# 2 Fonctions Riemann-intégrables

## 2.1 Définitions

Soit $f$ une fonction définie et bornée sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$. On note

$$E_-(f)=\{\varphi:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ telle que } \varphi \text{ en escalier et } \varphi\leqslant f\}$$

$$E_+(f)=\{\psi:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ telle que } \psi \text{ en escalier et } f\leqslant\psi\}$$

$$I_-(f)=\left\{\int_a^b\varphi(t)dt:\ \varphi\in E_-(f)\right\}$$

$$I_+(f)=\left\{\int_a^b\psi(t)dt:\ \psi\in E_+(f)\right\}$$

Comme $f$ est bornée, donc

$$m=\min\{f(x):x\in[a,b]\} \text{ et } M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$$

existent bien dans $\mathbb{R}$ et les fonctions $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $M : [a,b] \to \mathbb{R}$ définies par $m(x) = m$ et $M(x) = M$ vérifient $m \leqslant f \leqslant M$. Donc $m \in E_-(f)$ et $M \in E_+(f)$. Ainsi

$$m(b-a) = \int_a^b m dt \in I_-(f) \Rightarrow I_-(f) \neq \emptyset$$

et

$$M(b-a) = \int_a^b M dt \in I_+(f) \Rightarrow I_+(f) \neq \emptyset$$

Clairement $M(b-a)$ est un majorant de $I_-(f)$ et $m(b-a)$ est un minorant de $I_+(f)$. Donc

$$i_a^b(f) = \sup(I_-(f)) \quad \text{et } I_a^b(f) = \inf(I_+(f))$$

existent dans $\mathbb{R}$ et vérifient évidement:

$$i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f)$$

**Définition 2.1** *On dit qu'une fonction bornée $f$ sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann si $i_a^b(f) = I_a^b(f)$. Cette valeur commune est notée*

$$\int_a^b f(t)dt$$

*et appelée intégrale de $f$ entre $a$ et $b$.*

En analyse réelle, il est souvent utile de ramener un problème à une propriété séquentielle convenable par exemple *une fonction $f$ est continue en un point $a$ si etseulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers $a$ sa suite image $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.* C'est le cas de la définition précédente

**Théorème 2.1** *Une fonction $f$ définie et bornée sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que*

$$\begin{cases} \varphi \leqslant_n f \leqslant \psi_n & \forall n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt & = 0 \end{cases}$$

*Dans ce cas on a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \psi_n(t)dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt$ *et cette limite commune est* $\int\limits_a^b f(t)dt$.

*Preuve.* Suppouons que $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int\limits_a^b f(t)dt$. Par définition de la borne inférieure et supérieure ona

$$\begin{cases} \forall\varphi \in E_-(f) & \int\limits_a^b \varphi(t)dt \leqslant i_a^b(f) \\ \forall\varepsilon > 0, \exists\varphi_\varepsilon \in E_-(f) & i_a^b(f) - \varepsilon < \int\limits_a^b \varphi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \forall\psi \in E_+(f) & \int\limits_a^b \psi(t)dt \geqslant I_a^b(f) \\ \forall\varepsilon > 0, \exists\varphi_\varepsilon \in E_+(f) & I_a^b(f) + \varepsilon > \int\limits_a^b \varphi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

Ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ il existe alors deux fonctions $\varphi_n \in E_-(f)$ et $\psi_n \in E_+(f)$ telles que

$$i_a^b(f) - \frac{1}{n} < \int\limits_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f)$$

$$I_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \psi_n(t)dt < I_a^b(f) + \frac{1}{n}$$

Si on fait tendre $n$ vers l'infini, on aura

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt = i_a^b\left(f\right) = \lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \psi_n(t)dt = I_a^b\left(f\right)$$

Par construction, les fonctions $\varphi_n$ et $\psi_n$ sont bien en escalier et satisfont $\varphi_n \leqslant f \leqslant \omega_n$. Ainsi la preuve dans un sens est faite.

Réciproquement,, si il existe deux suites $\left(\varphi_n\right)_n$ et $\left(\psi_n\right)_n$ telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n, \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b \left(\psi_n - \varphi_n\right)(t)dt = 0$$

alors comme on a

$$\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \psi_n(t)dt$$

on en déduit que

$$0 \leqslant I_a^b(f) - i_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \left(\psi_n(t) - \varphi_n(t)\right)ddt$$

Ce qui montre que $I_a^b(f) = i_a^b(f)$. De plus on a:

$$0 \leqslant i_a^b(f) - \int\limits_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant \int\limits_a^b \left(\psi_n(t) - \varphi_n(t)\right)ddt$$

et

$$0 \leqslant \int\limits_a^b \psi_n(t) - I_a^b(f) \leqslant \int\limits_a^b \left(\psi_n(t) - \varphi_n(t)\right)ddt$$

Il suffit alors de faire tendre $n$ vers l'infini pour conclure.

$\blacksquare$

**Exemple 2.1** • Soit $f$ la fonction sur l'intervalle $[0;1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soient $\varphi \in E_-(f)$ et $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associé à $\varphi$, donc

$$\varphi \leqslant f \text{ et } \varphi(t) = c_i,\ \forall t \in ]x_i, x_{i+1}[$$

Or pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1,\ \mathbb{Q} \cap ]x_i, x_{i+1}[ \neq \emptyset,$ donc si $a$ est dans cette intersection non vide alors on aura

$$c_i = \varphi(a) \leqslant f(a) = 0$$

Puisque tous les $x_{i+1} - x_i$ sont positifs, donc

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) \leqslant 0$$

Donc $i_0^1(f) \leqslant 0$

De même si $\psi \in E_+(f)$ et $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associé à $\psi$, alors

$$f \leqslant \psi \text{ et } \psi(t) = d_i,\ \forall t \in ]x_i, x_{i+1}[$$

$\forall i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ , $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap ]x_i, x_{i+1}[ \neq \emptyset,$ Soit un élément de cette intersection non vide, il vérifie donc

$$1 = f(b) \leqslant \psi(b) = d_i \Rightarrow d_i (x_{i+1} - x_i) \geqslant (x_{i+1} - x_i)$$

donc

$$\int_a^b \psi(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} d_i (x_{i+1} - x_i) \geqslant \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1$$

Ainsi $I_0^1(f) \geqslant 1.$

Conclusion: $i_0^1(f) \leqslant 0 < 1 \leqslant I_0^1(f) \Rightarrow i_0^1(f) \neq I_0^1(f)$ $f$ n'est donc pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$

• Montrons à l'aide du théoème caractéristique ci-dessus (qu'on peut cosidérer comme définition ), que la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ telle que: $f(x)=ax$ pour un certain $a\in\mathbb{R}_+^*$ est intégrable sur $[0,1]$.

Pour tou $n\geqslant 1$, on consdère la subdivision de $[0,1]$ telle que

$$S_n=\left\{x_0=0,x_1=\frac{1}{n},...,x_k=\frac{k}{n},...x_n=1\right\}$$

qui va être associée aux fonctions en escalier définies par

$$\varphi_n(t)=ax_i,\ \psi_n(t)=ax_{i+1},\forall t\in]x_i,x_{i+1}[,\ i=0,1,...,n-1$$

$$\varphi_n(x_i)=0,\psi_n(x_i)=a,\ i=0,1,...,n-1$$

Puisque $f$ es strictement croissante, donc

$$\varphi_n\leqslant f\leqslant\psi_n$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\varphi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1}ax_i\left(x_{i+1}-x_i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}a\frac{i}{n}\frac{1}{n}\\ &= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i\\ &= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n-1\right)}{2}\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}\int_0^1\psi_n(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1}ax_{i+1}\left(x_{i+1}-x_i\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}a\frac{i+1}{n}\frac{1}{n}\\ &= \frac{a}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i+1\\ &= \frac{a}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \psi_n(t)dt = \frac{a}{2}$$

Ainsi $f$ est intégrable sur $[0,1]$ et son intégrale vaut $\displaystyle\int_0^1 (at)dt = \frac{a}{2}$ .

## 2.2 Opérations sur les fonctions intégrables

**Proposition 2.1** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f$ et $f+g$ sont intégrables sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

*Preuve.* Comme $f$ et $g$ sont intégrables on sait qu'il existe des suites $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \ , \ u_n \leqslant g \leqslant v_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (v_n - u_n)(t) = 0$$

Il s'en suit que:
$\star$ si $\lambda > 0$ alors

$$\lambda\varphi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\lambda\psi_n - \lambda\varphi_n)(t)dt = 0$$

$\star$ si $\lambda < 0$ alors

$$\lambda\psi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\varphi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n - \lambda\psi_n)(t) = 0$$

Pour $\lambda = 0$ c'est trivial. Donc $\lambda f$ est intégrable sur $[a, b]$. On a déjà vu que pour les fonctions en escalier l'intégrale est linéaire et de la linéarité de la limite on déduit que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \int_a^b \varphi_n(t)dt\right) \\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\varphi_n + u_n \leqslant f + g \leqslant \psi_n + v_n$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\psi_n+v_n)(t)dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n dt+\lim_{n\to+\infty}\int_a^b v_n dt\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n dt+\lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n dt\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\varphi_n+u_n)(t)dt\\
&= \int_a^b (f+g)(t)dt
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il falait démontrer.

■

Notons $\mathcal{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$ (qui contient évidement les fonctions en escalier sur $[a,b]$ ). La propostion2.1 nous informe que $\mathcal{R}([a,b])$ est un espace vectoriel réel et que $f\mapsto\int_a^b f(t)dt$ est une application linéaire de $\mathcal{R}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ ( donc c'est une forme linéaire de $\mathcal{R}([a,b])$).

## 2.3 Intégrales et inégalités

Les inégalités liées aux intégrales de fonctions en escalier vont s'étendre sans difficulté aux fonctions Riemann intégrables.

**Proposition 2.2** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a;b]$ de $\mathbb{R}$.*

*1) Si $f\geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f(t)dt\geqslant 0$

*2) Si $f\geqslant g$ sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f(t)dt\geqslant\int_a^b g(t)dt$

*Preuve.* 1) Comme $f$ est intégrable, on sait qu'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que $f \leqslant \psi_n$ pour tout $n$ et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt$$

Comme $f$ est positive, toutes les fonctions $\psi_n$ le sont aussi, donc les intégrales $\int_a^b \psi_n(t)dt$ sont positives et leur limite aussi.

2) Il suffit d'appliquer 1) à $f - g \geqslant 0$

■

Soit $f$ une fonction bornée sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$ on pose

$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} \text{ et } f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

Il est clair que ces deux fonctions sont positives et que

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

**Proposition 2.3** *Soit $f$ une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$, alors $f_+$, $f_-$ et $|f|$ sont aussi intégrables et*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$$

*Preuve.* Comme $f$ est intégrable alors il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ vérifiant $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et dont les intégrales convergent vers celle de $f$. On vérifie alors facilement que $(\varphi_n)_+ \leqslant f_+ \leqslant (\psi_n)_+$ et que $(\psi_n)_+ - (\varphi_n)_- \leqslant (\varphi_n)_+$. Donc $f_+$ est intégrable sur $[a, b]$. Par la même méthode, $f_-$ est intégrable sur $[a, b]$ D'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable sur $[a, b]$.

L'inégalité des intégrales découle de 2) de la proposition2.2. appliquée à

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$$

■

**Proposition 2.4** ***(Formule de la moyenne)*** *Soit $f$ une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$ avec $a < b$. Soient $m$ et $M$ la borne inférieure et la borne supérieure de $f$ sur $[a, b]$. Alors le réel*

$$\kappa = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

*appartient à $[m, M]$.*

*Preuve.* Comme on a $m \leqslant f \leqslant M$ on en déduit

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M\,(b-a)$$

■

**Exemple 2.2** **(Application)** Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)} dt$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t\,(1+\cos^2(t))} dt$$

## 2.4 Intégrales et produits

**Proposition 2.5** *Si $f$ et $g$ sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ alors $fg$ est bornée et intégrable sur $[a, b]$.*

*Mais en général* $\displaystyle\int_a^b (fg)(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b f(t)dt\right)$

*Preuve.* $\star$ Cas où $f$ et $g$ sont toutes les deux positives. On pose

$$M = \max\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\} \text{ et } N = \max\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

Par définition, il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n, (u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } u_n \leqslant g \leqslant v_n$$

Posons

$$\varphi'_n(x) = \max\{\varphi_n(x), 0\}, \ \psi'_n(x) = \min\{\psi_n(x), M\}$$
$$u'_n(x) = \max\{u_n(x), 0\}, \ v'_n(x) = \min\{v_n(x), N\}$$

Ce sont toutes des fonctions en escalier qui vérifient bien

$$\varphi_n \leqslant \varphi'_n \text{ et } 0 \leqslant \varphi'_n \leqslant f \leqslant \psi'_n \leqslant \psi_n$$

$$u_n \leqslant u'_n \text{ et } 0 \leqslant u'_n \leqslant g \leqslant v'_n \leqslant v_n$$

A cause de la positivité, on aura donc

$$\varphi'_n u'_n \leqslant fg \leqslant \psi'_n v'_n$$

le fonctions qui encadrent $fg$ sont en escalier. Montrons la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t)dt = 0$$

Pour ce la on va utiliser les assertion satisfaites suivantes

$$v'_n \leqslant N, \varphi'_n \leqslant \psi'_n \leqslant M$$

$$0 \leqslant \psi'_n - \varphi'_n \leqslant \psi_n - \varphi_n$$

$$0 \leqslant v'_n - u'_n \leqslant v_n - u_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(t)dt = 0$$

pour pouvoir écrire

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt \\
&= \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n' + \varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt \\
&= \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n'\right)(t)dt + \int_a^b \left(\varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt \\
&= \int_a^b v_n'(t)\left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t)dt + \int_a^b \varphi_n'(t)\left(v_n' - u_n'\right)(t)dt \\
&\leqslant \int_a^b v_n'(t)\left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t)dt + \int_a^b \psi_n'(t)\left(v_n' - u_n'\right)(t)dt \\
&\leqslant N\int_a^b \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t)dt + M\int_a^b \left(v_n' - u_n'\right)(t)dt \\
&\leqslant N\int_a^b \left(\psi_n - \varphi_n\right)(t)dt + M\int_a^b \left(v_n - u_n\right)(t)dt \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

(2.1) montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt = 0$$

Donc $fg$ est R-intégrable.

$\star$ $f$ et $g$ bornées intégrables non nécessairement positive. Posons

$$m = \min\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\} \text{ et } m' = \min\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

Les fonctions $f - m$ et $g - m'$ qui sont bornées et intégrables sont positives. D'après le cas précédent, $(f-m)(g-m')$, est intégrable. Puisque

$$fg = (f-m)(g-m') + mg + m'f - mm',$$

on en déduit que $fg$ est bornée Riemann intégrable.

Pour voir qu'on n'a pas toujours l'égalité, il suffit de prendre $[a,b]=[0,2]$ et $f=g=1$

$$\int_0^2 (fg)(t)dt = \int_0^2 dt = 2 \neq 4 = \left(\int_0^2 dt\right)^2 = \int_0^2 (f)(t)dt \times \int_0^2 (g)(t)dt$$

$\blacksquare$

**Théorème 2.2** ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ alors*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

*Preuve.* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f+\lambda g$ est intégrable, donc $(f+g\lambda)^2$ l'est aussi. Comme c'est une fonction positive, donc

$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2 dx \geqslant 0$$

Ainsi

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (f(x))^2 dx \geqslant 0$$

est un polynôme de degré deux en $\lambda$ et qui est toujours du signe du cœfficient $\int_a^b (g(x))^2 dx$ de $\lambda^2$, donc son discriminant est négatif , c'est-à-dire :

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right) \leqslant 0$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz désirée. $\blacksquare$

# 3 Familles de fonctions intégrables

**Université My Ismail** **Année Univer. 2019-2020**
**F. S. T. Errachidia** **Parcours MIP. S2 Analy2**
**Départ. de Maths** **Resp. Mustapha Laayouni**

**Série n$^o$1**

**Exercice1**: Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} 2^x dx,\ I_2 = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx\ \ (n \in \mathbb{Z})\ ,\ I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx,$$

$$I_4 = \int_2^4 \frac{\ln(x)}{x} dx\ ,\ I_5 = \int_2^4 \frac{1}{x \ln(x)} dx,\ I_6 = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx,$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2-5x+6} dx\ ,\ I_8 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx,\ I_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^4-1} dx.$$

**Exercice2**: (Théorème de Heine): Montrer que toute fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ est uniformément continue sur $[a;b]$.

**Exercice3** Soit $f$ une fonction en escalier sur $[a;b]$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

**Exercice4**: Soit $f$ la fonction sur l'intervalle $[0;1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer à l'aide de la définition que $f$ n'est pas intégrable.

**Exercice5**: Soit $g$ une fonction réelle monotone définie sur l'intervalle $[0;1]$. Montrer
(i) que $g$ est bornée.
(ii) à l'aide de la définition, que $g$ est intégrable au sens de Riemann.
(iii) Donner un encadrement de son intégrale.
(iv) Application: $g$ est définie par $g(x) = ax$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$).

**Si des étudiants ont des questions sur ce cours, prière de me rédiger le problème via Whatsapp au $N$ 0694583317. Je vous enverrai (in chaa allah) les réponses par Whatsapp. La suite du chapitre un et la solution de cette série vous seront envoyés ultérieurement in chaa allah.**