Corrigé de la série de Travaux-Dirigés : 3 Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1

1. Déterminer le reste R de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $B = X - a$ où $a \in \mathbb{K}$.
2. Déterminer de deux manières le reste R de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par $B = (X - a)^2$ où $a \in \mathbb{K}$.

Solution :

1. La division euclidienne de P par $X - \lambda$ s'écrit :

$$P = (X - \lambda)Q + R \quad (1)$$

pour certains $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec : $\deg(R) < 1$, donc en fait R est un polynôme constant. Evaluons (1) en λ pour obtenir : $P(\lambda) = (\lambda - \lambda)Q(\lambda) + R(\lambda) = R$.

2. — **Première méthode :** En effectuant la division euclidienne de P par $(X - a)^2$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R = \alpha X + \beta \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que $P = (X - a)^2 Q + \alpha X + \beta$. On en déduit, après évaluation en a , que $P(a) = \alpha a + \beta$. De plus, $P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q' + \alpha$ et donc, après évaluation en a , on obtient : $\alpha = P'(a)$. D'où $R = P'(a)X + P(a) - aP'(a) = P(a) + (X - a)P'(a)$.
- **Deuxième méthode :** D'après la formule de Taylor en a , pour $n = \deg(P)$ (on peut supposer $n \geq 2$ car sinon $Q = 0$ et $R = P$) :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k = P(a) + P'(a)(X - a) + (X - a)^2 \sum_{k=2}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^{k-2}.$$

Par unicité dans la division euclidienne, on en déduit que $R = P(a) + P'(a)(X - a)$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n - 1$. Effectuer la division euclidienne de P_n par P_m .

Solution :

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. La division euclidienne de n par m s'écrit $n = qm + r$ où $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq r < m$. Ainsi : $X^n - 1 = X^{qm+r} - 1$ et donc

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= X^{qm+r} - X^r + X^r - 1 = X^r \left((X^m)^q - 1 \right) + X^r - 1 \\ &= X^r \left(1 + X^m + (X^m)^2 + \dots + (X^m)^{q-1} \right) (X^m - 1) + X^r - 1. \end{aligned}$$

Puisque $\deg(X^r - 1) \leq r < m$ (si $r \geq 1$ $\deg(X^r - 1) = r$ et si $r = 0$, $\deg(X^r - 1) = -\infty$), la division euclidienne est achevée. Le quotient est $Q = X^r \left(1 + X^m + (X^m)^2 + \dots + (X^m)^{q-1} \right)$ et le reste est $R = X^r - 1$.

Exercice 3

- Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant : $P(X + 1) = P(X)$.
- Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = (X^2 + 1) \times P$ (*).

Solution :

- Raisonnons par analyse-synthèse. Soit P un tel polynôme et posons $Q = P - P(0)$. On prouve sans peine que $Q(X + 1) = Q(X)$ et $Q(0) = 0$. On en déduit par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n) = 0$. Le polynôme Q admet donc une infinité de racines : $Q = 0$ et donc P est constant. Réciproquement, il est clair qu'un polynôme P constant vérifie $P(X + 1) = P(X)$.
- Raisonnons par analyse-synthèse. Tout d'abord, remarquons que le polynôme nul vérifie bien (*). Supposons qu'il existe un polynôme non nul vérifiant (*). Alors, en calculant le degré de chaque membre, on trouve : $2 \deg P = 2 + \deg P$. D'où : $\deg P = 2$. Ainsi, s'il existe un polynôme non nul vérifiant (*), alors $\deg P = 2$. Réciproquement, soit $P = aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$ (seuls ces polynômes peuvent être solutions de (*)). Alors, $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et $(1 + X^2) \times P = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + bX + c$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P \text{ vérifie } (*) &\Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + bX + c \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} b &= 0 \\ c + a &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= 0 \\ c &= -a \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow P = aX^2 - a \text{ avec } a \neq 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion : Les polynômes qui vérifient (*) sont les polynômes $P = aX^2 - a$ avec $a \in \mathbb{K}$. (Il ne faut pas oublier que le polynôme nul est solution de (*)).

Exercice 4

- Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme $A = X^n + X + b$, $n \in \mathbb{N}^*$ par $B = (X - a)^2$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
- Trouver a et b réels tel que le polynôme $P = X^3 + aX + b$ admette le nombre $z = 1 + i$ comme racine.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère le polynôme P défini par $P = \alpha X^{n+1} + \beta X^n + 1$. Déterminer les réels α et β pour que P soit divisible par $(X - 1)^2$.
- Déterminer $n \in \mathbb{N}$ pour que le polynôme $(X + 1)^{2n+1} + X^{2n+2}$ soit divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$.
- Soient m, n et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$ divisible par $X^2 + X + 1$.

Solution : Déjà fait la séance du cours.

Exercice 5

Déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ du polynôme

$$P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$$

sachant que j est une racine multiple de P .

Solution :

N'oublions pas la périodicité des puissances de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ($(j_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, j, j^2, 1, j, j^2, \dots)$) ni la

relation bien connue $1 + j + j^2 = 0$.

On a $P(j) = 0$. De même, on vérifie que $P'(j) = 0$. En revanche, $P''(j) = 42 \neq 0$. Ainsi, le nombre complexe j est une racine de P de multiplicité 2. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{j} = j^2$ en est également une racine de multiplicité 2. De plus, les nombres 0 et -1 sont des racines évidentes de P . Le polynôme P est donc divisible par

$$Q := X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2 = X(X+1)(X^2+X+1)^2.$$

D'autre part, en appliquant la formule du Binôme, on obtient :

$$P = \sum_{k=0}^7 C_7^k X^k - X^7 - 1 = \sum_{k=1}^6 C_7^k X^k.$$

P est donc de degré 6. Comme $\deg P = \deg Q = 6$ et $P|Q$, alors $P = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalement, puisque Q est unitaire, alors $\lambda = \text{dom } P = C_7^6 = 7$ et donc :

$$P = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2.$$

Exercice 6

On considère le polynôme $P = X^5 - 1$.

1. Décomposer P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire les racines de $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$.
3. Décomposer Q dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire la valeur de $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $r_2 = \cos(\frac{4\pi}{5})$.

Solution :

1. Cherchons les racines de P dans $\mathbb{C}$, c-à-d les nombres complexes z tels que $z^5 - 1 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} z^5 - 1 = 0 &\Leftrightarrow z^5 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \quad k \in \{0, \dots, 4\}. \end{aligned}$$

D'où, dans $\mathbb{C}[X]$: $P = \prod_{k=0}^4 (X - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$.

2. On a : $X^5 - 1 = (X - 1)Q$. De plus, D'après la question 1, on a :

$$X^5 - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^4 (X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}).$$

Ainsi, après simplification :

$$Q = \prod_{k=1}^4 (X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}).$$

D'où, les racines de Q dans $\mathbb{C}$ sont :

$$e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \quad k \in \{1, \dots, 4\}.$$

3. Dans $\mathbb{C}[X]$, on a : $Q = \prod_{k=1}^4 (X - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$. Or $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}}$ sont conjugués ainsi que $e^{i\frac{4\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Donc, dans $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} Q &= (X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{i\frac{8\pi}{5}})(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{i\frac{6\pi}{5}}) \\ &= (X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1). \end{aligned}$$

- En général, pour trouver la factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ à partir de sa factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$, on regroupe les racines non réelles du polynôme par paires de conjugués $(a, \bar{a})$ afin d'obtenir un polynôme à coefficients réels $(X - a)(X - \bar{a}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(a)X + |a|^2$.
4. Posons $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $r_2 = \cos(\frac{4\pi}{5})$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} Q &= (X^2 - 2r_1X + 1)(X^2 - 2r_2X + 1) \\ &= X^4 + (-2r_1 - 2r_2)X^3 + (2 + 4r_1r_2)X^2 + (-2r_1 - 2r_2)X + 1. \end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients et donc :

$$\begin{cases} -2r_1 - 2r_2 = 1 \\ 2 + 4r_1r_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{1}{2} \quad (\clubsuit) \\ r_1r_2 = -\frac{1}{4} \quad (\spadesuit). \end{cases}$$

($\clubsuit$) donne : $r_2 = -\frac{1}{2} - r_1$. Ensuite, en injectant l'expression de r_2 dans ($\spadesuit$), on trouve :

$$r_1^2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{4} = 0.$$

Donc :

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, alors $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Donc $r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et par suite $r_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$.

Exercice 7

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

- $\frac{X^5}{X^4 - 1}$.
- $\frac{X}{(X^2 + X + 1)(X + 1)^3}$.

Solution :

Exercice 8

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

- $\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$.
- $\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)}$.
- $\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)}$.

Solution :

Exercice 9

Soit $P = X^8 + X^6 + 2X^5 + 2X^3 + X^2 + 1$.

1. Vérifier que -1 et $-j$ sont des racines de P . Déterminer leur ordre de multiplicité.
2. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $G = \frac{(X^2-X+1)^2}{P}$. Décomposer G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Solution :

1. On vérifie que $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) = 20 \neq 0$. Donc, -1 est une racine de P de multiplicité égale à 2. De plus, on a : $P(-j) = P'(-j) = 0$ et $P''(-j) = 2 + 18j \neq 0$. Donc, $-j$ est une racine de P de multiplicité égale à 2.
2. D'après la question 1, on a P est divisible par $(X+1)^2(X+j)^2$. Or, comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et $-j$ est une racine de P de multiplicité 2, alors $-j^2$ est aussi racine de P de multiplicité 2. Ainsi, P est divisible par

$$Q := (X+1)^2(X+j)^2(X+j^2)^2 = (X+1)^2(X^2-X+1)^2 = X^6 + 2X^3 + 1.$$

En effectuant la division euclidienne de P par Q , on obtient :

$$P = (X^2+1)(X^6+2X^3+1).$$

D'où, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = (X^2+1)(X+1)^2(X^2-X+1)^2$$

et dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = (X+i)(X-i)(X+1)^2(X^2-X+1)^2.$$

3. Soit $G = \frac{(X^2-X+1)^2}{P} = \frac{1}{(X^2+1)(X+1)^2}$.
 - **Recherche de la partie entière :** Comme $\deg G < 0$, alors la partie entière est nulle.
 - **Forme de la décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}(X)$:** La décomposition cherchée s'écrit :

$$G = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} \quad (\star)$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

- **Calcul de a :** On multiplie $\star$ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1 , pour obtenir : $a = \frac{1}{2}$.
- **Calcul de c et d :** Le polynôme X^2+1 admet i et $-i$ pour racines. On multiplie $\star$ par X^2+1 puis on évalue en i , pour obtenir : $ci+d = \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$. Or, c et d sont des réels, donc par identification des parties réelles et imaginaires : $c = -\frac{1}{2}$ et $d = 0$.
- **Calcul de b :** On évalue par exemple $\star$ en 0 pour obtenir : $a+b+d = 1$ et par suite $b = \frac{1}{2}$.
- **Conclusion :** Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :

$$G = \frac{1}{2} \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2} \frac{X}{X^2+1}.$$

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction (mise sous forme irréductible) $F_n = \frac{P}{X^n-1}$ où P est un polynôme de degré $\leq n-1$.
2. Application : Utiliser le résultat précédent pour décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$ la fraction : $G = \frac{X^2}{X^3-1}$.

Solution :

1. Pour trouver la forme de la décomposition en éléments simple de F_n dans $\mathbb{C}(X)$, on commence d'abord par factoriser le dénominateur dans $\mathbb{C}[X]$. Or, on sait que dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k),$$

où $z_k := e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Donc : $F_n = \frac{P}{\prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k)}$. Comme $\deg F_n < 0$, la partie entière est nulle et la décomposition cherchée s'écrit donc :

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - z_k},$$

Posons $Q = X^n - 1$. Alors, d'après le cours, on a : $\lambda_k = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{P(z_k)}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n} z_k P(z_k)$.
Donc :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k P(z_k)}{X - z_k}.$$

2. Application : On a

$$\begin{aligned} G &= \frac{X^2}{X^3 - 1} \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{\lambda_k}{X - z_k}, \end{aligned}$$

avec $\lambda_k = \frac{1}{3} z_k^3 = \frac{1}{3}$, où $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$. D'où, dans $\mathbb{C}(X)$:

$$G = \sum_{k=0}^2 \frac{1/3}{X - e^{\frac{2ik\pi}{3}}} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X - j} + \frac{1}{X - j^2} \right].$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, on regroupe les fractions conjuguées que l'on réduit au même dénominateur, pour obtenir finalement :

$$G = \frac{1}{3} \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{3} \frac{2X + 1}{X^2 + X + 1}.$$

Exercice 11

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction : $F = \frac{X}{1 + X^2 + X^4}$.
2. En déduire la somme : $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{p}{1 + p^2 + p^4}$.

Solution :

1. On commence par factoriser le dénominateur en facteur irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On a, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 \\ &= (X^2 + 1)^2 - X^2 \\ &= (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1). \end{aligned}$$

Donc $F = \frac{X}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$. Comme $\deg F < 0$ la partie entière est nulle et donc la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est de la forme :

$$F = \frac{aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 - X + 1} \quad \star.$$

— On calcule a et b en multipliant $\star$ par $X^2 + X + 1$, puis en évaluons en j . On obtient :
 $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$.

— On calcule c et d en multipliant $\star$ par $X^2 - X + 1$, puis en évaluons en $-j$. On obtient :
 $c = 0$ et $d = \frac{1}{2}$.

Finalement,

$$F = -\frac{1}{2} \frac{1}{X^2 + X + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{X^2 - X + 1}.$$

2. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\frac{p}{1 + p^2 + p^4} = \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 - p + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left[\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2 - p + 1} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2 + p + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(p+1)^2 - (p+1) + 1} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2 + p + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p^2 + p + 1} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2 + p + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2 + p + 1} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2 + p + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{n^2 + n}{n^2 + n + 1}. \end{aligned}$$