Corrigé de la série de Travaux-Dirigés : 4
Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $F \cup G$ est un s.e.v de E, montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Solution :

Raisonnons par l'absurde et supposons que $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$, de sorte qu'il existe $x \in F$, $x \notin G$, et il existe $y \in G$, $y \notin F$. Le vecteur $x + y$ est dans le s.e.v $F \cup G$, donc $x + y \in F$ ou $x + y \in G$. Supposons par exemple $x + y \in F$. Comme F est un s.e.v et que $x \in F$, on a $(x + y) - x \in F$, c'est-à-dire $y \in F$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exercice 2

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\} \\ G &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \quad \text{et} \quad b = 2c\}. \end{aligned}$$

Donner une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Solution :

— Commençons par chercher une famille génératrice de F. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = 2c - d\} \\ &= \{(a, 2c - d, c, d) \mid a, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 0, 0, 0) + c(0, 2, 1, 0) + d(0, -1, 0, 1) \mid a, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\Big(\overbrace{(1, 0, 0, 0)}^{u_1}, \overbrace{(0, 2, 1, 0)}^{u_2}, \overbrace{(0, -1, 0, 1)}^{u_3}\Big). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est donc une famille génératrice de F. On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de F.

— Pour G, on a :

$$\begin{aligned} G &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \quad \text{et} \quad b = 2c\} \\ &= \{(d, 2c, c, d) \mid c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(0, 2, 1, 0) + d(1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(u'_1, u'_2), \end{aligned}$$

où : $u'_1 = (0, 2, 1, 0)$ et $u'_2 = (1, 0, 0, 1)$. Donc, la famille $\mathcal{B}' = (u'_1, u'_2)$ est donc une famille génératrice de G. Comme u'_1 et u'_2 ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{B}'$ est libre. C'est donc une base de G.

— Pour $F \cap G$, on écrit :

$$(a,b,c,d) \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a & = d \\ b & = 2c \\ d & = -b + 2c = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d, b = 2c \quad \text{et} \quad d = 0\} \\ &= \{(0, 2c, c, 0) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c\overbrace{(0,2,1,0)}^{u} \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(u). \end{aligned}$$

Donc $F \cap G$ est engendré par le vecteur u. De plus, comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, alors la famille $\mathcal{B}'' = (u)$ est libre. C'est donc une base de $F \cap G$.

— Tout d'abord, on a : $F + G \subset \mathbb{R}^4$. D'autre part, d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Ainsi : $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Soient F et G les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = x + z\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer la dimension de F, puis la dimension de G.
2. Calculer $F \cap G$. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Solution :

1. — Pour déterminer la dimension de F, commençons par chercher une base de F. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + 2z\} \\ &= \{(y + 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0) + z(2,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(u_1, u_2), \end{aligned}$$

où : $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (2,0,1)$. Ainsi : (u_1, u_2) est une famille génératrice de F. De plus, comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, alors : (u_1, u_2) est libre. C'est donc une base de F et $\dim F = 2$.

— Pour G, on a :

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = x + z\} \\ &= \{(2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(u_3), \end{aligned}$$

où : $u_3 = (2,1,0)$. Ainsi : (u_3) est une famille génératrice de G. De plus, comme $u_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors : (u_3) est libre. C'est donc une base de G et $\dim G = 1$.

2. Pour $F \cap G$, on écrit :

$$(x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - y - 2z & = 0 \\ x & = 2y \\ z & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Ainsi : $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. De plus, on a :

$$\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

D'où : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y+z-t=0\} \\ G &= \text{Vect}\Big((1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\Big). \end{aligned}$$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F.

Solution :

1. On va déterminer une base de F. Pour cela, commençons par chercher une famille génératrice de F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y+z-t=0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = -x-y \quad \text{et} \quad t = x\} \\ &= \{(x,y,-x-y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \overbrace{(1,0,-1,1)}^{u_1} + y \overbrace{(0,1,-1,0)}^{u_2} \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(u_1,u_2). \end{aligned}$$

   Ainsi : (u_1,u_2) est une famille génératrice de F. De plus, comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, alors (u_1,u_2) est libre. C'est donc une base de F et on a : $\dim F = 2$.

2. Comme : $(1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5) \in F$, alors : $G \subset F$. Ainsi : $\dim G \leq \dim F = 2$. Or, les deux vecteurs $(1,-2,1,1)$ et $(1,2,-3,1)$ ne sont pas colinéaires, alors : $2 \leq \dim G \leq 2$ et donc $\dim G = \dim F = 2$. En résumé : $\left\{ \begin{array}{l} G \subset F \quad \text{et} \\ \dim G = \dim F = 2. \end{array} \right.$

   D'où : $F = G$.

3. En utilisant le théorème de la base incomplète, on va trouver deux vecteurs u_3 et u_4 de sorte que (u_1,u_2,u_3,u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$. Ensuite, par le théorème de la base adaptée, $H = \text{Vect}(u_3,u_4)$ sera un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on peut choisir les vecteurs u_3 et u_4 parmi les vecteurs de la base canonique. On vérifie facilement ici que $u_3 = \overbrace{(1,0,0,0)}^{e_1}$ et $u_4 = \overbrace{(0,0,0,1)}^{e_4}$ convient. Donc : $H = \text{Vect}(e_1,e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5
On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \{(x+y, x-y, 2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\};$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \,\text{et}\, y = 3z\}.$$

1. Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Solution :

1. On a :
   — $A = \text{Vect}\Big((1,1,0),(1,-1,2)\Big)$ est un plan vectoriel.
   — $B = \text{Vect}\Big((\frac{1}{2},1,\frac{1}{3})\Big) = \text{Vect}\Big((3,6,2)\Big)$ est une droite vectorielle.
2. Montrons maintenant que A et B sont supplémentaires :
   — $A \cap B = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car si on considère $u \in A \cap B$, alors,

$$u \in A \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : u = (x+y, x-y, 2y)$$
$$u \in B \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y) & = x-y, \\ x-y & = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y & = 0, \\ x-7y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

   Donc $u = (0,0,0)$.
   — $\dim A + \dim B = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
   Nous avons ainsi démontré que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 6
Soit : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Montrer que $\text{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution :

— Nous avons besoin d'abord d'une base de F. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$P \in F \Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = -a \\ 3a + b & = 3a + b \\ 3a + 2b + c & = -3a - 2b - c \\ a + b + c + d & = a + b + c + d \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad 2b + c = 0.$$

Ce calcul montre que $(1, X^2 - 2X)$ engendre F. Cette famille étant libre, c'est une base de F.

— Complétons-la en une base $(1, X^2 - 2X, X, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Par le théorème de la base adaptée, on en déduit que : $\text{Vect}(X, X^3)$ est UN supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7
$E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
2. Montrer que $G = \text{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Solution :

1. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$. On a :

$$P \in F \Leftrightarrow P(0) = P'(0) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e & = 0 \\ d & = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow P = aX^4 + bX^3 - \frac{1}{2}(4a + 3b)X^2 = a(X^4 - 2X^2) + b\Big(X^3 - \frac{3}{2}X^2\Big).$$

   Donc $F = \mathrm{Vect}\left(X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\right)$. Cette écriture de F justifie le fait que F est un espace vectoriel. De plus, la famille $\left(X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\right)$ engendre F et comme elle est étagée en degrés, elle est libre. C'est donc une base de F et on a : $\dim F = 2$.
2. Montrons que $\mathbb{R}_4[X] = F \oplus G$. Comme $\dim F + \dim G = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$, il reste simplement à montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Soit $P \in F \cap G$. Comme : $P \in G$ alors, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $P = a + bX + c(1 + X + X^2)$. De plus, on a : $P \in F$ et donc : $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$ et on trouve : $a = b = 0$ et $b + 3c = 0$. Ainsi : P est nul. D'où le résultat.

Exercice 8
On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}, \quad A = \mathrm{C}_E^F = \{g \in E \mid g(0) \neq 0\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Est-ce que A est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que, pour toute $g \in A$, la droite vectorielle $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Solution :

1. — Il est clair que $F \subset E$ et que $0_E \in F$ (où on a noté 0_E l'application constante nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
   — Soient $f, h \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $(\lambda f + h)(0) = \lambda f(0) + h(0) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$, donc : $\lambda f + h \in F$. On conclut que F est sous-espace vectoriel de E.

   D'autre part, il est immédiat que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E, car $0_E \notin A$.
2. Soit $g \in A$ fixée.
   — Commençons par montrer que $F \cap \mathbb{R}g = \{0_E\}$, ou encore : $F \cap \mathbb{R}g \subset \{0_E\}$. Soit $\varphi \in F \cap \mathbb{R}g$. Alors, $\varphi(0) = 0$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \alpha g$. Ainsi, $\alpha g(0) = \varphi(0) = 0$ et comme $g(0) \neq 0$ alors : $\alpha = 0$ et donc : $\varphi = \alpha g = 0_E$. Ceci montre que : $F \cap \mathbb{R}g = \{0_E\}$.
   — On veut montrer que $E = F + \mathbb{R}g$. Soit $\varphi \in E$. Il s'agit donc de montrer que φ se décompose linéairement sur F et $\mathbb{R}g$, c-à-d qu'il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que : $\varphi = f + \alpha g$. Raisonnons par analyse-synthèse.
     — **Analyse** : Supposons qu'une telle décomposition existe, c-à-d qu'il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que : $\varphi = f + \alpha g$. Alors : $\varphi(0) = f(0) + \alpha g(0) = \alpha g(0)$, donc : $\alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)}$, puis $f = \varphi - \alpha g = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g$.
     — **Synthèse** : Réciproquement, montrons que le couple (f, α) précédement trouvé convient. Notons donc $\alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)}$ et $f = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g$. Alors, on a bien : $\varphi = f + \alpha g$ avec $f(0) = \varphi(0) - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g(0) = 0$ et donc $f \in F$. Ceci montre que le couple (f, α) convient.

On a ainsi montré que : $E = F + \mathbb{R}g$.

Finalement : F et $\mathbb{R}g$ sont deux sous-epaces vectoriels supplémentaires dans E, ou encore : $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 9

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Solution :

Tout d'abord, remarquons que $F \cap G = \{0_E\}$. En effet, soit $f \in F \cap G$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0.$$

Ainsi : $F \cap G \subset \{0_E\}$ et donc $F \cap G = \{0_E\}$. D'autre part, soit $f \in E$. Alors, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \\ i(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

on vérifie facilement que :

— $f = p + i$;

— $p \in F$ et $i \in G$.

Ainsi, on a bien : $E = F + G$. Conclusion : $E = F \oplus G$.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Soit (x, y, z) un vecteur de E. Calculer $u(x, y, z)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On a : $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et donc par linéarité de u, on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) \\ &= x(-2e_1 + 2e_3) + 3ye_2 + z(-4e_1 + 4e_3) \\ &= (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} u &= \{(x,y,z)\in E \mid u(x,y,z)=0_E\}\\ &= \{(x,y,z)\in E \mid -2x-4z=0, 3y=0 \quad \text{et} \quad 2x+4z=0\}\\ &= \{(x,y,z)\in E \mid x=-2z \quad \text{et} \quad y=0\}\\ &= \{(-2z,0,z) \mid z\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{Vect}\Big(\overbrace{(-2,0,1)}^{w}\Big).\end{aligned}$$

Donc la famille (w) engendre $\operatorname{Ker} u$. De plus, comme $w \neq 0_E$, alors la famille (w) est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} u$.
Remarque : $\operatorname{Ker} u$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Par ailleurs, comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimenion finie $E=\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif.

3. On a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$. Ainsi, la famille $\mathcal{G} = \Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$ engendre $\operatorname{Im} u$. Or, d'après le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im} u = 3-1 = 2$. Du coup, il suffit d'extraire de $\mathcal{G}$ une famille libre à deux éléments. On vérifie immédiatement que $\Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$ est une telle famille. C'est donc une base de $\operatorname{Im} u$.

4. Par le théorème de la base adaptée, il suffit de montrer que la famille obtenue par concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} u$ et d'une base de $\operatorname{Im} u$ constitue une base de E. Soit alors $\mathcal{B} = \Big((-2,0,1), (-2,0,2), (0,3,0)\Big)$ une telle famille. On vérifie facilement que c'est une famille libre et donc une base de E. D'où : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 11
Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$. Soit u l'application de E dans E définie par :

$$u(P) = P + (1-X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Remarquons d'abord que si $P\in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E. Montrons ensuite que u est linéaire. Soit $P, Q \in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q) + (1-X)(\lambda P+Q)'\\ &= \lambda P + Q + (1-X)(\lambda P' + Q')\\ &= \lambda\Big(P+(1-X)P'\Big) + \Big(Q+(1-X)Q'\Big)\\ &= \lambda u(P) + u(Q).\end{aligned}$$

u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E, alors on sait que :
$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\Big(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)\Big).$$
Comme : $u(1) = 1,\ u(X) = 1,\ u(X^2) = -X^2 + 2X,\ u(X^3) = -2X^3 + 3X^2$, alors :
$$\operatorname{Vect}\Big(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)\Big) = \operatorname{Vect}\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big),$$
c-à-d que $\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(u)$. De plus, c'est une famille qui est échelonnée en degré et donc c'est une famille libre.
Ceci montre que $\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big)$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.
3. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. On a :
$$u(P) = -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + c + d.$$
Ainsi :
$$u(P) = 0 \iff \begin{cases} -2a &= 0 \\ 3a - b &= 0 \\ 2b &= 0 \\ c + d &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= c \\ d &= -c \end{cases}$$
Donc,
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(u) &= \{P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E \mid u(P) = 0_E\} \\ &= \{c(X - 1) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(X - 1). \end{aligned}$$
Ainsi, la famille $(X - 1)$ engendre $\operatorname{Ker}(u)$. On en déduit donc que $(X - 1)$ est une base de $\operatorname{Ker}(u)$.
4. La concaténation des bases de $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment donc une base de E. Ceci montre que : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 12
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que : $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

Solution :
Par définition, on a : $\operatorname{rg}(u + v) = \dim \operatorname{Im}(u + v)$. Or :
$$\operatorname{Im}(u + v) = \{u(x) + v(x), x \in E\} \subset \{u(x) + v(x'), (x, x') \in E^2\} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$
Donc :
$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u + v) &\leq \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \\ &= \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \quad \text{(formule de Grassmann)} \\ &\leq \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) \\ &= \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v. \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F) : \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

D'autre part, puisque $\operatorname{Im}(-v) = \operatorname{Im} v$, on a :

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u+v-v) \leq \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg} v,$$

et donc $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi : $\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u+v)$ et finalement :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F) : |\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v).$$

On conclut que :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E, F) : |\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

Exercice 13
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant : $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$.

1. Établir que : $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Solution :

1. Tout d'abord, on va montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ et on conclut en transformant ces inclusions en égalités par un argument de dimension.
   — Soit $y \in \operatorname{Im}(f^2)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Ainsi : $y = f\big(f(x)\big) = f(a)$ avec $a = f(x) \in E$ et par suite $y \in \operatorname{Im} f$. D'où l'inclusion $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im} f$. De plus, l'hypothèse $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$ fournit l'égalité des dimensions et donc : $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im} f$.
   — Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors : $f(x) = 0_E$ et donc : $f^2(x) = f(0_E) = 0_E$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$ et on obtient l'inclusion : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$. De plus, la formule du rang appliquée à f et f^2 donne :

   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f \quad \text{et}$$
   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f^2) + \operatorname{rg}(f^2).$$

   Comme $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$, on en déduit que : $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker}(f^2)$. On conclut que : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^2)$.
2. Il suffit de vérifier que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe et conclure avec un argument de dimension. Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Comme $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0_E$. De plus, on a $x \in \operatorname{Im} f$ et il existe donc $a \in E$ tel que $x = f(a)$. On a alors : $f\big(f(a)\big) = f(x) = 0_E$ et donc $a \in \operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker} f$. Donc : $x = f(a) = 0_E$. Ainsi, les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe. De plus, la formule du rang donne :

   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

   Ce qui permet de conclure que les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 14
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \Big(f^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim E = 2 \operatorname{rg} f\Big).$$

Solution :
On raisonne par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et par conséquent : $f\Big(f(x)\Big) = 0_E$. Ainsi $f^2 = 0$. D'autre part, la formule du rang nous donne :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = 2 \operatorname{rg} f.$$

($\Leftarrow$) Supposons $f^2 = 0$ et $\dim E = 2 \operatorname{rg} f$. D'une part, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. En effet, soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $f(y) = f\Big(f(x)\Big) = 0_E$. D'où $y \in \operatorname{Ker} f$. D'autre part, la formule du rang nous donne : $2 \operatorname{rg} f = \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$ et donc : $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f$. Par inculsion et égalité des dimensions, on peut conclure que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 15
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel qu'il existe $n \geq 1$ verifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ soit libre.

Solution :
Puisque $f^{n-1} \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrons que la famille $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ est libre. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que la famille $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ n'est pas libre. Ainsi, ils existent $\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0 \quad (\blacklozenge).$$

Soit $p = \min\{0 \leq k \leq n-1 \mid \lambda_k \neq 0\}$. En composant $\blacklozenge$ par f^{n-1-p}, on obtient :

$$f^{n-1-p}\Big(\lambda_p f^p(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)\Big) = \lambda_p f^{n-1}(x) = 0, \quad \text{car} \quad f^j = 0, \forall j \geq n.$$

Comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, on en déduit alors que : $\lambda_p = 0$. Contradiction.
D'où, la famille $\Big(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x)\Big)$ est libre.

Exercice 16
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Montrer que G et $\operatorname{Im} f$ sont isomorphes.

Solution :
On définit l'application :

$$\begin{aligned} g = f_{|G} : \quad & G \longrightarrow \operatorname{Im} f \\ & x \longmapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

Alors :
- g est linéaire de G dans $\operatorname{Im} f$. c'est une conséquence directe du fait que f est linéaire.
- g est injective. En effet, on a

  $$\operatorname{Ker} g = \{x \in G \mid g(x) = f(x) = 0_F\} = G \cap \operatorname{Ker} f.$$

  Comme G et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe, on a : $G \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. D'où $\operatorname{Ker} g = \{0_E\}$ et g est injective.

— g est surjective. En effet, soit $y \in \operatorname{Im} f$, disons : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme $E = G + \operatorname{Ker} f$, alors : $x = u + v$ pour certains $u \in G$ et $v \in \operatorname{Ker} f$, donc : $y = f(x) = f(u) + f(v) = f(u) + 0_F = f(u) = g(u)$ avec $u \in G$, ce qui prouve bien que g est surjective.

Ainsi, g définit un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} f$.