Faculté des Sciences et Techniques Errachidia

Cours de MIP

Analyse I

Ali Hafidi

My Rachid Sidi Ammi

Contents

Chapitre 1

Les nombres réels

Le corps des nombre réels est la base de l'analyse réelle. Nous allons dans ce chapitre donner ses propriétés fondamentales. Nous allons commencer par énoncer trois propriétés de base à partir desquelles nous allons déduire les autres.

1.1 Propriétés de base

1.1.1 $\mathbb{R}$ est corps commutatif

L'ensemble des nombres réels possède deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication vérifiant les proppriétés suivantes :

1. ($\mathbb{R}$,+) est un **groupe commutatif**,

   a) l'addition est associative :
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$.

   b) l'addition admet un élément neutre qui est 0 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = 0 + x = x$.

   c) Tout élément $x \in \mathbb{R}$ admet un symétrique $\;-x : \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$.

   d) l'addition est commutative :
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x$.

2. la multiplication est associative :
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

3. la multiplication admet un élément neutre qui est 1 :
   $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.

4. Tout élément non nul x admet un inverse $\frac{1}{x}$: $x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.

5. la multiplication est distributive par rapport à l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \times (y+z) = x \times y + x \times z$.

6. la multiplication est commutative :
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \times y = y \times x$.

Toutes ces propriétés constituent la première propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1

$(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un* **corps commutatif**.

1.1.2 Règles de calcul

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{où } \ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

1.1.3 $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

L'ensemble des nombres réels possède aussi une relation $\leq$ qui vérifie les proppriétés suivantes :

1. la relation $\leq$ est une relation d'ordre :

   a) Réflexivité :
   $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x.$

   b) Anti-symétrique :
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y.$

   c) Transitivité :
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z.$

2. la relation $\leq$ est une relation d'ordre total :
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

3. la relation $\leq$ est compatible avec l'addition :
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y) \Longrightarrow x + z \leq y + z.$

4. la relation $\leq$ est positivement compatible avec la multiplication :

   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x \times y.$

Toutes ces propriétés constituent la deuxième propriété fondamentale de $\mathbb{R}$:

Proposition 1.2

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ *est un* **corps totalement ordonné** .

Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on dira que x est strictement inférieur à y et on notera $x < y$.

1.1.4 Le corps $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supériure

Proposition 1.3

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée admet une borne supérieure.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.4

Pour $a \leq b$, le segment, $[a, b]$ est défini par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a, b] \iff \exists t \in [0, 1] \;\; c = ta + (1 - t)b.$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$$]a, b[,\ [a, b[,\ ]a, b],\ ]a, +\infty[,\ [a, +\infty[,\ ] - \infty, b[,\ ] - \infty, b],\ ] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Propriété 1.5 (*caractéristique*)

Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \, \forall b \in A \; a < c < b \implies c \in A.$$

Voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert centré sur a, soit du type $]a - \alpha, a + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.

1.3 Valeur absolue

Définition 1.6

On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 1.7

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x.y| = |x|.|y|.$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad | - x| = |x|.$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r.$
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$
7. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$

1.4 Propriétés de la borne supérieure

1.4.1 Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition 1.8

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. E est **majorée** s'il existe un nombre réel M (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé majorant de E.

2. E est **minorée** s'il existe un nombre réel m (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $m \leq x$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé mainorant de E.

3. E est **bornée** s'il est à la fois majorée et minorée, en'dautre terme s'il existe un réel positif r tel que pour tout $x \in E$ on ait $|x| \leq r$.

Définition 1.9

Soit E une partie non vide de $\in \mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,

2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants.

De même $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. m est un **minorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $m \leq x$,

2. si m' est un **minorant** de E, alors $m' \leq m$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.

Proposition 1.10

Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. Soit $M \in R$. Alors $M = \sup(E)$ si et seulement si

$$M = \sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \quad ; \quad x \leq M \\ (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists x \in E); \quad M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

2. Soit $m \in R$. Alors $m = \inf(E)$ si et seulement si

$$m = \inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \quad ; \quad x \geq m \\ (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists x \in E); \quad m + \varepsilon > x. \end{cases}$$

Exercice 1.11

Soient $A; B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A+B = \{a+b; a \in A, b \in B\}$.

i) *Montrer que $A+B$ majorée, non vide et que* $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

ii) *Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et* $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

iii) *Donner deux resultats similaires pour les bornes inférieures.*

Définition 1.12

Soit $E \subset \mathbb{R}$
On dit que M est **le maximum** de E, que l'on note $M = \max(E)$ si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.
On dit que m est **le minimum** de E, que l'on note $m = \min(E)$ si $m = \inf(E)$ et $m \in E$.

Remark 1.13

Si E admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de E. Si E admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de E.

Proposition 1.14

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire 1.15

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée admet une borne inférieure.
De plus $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Proposition 1.16

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$
Si A admet une borne supérieure alors (-A)admet une borne inférieure et on a de plus $\inf(-A) = -\sup(A)$.
Si A admet une borne inférieure alors (-A)admet une borne supérieure et on a de plus $\sup(-A) = -\inf(A)$.

1.4.2 Propriété d'Achimède

Proposition 1.17

$\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire,

$$\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad y \leq nx.$$

Preuve : Faisons une démonstration par l'absurde en supposant, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad nx < y.$$

L'ensemble $A = \{nx | n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ qui possède donc une borne supérieure a.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)x \leq a$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx \leq a - x$ ce qui signifie que $a - x$ est majorant de A strictement inférieur à a ce qui contredit le fait que a est le plus petit des majorants de A. ■

1.4.3 Partie entière

Proposition 1.18

Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $na \leq x < (n+1)a$, c'est á dire :

$$x = na + r; \quad 0 \leq r < a.$$

Preuve : **Unicité** si n et n' sont deux entiers répondant à la question, on a :

▷ $n \leq \frac{x}{a} < n' + 1$ donc $n - n' < 1$ c'est-à-dire $n - n' \leq 0$,

▷ $n' \leq \frac{x}{a} < n + 1$ donc $n' - n < 1$ c'est-à-dire $n' - n \leq 0$.

On en déduit $\quad n = n'$

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

▷ Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$

▷ Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} | ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1). Elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.

Puisque l'entier $n+1$ n'appartient pas à cet ensemble on a $x < (n+1)a$ ce qui prouve que n convient. ■

Définition 1.19

Si x un nombre réel. l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle **la partie entière** de x et se note $E(x)$ ou $[x]$.

Proposition 1.20

1. $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad E(k) = k.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad E(x+y) \geq E(x) + E(y).$
3. $\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad E(x+k) = E(x) + k.$

1.4.4 Approximation décimale dun réel à 10^{-n} prés par défaut ou excés

Proposition 1.21

$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \exists! p \in \mathbb{Z}$ *tel que* $p10^{-n} \leq x < (p+1)10^{-n}$.

(a) $p10^{-n}$ *s'appelle la valeur décimale à* 10^{-n} *près par défaut de* x.

(b) $(p+1)10^{-n}$ *s'appelle la valeur décimale à* 10^{-n} *près par excés de* x.

Exemples 1.22

- *Trouver la valeur décimale à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{2}$.*
- *Trouver la valeur décimale à 10^{-2} près par défaut de $\sqrt{2}$.*

1.4.5 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Proposition 1.23

Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.

Preuve : $\triangleright$ Prenons $q = E(\frac{1}{y-x}) + 1$ puis $p = E(qx)$. On a alors :

$$\frac{1}{q} < y - x \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

et donc :

$$x < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$$

ce qui prouve que le rationnel $r = \frac{p+1}{q}$ vérifie $x < r < y$.

$\triangleright$ D'après la propriété précédente, on peut trouver un rationnel r apprtenant à l'intervalle $]x+\sqrt{2}, y+\sqrt{2}[$. le nombre $r - \sqrt{2}$ est donc un irrationnel apprtenant à l'intervalle $]x, y[$. ■

Chapitre 2

Suites réelles

2.1 Limite d'une suite réelle

Définition 2.1

On appelle suite réelle une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Traditionnellement si u est suite on utilise plutôt la notation indicée u_n à la place de $u(n)$ pour désigner l'image par u de l'entier n.La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 2.2

1. $u_n = \cos(n)$, $\quad u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$
2. Suites récurentes
   a) La suite de Fibonacci est défnie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
   b) Plus généralement on a des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par la formule
   $$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$
   avec u_0 et u_1 donnés.
   c) Suites arithmétiques $u_{n+1} = u_n + a$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.
   d) Suites géométriques $u_{n+1} = au_n$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.
3. Plus généralement $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.

Définition 2.3

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est

- majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq M$,
- minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq m$,
- bornée si elle est majorée et minorée,
- croissante si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \geq u_n$,
- strictement croissante si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} > u_n$,

- monotone si elle est croissante ou décroissante,
- périodique s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+p} = u_n$.

On définit de même une suite décroissante strictement décroissante.

Exemples 2.4

1. La suite (u_n) définie par : $u_n = \cos(n)$ est majorée.
2. La suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$ strictement décroissante et bornée.
3. La suite (u_n) définie par : $u_n = 2^n$ est croissante minorée mais pas majorée.
4. La suite (u_n) définie par : $u_n = \cos(\frac{2n\pi}{7})$ est périodique de période 7.

Proposition 2.5

La suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

Preuve : Supposons la suite (u_n) bornée, elle est donc majorée. Par définitione il existe $K > 0$ tel que pour tout n on a $u_n \leq K$. Elle est aussi minorée, donc il existe $L < 0$ tel que pour tout n on a $L \leq u_n$. Soit $M = max(K, -L)$. Alors pour tout n, on a $-M \leq L \leq u_n \leq K \leq M$, ce qui est équivalent à $|u_n| \leq M$.
Réciproquement supposons que la suite $(|u_n|)$ est majorée. On a un réel M tel que pour tout n on a $|u_n| \leq M$ qui est équivalent à $-M \leq u_n \leq M$. Alors M est un majorant et $-M$ est un minorant de la suite (u_n). ■

Exemple 2.6

La suite (u_n) définie par : $u_n = \sin(n) + 2\cos(\frac{1}{n+1})$ est bornée.

Définition 2.7

(limite d'une suite) On dit qu'une suite (u_n) admet le réel l pour limite ou que (u_n) converge vers l si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N \quad \text{on a} \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N \quad \text{on a} \quad u_n \geq A.$$

On dit qu'une suite (u_n) diverge si elle ne converge pas, c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite dans $\mathbb{R}$.
On note suivant les cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 2.8

1. En particulier une suite qui tend vers $+\infty$ diverge.
2. On définit de même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples 2.9

1. La suite constante $u_n = a$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé converge vers a. Choisissons un $\varepsilon > 0$. Il faut trouver un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \varepsilon$. Comme $|u_n - a| = 0$ cette inégalité est toujours vraie et il suffit de prendre $N = 0$.

2. La suite définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$. Il faut montrer que pour tout $K \in \mathbb{R}$ il existe un entier N tel que pour tout n tel que $n \geq N$ on a $u_n \geq K$. Il suffit de prendre pour N le plus petit entier $\geq K$.

2.2 Propriétés de la limite

Théorème 2.10

Si une suite (u_n) de réels admet une limite $l \in \mathbb{R}$ alors cette limite est unique.

Preuve : Par l'absurde. Supposons qu'il y a deux limites l et l' avec $l < l'$. Prenons $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$. Comme l est limite de la suite (u_n) il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$, de même comme l' est limite on a un entier N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ on a $|u_n - l'| < \varepsilon$, . Alors si $n \geq \max(N, N_0)$ on peut écrire en utilisant l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue : ‘

$$l' - l = |l' - l| \leq |l' - u_n| + |u_n - l| < \varepsilon + \varepsilon = l' - l,$$

ce qui est absurde. ■

Proposition 2.11

Si une suite (u_n) de réels converge, alors elle est bornée.

Preuve : Commençons par le cas particulier où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Par définition on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - 0| < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq 1$. Soit $K = max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, 1\}$, on a alors $|u_n| \leq K$ pour tout n, donc (u_n) est bornée. Dans le cas général, on pose $v_n = u_n - l$ si l est la limite de (u_n). Alors (v_n) a pour limite 0, donc d'après le cas particulier la suite (v_n) est bornée il existe M et m tels que $m \leq v_n \leq M$ pour tout n. Alors $m + l \leq u_n \leq M + l$, ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée. ■

Remarque 2.12

La réciproque est fausse. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée et diverge.

Proposition 2.13

Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Preuve : Comme (u_n) est bornée ,alors il existe un réel $K > 0$ tel que $|u_n| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (v_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ pour tout $n \geq N$. Alors $|u_n v_n| = |u_n|.|v_n| < K.\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. ■

Proposition 2.14

(suite "somme") Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant comme limites respectives les réels l et l' . Alors la suite "somme" (w_n), définie par

$$w_n = u_n + v_n,$$

tend vers $l + l'$

Preuve : Fixons $\varepsilon > 0$. Onécrit la convergence de (u_n) avec $\frac{\varepsilon}{2}$: il existe un N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même la convergence de (v_n) donne un N' tel que si $n \geq N'$ alors $|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
On en déduit que pour $n \geq K = \max(N, N')$ on a $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|w_n - (l + l')| = |u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve que (w_n) tend vers $l + l'$. ■

Remarque 2.15

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$. Par contre si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, on a une forme indéterminée qui nécessite une étude plus approfondie pour conclure.

Proposition 2.16

(suite "produit") Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant comme limites respectives les réels l et l' . Alors la suite "produit" (w_n), définie par

$$w_n = u_n v_n,$$

tend vers $l.l'$.

Preuve : Montrons que la suite (lv_n) tend vers $l.l'$. En effet, la suite constante l est bornée et la suite $(v_n - l')$ tend vers 0. Donc la suite $l(v_n - l')$ converge vers 0. Donc la suite (lv_n) tend vers $l.l'$. De même, la suite (u_n) tend vers l, donc la suite $(u_n - l)$ tend vers 0. La suite (v_n) est convergente donc bornée, donc la suite $v_n(u_n - l)$ converge vers 0. En écrivant $u_n v_n = (u_n v_n - lv_n) + lv_n = v_n(u_n - l) + lv_n$, on voit que la suite $(u_n v_n)$ tend vers $l.l'$. ■

Proposition 2.17

(suite des inverses) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si (u_n) tend vers $l > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}$.

Preuve : Comme (u_n) a pour limite l qui est strictement positif, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \frac{l}{2}$. On a donc $u_n > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$ On en déduit que $\frac{l}{u_n} < \frac{2}{l}$ pour $n \geq N$, donc $(\frac{1}{u_n})$ est majorée, donc bornée puisqu'elle est minorée par 0. Ainsi la suite $(\frac{1}{u_n}(u_n - l))$ est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0, c'est donc une suite qui tend vers 0 . Comme $(\frac{1}{u_n}(u_n - l)) = 1 - \frac{l}{u_n}$, on en déduit que la suite ‘ $(\frac{l}{u_n})$ tend vers 1. Comme $\frac{1}{u_n} = (\frac{1}{l})(\frac{l}{u_n})$, d'après la limite d'un produit on a la suite $(\frac{1}{u_n})$ tend vers $\frac{1}{l}$. ■

Proposition 2.18

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs

1. *Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors $(\frac{1}{u_n})$tend vers 0*
2. *Si (u_n) tend vers 0, alors $(\frac{1}{u_n})$tend vers $+\infty$*

Remarque 2.19

La condition $u_n > 0$ est essentielle. Par exemple, si $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 mais la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\geq 1}$ n'a pas de limite.

Preuve : a) Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc $0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon$ ce qui prouve que $(\frac{1}{u_n})$ tend vers 0.

b) Fixons $K > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour tout n, on sait qu'il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $0 < u_n < \frac{1}{K}$. Donc $u_n > K$, ce qui prouve que (u_n) tend vers $+\infty$. ■

Proposition 2.20 (*passage à la limite dans des inégalités*)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réelles qui convergent respectivement vers l et l'. On suppose que

$$u_n \leq v_n$$

à partir d'un certain rang. Alors $l \leq l'$.

Preuve : Supposons que $l > l'$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant l'inégalité $\varepsilon < \frac{l-l'}{2}$. La convergence de (u_n) vers l dit qu'il existe un entier N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors

$$|u_n - l| < \varepsilon. \tag{1}$$

La convergence de (v_n) vers l' dit qu'il existe un entier N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors

$$|v_n - l'| < \varepsilon. \tag{2}$$

Enfin il existe M tel que si $n \geq M$ alors

$$u_n \leq v_n. \tag{3}$$

Donc pour $n \geq max(N_0, N_1, M)$ les trois inégalités sont vraies. On en déduit que

$$v_n < l' + \varepsilon < l - \varepsilon < u_n.$$

Donc

$$v_n < u_n.$$

Ceci donne une contradiction avec (3). ■

Remarque 2.21

La proposition n'est plus vraie si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes. Prenons par exemple $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a $u_n < v_n$, mais les deux suites ont la même limite 0.

Proposition 2.22 (*théorème des gendarmes*)

a) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réelles ayant la même limite $l \in \mathbb{R}$. Soit (x_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang on ait les inégalités*

$$u_n \leq x_n \leq v_n.$$

Alors la suite (x_n) converge vers l.

b) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang . Alors (v_n) tend vers $+\infty$.*

c) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang . Alors (v_n) tend vers $-\infty$.*

Preuve : **a**) Fixons un réel $\varepsilon > 0$. La convergence de (u_n) vers l dit qu'il existe un entier N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$. c'est-à-dire $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$. La convergence de (v_n) vers l dit qu'il existe un entier N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $|v_n - l| < \varepsilon$. c'est-à-dire

$$l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon.$$

Il existe aussi M tel que si $n \geq M$ alors $u_n \leq x_n \leq v_n$. Donc si $n \geq max(N_0, N_1, M)$ on a

$$l - \varepsilon < u_n \leq x_n \leq v_n < l + \varepsilon.$$

On déduit que $|x_n - l| < \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (x_n) tend vers l. **b**)Par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$signifie que pour un réel K donné il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $u_n \geq K$. D'autre part on sait qu'il existe un entier M tel que si $n \geq M$ alors $u_n \geq v_n$. Donc si $n \geq max(M, N)$ on a $v_n \geq u_n \geq K$, ce qui prouve que v_n tend vers $+\infty$.
c) On fait de même.

■

Exercice 2.23

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

est convergente.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :*

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} E(kx)$$

est convergente.

Définition 2.24

Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (v_n) est une sous-suite ou une suite extraite de (u_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n on a $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$

Exemples 2.25

1. *La suite (u_{n+1}) est une sous-suite de la suite (u_n)*
2. *Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de la suite (u_n)*

Proposition 2.26

Si (v_n) est une suite extraite d'une suite (u_n), et (u_n) tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (v_n) tend vers l

Preuve : les démonstration des trois cas $l \in \mathbb{R}, l = +\infty, l = -\infty$ étant très similaires, nousne traiterons que le premier Soient (u_n) une suite convergeant vers l et $(u_{\varphi(n)})$ une sous suite de (u_n). Établissons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, c'est- à -dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \quad \forall n \geq n_0, |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on peut trouver n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon$$

Comme $\forall n \geq n_0$, $\varphi(n) \geq n \geq n_0$, on en déduit :

$$\forall n \geq n_0, \ |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$$

■

Remarque 2.27

On utilise surtout le résultat précédent pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente en exhibant des sous-suites convergeant vers des limites différentes.

Exemples 2.28

1. *La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente, car la sous-suite (u_{2n}) converge vers 1 et la sous-suite (u_{2n+1}) converge vers -1.*
2. *La suite (u_n) définie par $u_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$ diverge puisque (u_{4n}) est divergente.*

Exercice 2.29

Soit (u_n) une suite de réels telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes. Démontrez que la suite (u_n) est convergente.

Proposition 2.30

Soit (u_n) est une suite croissante.

1. *Si elle est majorée, elle converge vers* $l = \sup\{u_n | n \in \mathbb{N}.\}$

2. *Si elle n'est pas majorée, elle tend vers* $+\infty$

Preuve : **1.**Si l'on suppose que (u_n) est majorée, l'ensemble $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est non vide majoré ; il possède une borne supérieure l. Montrons que (u_n) converge vers l en établissant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon < u_n \leq l.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, on peut trouver un n_0 tel que $l - \varepsilon < u_{n_0} \leq l$. Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l$ ce qui termine la démonstration.

2.Supposons que (u_n) est non majorée et montrons qu'elle tend vers $+\infty$

Soit M un réel quelconque. Il ne majore pas la suite, donc on peut trouver un entier n_0 tel que $M < u_{n_0}$. Comme la suite (u_n) est croissante, on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad M < u_{n_0} \leq u_n$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. ■

Exemple 2.31

La suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ est croissante majorée donc elle est convergente.

Corollaire 2.32

Soit (u_n) est une suite décroissate.

1. Si elle est minorée, elle converge vers $l = \inf\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$.

2. Si elle n'est pas minorée, elle tend vers $-\infty$.

Preuve : Appliquer la proposition précédente à la suite $(-u_n)$. ■

2.3 Suites adjacentes

Proposition 2.33

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

1. *(u_n) est croissante,*

2. *(v_n) est décroissante,*

3. *la suite $(v_n - u_n)$ tend vers 0.*

Alors les deux suites (u_n) et (v_n) ont la même limite. Dans ce cas on dit que les deux suites ***sont adjacentes****.*

Preuve : Pour tout n on a

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_n \geq v_{n+1}$$

d'où

$$-u_n \geq -u_{n+1} \quad \text{et} \quad v_n \geq v_{n+1}$$

ce qui donne par addition

$$v_n - u_n \geq v_{n+1} - u_{n+1}.$$

La suite $(v_n - u_n)$ est donc décroissante. Comme elle tend vers 0, on en dduit que $v_n - u_n \geq 0$ pour tout n, c'est-à-dire $v_n \geq u_n$. On a alors $u_n \leq v_n \leq v_0$ puisque (v_n) est décroissante. La suite (u_n) est donc majorée et est croissante donc elle converge vers une limite l. De même la suite (v_n) est minorée par u_0 et est décroissante, donc elle converge vers une limite l' La suite $(v_n - u_n)$ tend vers $l - l'$ qui est nul à cause de l'hypothèse (3). Donc on a bien $l = l'$. ■

Exemples 2.34

1.suites arithmtico-géométriques *Soient u_0 et v_0 deux rels avec $v_0 > u_0 > 0$. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les formules $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

On vérifie que ces deux suites sont adjacentes. Pour établir la condition (3) on peut montrer que

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

2. *Les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes.*

Théorème 2.35 (*Bolzano-Weierstrass*)

Soit (u_n) une suite bornée, alors il existe une sous- suite de (u_n) convergente.

Preuve : Soit $[a, b]$ avec $a < b$ un intervalle qui contient les termes de la suite (u_n). On procède par dichotomie, c'est-à-dire que l'on va couper l'intervalle $[a, b]$ en deux en gardant une moitié qui contient une infinité de valeurs de (u_n). Si les deux moitiés conviennent, on dit qu'on garde celle de gauche. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soient $[a_1, b_1]$ la moiti de $[a, b]$ que l'on garde, On a $a_0 \leq a_1$ et $b_1 \leq b_0$. On a aussi $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$. On itère le procédé ce qui donne deux suites (a_k) et (b_k) telles que $a_k \leq a_{k+1}$ et $b_{k+1} \leq b_k$. On a aussi

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$$

et l'intervalle $[a_k, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n). Les deux suites (a_k) et (b_k) sont donc adjacentes. Donc elle convergent vers la même limite l On construit alors une sous-suite (v_n) de (u_n). On prend pour $v_0 = u_0$. On choisit pour v_1 un des (u_n) qui est dans $[a_1, b_1]$. On suppose que l'on a choisi v_k où $v_k = u_{\varphi(k)}$. On choisit alors pour v_{k+1} un des termes de (u_n) qui est dans $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ de sorte que $\varphi(k+1) > \varphi(k)$. On a alors $a_n \leq v_n \leq b_n$ et par le thèorme des gendarmes la suite (v_n) tend aussi vers l. ■

2.4 Comparaison de suites

Définition 2.36 (*équivalent, négligeable, dominé*)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'àpartir d'un certain rang N on a $v_n \neq 0$.

1. *On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 1.*
2. *On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0.*
3. *On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.*

Définition 2.37 (*Notation de Landau*)

1. *Si (u_n) est équivalente à (v_n) on note $u_n \sim v_n$.*
2. *On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) on note $u_n = \circ(v_n)$ (petit $\circ$).*
3. *On dit que (u_n) est dominée par (v_n) on note $u_n = O(v_n)$ (grand O).*

Proposition 2.38

Si la suite (u_n) est équivalent à (v_n) , la suite (v_n) est équivalent à (u_n)

Démonstration. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Àpartir d'un certain rang on a $1-\varepsilon = \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1+\varepsilon = \frac{3}{2}$. On en déduit qu'à partir d'un certain rang $u_n \neq 0$. On sait qu'alors la suite $(\frac{v_n}{u_n})$ a pour limite l'inverse de la limite de la suite $(\frac{u_n}{v_n})$. Elle tend donc vers 1.

Remarque 2.39

Les trois propriétés "négligeable, équivalente, dominée" sont des propriétés à l'infini des suites : la valeur de l'entier N n'a pas d'importance.

Proposition 2.40

Soient (a_n) une suite non nulle à partir d'un certain rang et (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors

1. *la suite $(a_n u_n)$ est équivalente à la suite $(a_n v_n)$.*
2. *Si (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang les suites $(\frac{a_n}{u_n})$ et $(\frac{a_n}{v_n})$ sont équivalentes.*

Preuve : 1. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Comme $\frac{u_n a_n}{v_n a_n} = \frac{u_n}{v_n}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_n}{v_n a_n} = 1.$$

2. On a les égalités

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{u_n}\frac{v_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\frac{u_n}{v_n})}) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}} = 1,$$

ce qui prouve l'affirmation. ■

Remarque 2.41

Les équivalents ne s'ajoutent pas !

Exemple.

Prenons $a_n = -n$, $u_n = n$ et $v_n = n+1$. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, car la suite

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

tend vers 1. Mais $a_n + u_n = 0$ et $a_n + v_n = 1$, donc

$$\frac{u_n + a_n}{v_n + a_n} = 0.$$

Proposition 2.42

Soit (u_n) une suite et $\lambda \in [0,1[$. Si à partir d'un certain rang N on a

$$|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n| \qquad \forall n \geq N. \qquad (*)$$

alors (u_n) tend vers 0.

Preuve : En itérant k fois l'inégalité $(*)$ on obtient

$$|u_{N+k}| \leq \lambda |u_{N+k-1}| \leq \lambda^2 |u_{N+k-2}| \leq \ldots \leq \lambda^k |u_N|.$$

Donc par la proposition 2.20

$$\lim_{k\to+\infty} u_{N+k}| \leq \lim_{k\to+\infty} (\lambda^k |u_N|) = \lim_{k\to+\infty} (\lambda^k)|u_N| = 0.$$

Comme $|u_{N+k}| \geq 0$, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_{N+k}| = 0$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} u_{N+k} = 0 \,\text{et}\, \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

■

Proposition 2.43

Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives. Soit $\lambda \in [0,1[$. On suppose qu'à partir d'un certain rang N on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda \frac{v_{n+1}}{v_n} \qquad \forall n \geq N. \qquad (*)$$

Alors (u_n) est négligeable devant (v_n).

Preuve : En multipliant $(*)$ par $\frac{u_n}{v_{n+1}}$ qui est > 0, on obtient

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \lambda \frac{u_n}{v_n}.$$

La suite $(\frac{u_n}{v_n})$ véifiee les conditions de la proposition 2.42 donc $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers 0, ce qui veut dire que $u_n = o(v_n)$. ■

Proposition 2.44

On considère les suites

1. *pour* $n \geq 2$, *soit* $u_n = (lnn)^\beta$ *avec* $\beta > 0$,
2. *pour* $n \geq 1$, *soit* $v_n = n^\alpha$ *avec* $\alpha > 0$,
3. *pour* $n \geq 0$, *soit* $w_n = a^n$ *avec* $a > 1$,
4. *pour* $n \geq 0$, *on pose* $z_n = n!$.

Alors $u_n = o(v_n), v_n = o(w_n)$ *et* $w_n = o(z_n)$.

Preuve : 1. Montrons d'abord que $v_n = o(w_n)$. Pour cela montrons qu'il existe $\lambda \in [0,1[$ tel que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \lambda \frac{w_{n+1}}{w_n}$$

et utilisons la proposition 2.43. Un calcul simple montre que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = (1+\frac{1}{n})^\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{w_{n+1}}{w_n} = a > 1$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, il existe N tel que si $n \geq N$ on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1+a}{2}$$

car

$$1 < \frac{1+a}{2} < a.$$

Prenons $\lambda = \frac{1+a}{2a}$. Alors $0 < \lambda < 1$ et pour $n \geq N$ on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1+a}{2} = \frac{1+a}{2a}a = \lambda a = \lambda \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

On voit que les condition de la proposition 2.43 sont satisfaites et donc on conclut que $v_n = o(w_n)$. **2.** Montrons que $u_n = o(v_n$. Il suffit de prouver

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(lnn)^\beta}{n^\alpha} = 0.$$

Or

$$\frac{(lnn)^\beta}{n^\alpha} = \left(\frac{lnn}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{lnn}{n^\gamma}\right)^\beta$$

où l'on a posé $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$. On verra au chapitre 3 (proposition 3.2.3) l'égalité suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{lnn}{n^\gamma}\right)^\beta = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{lnn}{n^\gamma}\right)^\beta$$

De plus on remarque que

$$\frac{lnn}{n^\gamma} = \frac{1}{\gamma}\frac{(lnn^\gamma)}{n^\gamma}$$

Par conséquent il suffit de montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(lnn^\gamma)}{n^\gamma} = 0.$$

Pour cela posons $u_n = ln(n^\gamma)$. Alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Dans la premièe partie de la démonstration, posons $\alpha = 1$ et $a = e$, on obtient que la suite $(\frac{n}{e^n})$ tend vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que si $n \geq N$ on a

$$\frac{n}{e^n} < \varepsilon.$$

De plus la fonction $f(x) = \frac{x}{e^x}$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ donc $f'(x) \leq 0$ si $x \geq 1$ et par conséquent f est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. La décroissance de f implique que pour $u_n \geq N$

$$\frac{u_n}{e^{u_n}} \leq \frac{N}{e^N} < \varepsilon.$$

Ainsi on a prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^{u_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(lnn^\gamma)}{n^\gamma} = 0.$$

3. Montrons que $w_n = o(z_n)$. On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = a \qquad \text{et} \qquad \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

Pour n assez grand on a

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = n+1 \geq 2a.$$

Donc il existe un entier N tel que si $n \geq N$ on a

$$a = \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq \frac{1}{2}\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+1}{2}.$$

C'est la condition de la proposition 2.43 avec $\lambda = \frac{1}{2}$. ■

2.5 Le critèere de Cauchy

Définition 2.45

On dit qu'une suite (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p, q \geq n_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Lemme 2.46

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve : Soit $\varepsilon = 1$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$; $\quad p, q \geq n_0 \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$. Donc $\forall n \geq n_0$ on a $|u_n - u_{n_0+1}| < 1 \qquad (p = n, \quad q = n_0 + 1)$. Donc $|u_n| \leq 1 + |u_{n_0+1}| \quad \forall n \geq n_0$. On pose $M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \dots |u_n|, 1 + |u_{n_0+1}|\}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$, par suite (u_n) est bornée. ■

Théorème 2.47

(**Critère de Cauchy**) Une suite réeelle (u_n) converge vers une limite finie si et seulement si elle est de **Cauchy**.

Preuve : Si (u_n) tend vers l, alors on a pour $p; q \geq n_0$

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < 2\varepsilon$$

Donc elle est de Cauchy.

Réciproquement si (u_n) est de Cauchy alors elle est bornée par le

lemme ci-dessus. Par le théorèeme de Bolzano-Weierstrass elle admet une sous-suite convergente (u_{n_k}), de limite l. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq n_0$ on ait $|u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et tel que pour $p, q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $k \geq n_0$ on a $n_k \geq k$ et

$$|u_k - l| \leq |u_k - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui prouve que (u_n) converge vers l. ■

Exemple 2.48

La suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas convergente car elle n'est pas de Cauchy. En effet, pour $n \geq 1$ on a $|u_{2n} - u_n| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle

3.1 Limite et continuité

Définition 3.1

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle A le domaine de définition de la fonction f. On dit que f est

- *minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \geq m$.*
- *majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a $f(x) \leq M$.*
- *bornée si f est majorée et minorée.*

Si f est majorée, on appelle borne supérieure de f le nombre réel

$$\sup_A f = \sup \{f(x) | x \in A\} .$$

On définit de même la borne inférieure.
On dit que f admet un maximum en $a \in A$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$.
On dit que f admet un maximum local en $a \in A$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(A \cap I)$.
On définit de même la notion de minimum et de minimum local.
Un extremum (local) est un maximum (local) ou un minimum (local).
Ces définitions ne sont que des généralisations des mêmes notions vues dans le cas des suites.

Remarque 3.2

Une fonction bornée posséde toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum.

Exemples 3.3

1. *Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors f est bornée. On a $\sup\limits_{]0,1[} f = 1$, $\max\limits_{]0,1[} f$ n'existe pas. On a $\inf\limits_{]0,1[} f = 0$, mais $\min\limits_{]0,1[} f$ n'existe pas.*

2. *Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi* $f(x) = \sin x$ *admet un maximum en les points* $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Dans la suite on prendra comme domaine de définition A des intervalles de la forme

- $A =]x, y[, [x, y[,]x, y]$, ou $[x, y]$ avec $x < y$. On notera alors $\overline{A} = [x, y]$.
- $A =]-\infty, x]$ ou $]-\infty, x[$. On notera alors $\overline{A} =]-\infty, x]$.
- $A = [x, +\infty[$ ou $]x, +\infty[$. On notera alors $\overline{A} = [x, +\infty[$.
- $A =]-\infty, +\infty[$ alors $\overline{A} =]-\infty, +\infty[$.

On dit que $\overline{A}$ est l'adhérence de A.

Définition 3.4

Soient A un intervalle et $\overline{A}$ son adhérence. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{A} \cap \mathbb{R}$

1. *On dit que f admet l comme limite en a si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que} \forall x \in A, 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

2. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si*

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que} \forall x \in A, 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > K.$$

On note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

3. *On dit que f admet l comme limite quand x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K \text{ tel que} \forall x \in A, x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

4. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists M \text{ tel que} \forall x \in A, x > M \Rightarrow f(x) > K.$$

On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemples 3.5

1. *Soient* $A =]0, 1[$, $a = 1 \in \overline{A}$ *et* $f(x) = x$. *Alors* $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.
2. *Soient* $A =]0, 1[$, $a = 0 \in \overline{A}$ *et* $f(x) = \frac{\sin}{x}$ *Alors* $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
3. *Soient* $A =]0, 1[$, $a = 0 \in \overline{A}$ *et* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Alors* $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
4. *Soient* $A =]-\infty, +\infty[$ *et* $f(x) = e^{-x}$. *Alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. *Soient* $A =]-\infty, +\infty[$ *et* $f(x) = x$. *Alors* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 3.6

1. *En utilisant la définition de la limite montrer que* $\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$.

Proposition 3.7

Si f admet une limite en a, cette limite est unique.

Preuve : La démonstration est identique à celle donnée pour les suites. On procède par l'absurde en supposant que f admet deux limites l et l' avec $l < l'$ en a. On prend $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$ Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique que $|f(x) - l| < \varepsilon$ et $\alpha' > 0$ tel que $|x - a| < \alpha'$ implique que $|f(x) - l| < \varepsilon$. On a $l' - l = |l' - l| = |l' - f(x) + f(x) - l| \leq |l' - f(x)| + |f(x) - l|$ par l'inégalité triangulaire. Si $|x - a| < min(\alpha, \alpha')$, on obtient $l' - l < 2\varepsilon = l' - l$, ce qui est absurde. ∎

Définition 3.8

Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$. On dit que f est continue en a si f admet $f(a)$ comme limite en a. Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \alpha > 0 \text{ tel que} \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de a.

Exemples 3.9

1. *Les fonctions exponentielles et trigonométriques sont continues sur leurs domaines de d éfinition.*
2. *Soit $E(x)$ le plus grand entier $\leq x$. C'est la partie entiére de x. On montre que la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*

Définition 3.10

Soit f une fonction numérique non définie en x_0 ($x_0 \notin D_f$) et admet une limite finie l au point x_0. La fonction g définie sur $D_g = D_f \cup \{x_0\}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si}\, x \in D_f \\ g(x_0) = l & . \end{cases}$ *est continue au point x_0, et est applée le* ***prolongement par continuité*** *de f au point x_0.*

Exemples 3.11

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si}\, x \neq 0 \\ 1 & \text{si}\, x = 0. \end{cases}$

est un prolongement par continuité de f au point 0.

3.2 Propriétés de la limite d'une fonction

Les propriétés des limites de suites se généralisent facilement au cas des fonctions.

Proposition 3.12

Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

1. *Si f admet une limite l en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que f soit bornée sur $A \cap I$. Si f admet une limite l quand x tend vers $+\infty$ alors il existe un intervalle $I =]b, +\infty[$ tel que f soit bornée sur $A \cap I$.*

2. *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et si g est bornée sur un intervalle ouvert contenant a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.*

3. *Si f et g ont une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors*

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

et

$$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x).$$

4. *Si f ne s'annule pas sur A, et*

(a) *si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{l}.$$

(b) *si $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$ alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(c) *si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et si $f(x) > 0$ sur un intervalle ouvert contenant a, alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

7. *Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

8. *(gendarmes) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.*

Exercice 3.13

1. *Déterminer, si elle existe, la limite de* $\frac{x}{1+x}$ *en 1 ?*
2. *Déterminer, si elle existe, la limite de* $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ *en* $+\infty$ *?*

Proposition 3.14 (*Composée de deux fonctions continues*)

Soient deux fonctions $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $f(A) \subset B$. *Si* f *est continue en* $a \in A$ *et si* g *est continue en* $b = f(a) \in B$, *alors la composée* $g \circ f$ *est continue en* a.

Preuve : Fixons $\varepsilon > 0$. On veut $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. Comme g est continue en $b = f(a)$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \alpha$ implique $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$. Comme f est continue en a il existe $\beta > 0$ tel que $|x - a| < \beta$ implique $|f(x) - f(a)| < \alpha$. ■

Proposition 3.15 (*Critére séquentiel de continuité*)

Soient une fonction et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $a \in A$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue en a.*
2. *pour toute suite* (u_n) *à valeurs dans* A *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a).$$

Preuve : Supposons f continue en a. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Comme (u_n) tend vers a, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \alpha$. Mais alors $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$. Donc la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(a)$. Pour montrer la réciproque, nous allons prouver la contraposée : en supposant que f n'est pas continue en a il s'agit de trouver une suite (u_n) qui converge vers a et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(a)$. Dire que f n'est pas continue en a est la négation de $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, c'est-é-dire

$$non(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ \forall x \in A\cap]a - a, a + a[\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

qui équivaut à

$$(*) \quad \exists\varepsilon > 0,\ \forall\alpha > 0,\ \exists x \in A\cap]a - a, a + a[\ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

On a le droit de choisir α. Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$. La relation $(*)$ implique alors qu'il existe $u_n \in A\cap]a - \alpha, a + \alpha[$ tel que $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Alors $|u_n - a| < \frac{1}{2^n}$, donc (u_n) tend vers a et comme $|f(u_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ l a suite $(f(u_n))$ ne tend pas vers $f(a)$. Ce qui prouve le résultat. ■

Théorème 3.16 (*Théoème des valeurs intermédiaires*)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $f(a) \leq f(b)$. *Alors pour tout* $y \in [f(a), f(b)]$ *il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = y$.

Preuve : On va dénir par récurrence deux suites (a_n) et (b_n). On commence par $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Supposons a_n et b_n construits.
Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$, on pose
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}. \end{cases}$$
Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, on pose
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n. \end{cases}$$
On va montrer que pour tout n on a
$(*)$ $$f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$$
Au rang $n = 0$ la relation $(*)$ équivaut $f(a) \leq y \leq f(b)$, qui est l'hypothèse. Supposons que $(*)$ est vraie au rang n. On distingue deux cas.
Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$ alors
$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq y \leq f(\frac{a_n+b_n}{2}) = f(b_{n+1}).$$
Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$ alors
$$f(a_{n+1}) = f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y \leq f(b_n) = f(b_{n+1}).$$
D'où $(*)$ au rang $n+1$. Par dénition de a_n et de b_n on voit que $a_n \leq b_n$, que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante. Enn on a
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \ldots = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$
Donc la suite $(b_n a_n)$ tend vers 0. On a donc deux suites adjacentes. D'après la proposition 2.35 elles convergent vers la même limite. Appelons x cette limite. Vérions que $x \in [a, b]$. En effet on a $a = a_0 \leq a_n \leq x \leq b_n \leq b_0 = b$. Vérions que $f(x) = y$. Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est continue en x et donc $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x)$. et $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$. Mais par la propriété $(*)$ on a $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. Finalement par le théorème des gendarmes (proposition 2.22) on obtient $f(x) = y$. ■

Corollaire 3.17

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
$$\textit{Si} \quad f(a)f(b) < 0, \quad \textit{alors il existe} \quad c \in]a, b[\quad \textit{tel que} \quad f(c) = 0.$$

Exemple 3.18

Tout polynéme de degré impair possède au moins une racine réelle.

En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ En particulier, il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent.

Théorème 3.19

Soit $f : [a, b] \mapsto R$ une application continue sur un segment Alors f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

Preuve : Il suffit de montrer le résultat pour le maximum (pour le minimum, on prend $-f$ à la place de f). Montrons d'abord par l'absurde que f est majorée. Supposons que f n'est pas majorée. Cela implique que pour tout entier n il existe un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) > n$. Appelons x_n cet élément. On a donc une suite (x_n) à valeurs dans le segment $[a, b]$. Par le théoréme de **Bolzano- Weierstrass**, on peut extraire une sous-suite convergente (y_n) de la suite (x_n). On obtient ainsi une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$. Donc

$$f(y_n) = f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n,$$

ce qui implique que la suite $(f(y_n))$ tend vers $+\infty$. Notons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Comme f est continue on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = f(l)$, ce qui contredit $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = +\infty.$, Donc f est majorée et $\sup\limits_{f}[a, b]$ existe.

Soit M cette borne supérieure. Il suffit alors de montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M$. Soit n un entier. Par définition de la borne supérieure, $M - \frac{1}{2^n}$ n'est pas un majorant des valeurs de f, donc il existe $x_n \in [a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{2^n} < f(x_n) \leq M.$$

On a donc une suite (x_n) dans $[a, b]$. Par le théoréme de **Bolzano-Weierstrass** , il existe une sous-suite convergente (y_n) de (x_n) avec $y_n = x_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Soit x la limite de la suite (y_n). On a les inégalités

$$M - \frac{1}{2^n} \leq M - \frac{1}{2^{\varphi(n)}} < f(y_n) \leq M.$$

Par le théoréme des gendarmes on conclut que la suite $(f(y_n))$ tend vers M. Comme f est continue, on a aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} f(y_n) = f(x)$. Finalement on obtient $f(x) = M$. ■

3.3 Fonctions dérivables

Soient $f : A \mapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

Définition 3.20

On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (dans $\mathbb{R}$). On note $f'(a)$ cette limite.

Exemples 3.21

1. *Soit $f : A \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$. On a On*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to a} \frac{|x|}{x} = 1 \quad et \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to a} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Donc f n'est pas dérivable en 0. Par contre f est dérivable en tout point $a \neq 0$.
2. *Les fonctions classiques*

1. *trigonométriques :* $\sin, \cos, \tan, \ldots$
2. *polynomiales :* $ax^2 + bx + c, \ldots$
3. *exponentielles :* e^x
4. *rationnelles :* $\frac{ax+b}{cx+d}, \ldots$

sont dérivables sur leurs domaines de définition.

Interprétation géométrique.
La dérivée $f'(x_0)$ de f en x_0 donne la pente de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ au graphe de f.

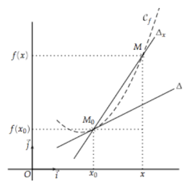

Figure 3.1 – La tangente

Proposition 3.22

Soient $f : A \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in A$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve : Soit $l = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Donc

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right]$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \to a} (x - a) = l.0 = 0$$

Donc $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et f est bien continue en a. ■

Remarque 3.23

1. La réciproque n'est pas toujours vraie, comme le prouve l'exemple $f(x) = |x|$ en $x = 0$.
2. Il existe même des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de leur domaine de définition.

Proposition 3.24

Soit $f : A \mapsto \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en a. Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Preuve : Supposons que l'extremum est un maximum (le cas du minimum se traite en remplaçant f par $-f$). Alors par définition il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in I \cap A$ on a $f(x) \leq f(a)$. Si $x > a$, on a $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et par passage à la limite on obtient $f'(a) \leq 0$ Si $x < a$, on a $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \geq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et par passage 'a la limite on obtient $f'(a) \geq 0$ En combinant les deux inégalités on obtient $f'(a) = 0$. ■

Remarque 3.25

La réciproque n'est pas toujours vraie. Si $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.

Définition 3.26 (*fonction dérivée*)

Si $f : A \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de A, alors f est dérivable sur A et on définit sa fonction dérivée f' par $f' : A \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$.

Proposition 3.27

1. *Si f et g sont deux fonctions dérivables sur A, alors $f + g$ et fg sont dérivables sur A et*
$$(f+g)' = f' + g' \qquad \text{et} \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$
2. *Si f ne s'annule pas sur A, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur A et*
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}.$$

Proposition 3.28 (*Dérivée de la composée de deux fonctions*)

Soient $f : A \mapsto \mathbb{R}$ et $g : B \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$ (pour tout $x \in A$ on a $f(x) \in B$.) Si f est dérivable en $a \in A$ et g est dérivable en $f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Exemple 3.29

Calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$. *Nous avons* $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$;
et $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$. *Alors la dérivée de* $\ln(1+x^2) = (g \circ f)(x)$ *est*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) = g'(1+x^2).2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Preuve : On considère ξ la fonction définie sur B par :

$$\begin{cases} \frac{g(x)-g(f(a)}{x-f(a)} - g'(f(a)) & \text{si } x \neq f(a) \\ 0 & \text{si } x = f(a) \end{cases}$$

La fonction ξ est continue en $f(a)$. On pose $h = g \circ f$ et $b = f(a)$. On a

$$\frac{h(t)-h(a)}{t-a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}\left(\xi(f(t)) + g'(f(a))\right).$$

Donc $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{h(t)-h(a)}{t-a} = f'(a)\left(0 + g'(f(a))\right) = f'(a)g'(f(a))$. Donc $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$. ■

Proposition 3.30 (*Dérivée de la fonction réciproque*)

Soit $f : A \mapsto B \subset \mathbb{R}$ *une fonction continue. Os uppose qu'il existe une fonction réciproque* $g : B \mapsto A$, *c'est-à-dire que*

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad \textit{et} \qquad f(g(y)) = y \quad \forall y \in .B$$

Si f *est dérivable en* a *et si* $f'(a) \neq 0$, *alors g est dérivable en* $f(a)$ *et on a*

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Preuve : On admet l'existence de $g'(f(a))$. On dérive la formule $g(f(x)) = x$. En appliquant la proposition qui donne la dérivée de la composée on obtient

$$1 = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

D'où la formule de la proposition. ■

Corollaire 3.31

Soit I *un intervalle ouvert. Soit* $f : I \mapsto J$ *dérivable et bijective dont on note* $f^{-1} : J \mapsto I$ *la bijection réciproque. Si* f' *ne sannule pas sur* I *alors* f^{-1} *est dérivable et on a pour tout* $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Preuve : Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$. Le taux d'accroissement de g en y_0 est :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$ ■

Exemple 3.32

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \exp(x)$.

Étudions f en détail. Tout d'abord :

1. f est dérivable car f est la somme de deux fonctions dérivables. En particulier f est continue.

2. f est strictement croissante car f est la somme de deux fonctions strictement croissante.

3. f est une bijection car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. $f'(x) == 1 + \exp(x)$ ne s'annule jamais (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Même si on ne sait pas a priori exprimer g, on peut malgré tout connaître des informations sur cette fonction : par le corollaire ci-dessus g est dérivable et l'on calcule g' en dérivant l'égalité $f(g(x)) = x$. Ce qui donne $f'(g(x)).g'(x) = 1$ et donc ici

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \exp(g(x))}.$$

Pour cette fonction f particulière on peut préciser davantage : comme $f(g(x)) = x$ alors $g(x) + \exp(g(x)) = x$ donc $\exp(g(x)) = x - g(x)$ ce qui conduit à

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x - g(x)}$$

Théorème 3.33 (*théorème de Rolle*)

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve : Comme f est continue sur un segment, f admet un maximum et un minimum. Soit $M = \max\limits_{[a,b]} f$ et $m = \min\limits_{[a,b]} f$. Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$ il existe un $c \in]a, b[$ tel que f posséde un extremum en c. On sait alors que $f'(c) = 0$. Sinon on a $m = f(a) = f(b)$ et $M = f(a) = f(b)$. Donc f est constante sur $[a, b]$ et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. ■

Théorème 3.34 (*théorème des accroissements finis*)

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve : On introduit la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'aprés le théorème de **Rolle** , il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c)$. Comme $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on obtient bien la formule annoncée en posant $x = c$. ■

Exercice 3.35

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu' il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Corollaire 3.36 (*Inégalité des accroissements finis*)

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I **ouvert**. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors*

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Proposition 3.37

Soit $f : A \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle A. Alors :

1. *f est constante si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in A$.*
2. *f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in A$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in A$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).*

Preuve : **1.** Si f est constante, sa dérivée est nulle. Réciproquement, soient $a, b \in A$ avec $a < b$. On applique le théoréme des accroissements finis é la fonction f sur le segment $[a,b]$: il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Comme f' est nulle, on obtient $f(b) = f(a)$. Par conséquent f est constante. **2.** Si f est croissante, on a $f(x) \geq f(a)$ pour $x > a$ et alors $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. De même si $x < a$, on $f(x) \leq f(a)$ et $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$. Comme les inégalités passent é la limite, en faisant tendre x vers a on voit que $f'(a) \geq 0$.

Réciproquement, on procéde comme dans la premiére partie : on obtient $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$. Donc $f(b)-f(a) \geq 0$ si $b > a$ et $f(b)-f(a) \leq 0$ si $b < a$. Donc f est croissante. On traite le cas f décroissante en remplaéant f par $-f$. ∎

3.4 Application aux suites réelles

Théorème 3.38 (*théorème du point fixe*)

Soit $f : A \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un point fixe $l \in A$ pour f, c'est-à-dire un point l tel que

$$f(l) = l,$$

et qu'il existe un intervalle $I = [l-a, l+a]$ et un réel $\lambda < 1$ tels que pour tout $x \in I$

$$|f'(x)| \leq \lambda$$

Alors la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers l.

Preuve : On pose $v_n = u_n - l$. Il suffit de montrer que (v_n) tend vers 0. Montrons d'abord par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n. Par hypothèse $u_0 \in I$. Supposons $u_n \in I$. Alors si l'on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f et à l'intervalle $[u_n, l]$ si $u_n < l$ (ou bien $[l, u_n]$ si $u_n > l$) on obtient qu'il existe $c \in]u_n, l[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(u_n) - f(l)}{u_n - l} = \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}$$

La dernière égalité résulte de $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(l) = l$. Comme $]u_n, l[\subset I$ on sait que $|f'(c)| \leq \lambda < 1$. D'où

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \leq \lambda. \qquad (*)$$

Comme $\lambda < 1$, on obtient $|v_{n+1}| < |v_n|$, ce qui implique que $u_{n+1} \in I$. En itérant l'inégalité $(*)$, on trouve

$$|v_{n+1}| \leq \lambda |v_n| \leq \lambda^2 |v_{n-1}| \leq \ldots \leq \lambda^{n+1} |v_0|.$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, la suite (λ^n) tend vers 0. Par conséquent la suite (v_n) tend aussi vers 0. ■

Remarque 3.39

Si de plus la fonction dérivée f' est continue, alors la condition $|f'(l)| < 1$ implique l'existence d'un intervalle $I = [l-a, l+a]$ tel que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leq \lambda < 1$.

Chapitre 4

Fonctions Circulaires Réciproques

1. **Identité remarquable** $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
2. **Périodicité :**
   - $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \forall k \in \mathbb{Z},$
   - $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \forall k \in \mathbb{Z},$
   - $\tan(x + k\pi) = \tan(x), \quad \forall x \neq \frac{(2m+1)\pi)}{2}; \forall k, m \in \mathbb{Z}.$
3. **Relations remarquables**
   - $\cos(-x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$
   - $\sin(-x) = -\sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$
   - $\tan(-x) = -\tan(x), \quad \forall x \neq \frac{(2m+1)\pi}{2}, \forall m \in \mathbb{Z},$
   - $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$
   - $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$
   - $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}, \quad \forall x \neq m, \forall m \in \mathbb{Z}.$
4. **Formules d'addition :**
   - $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$
   - $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),$
   - $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),$
   - $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)},$
   - $tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$
5. **Formules de Duplication :**
   - $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a),$
   - $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a),$
   - $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}.$
6. **Identité d'Euler :**

   $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$

4.1 Fonction Arcsinus

La restriction de la fonction **sinus** à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définit une bijection continue de cet intervalle sur$[-1, 1]$. Sa fonction réciproque, notée **arcsinus** est une bijection continue de $[-1, 1]$ sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\left\{ \begin{array}{r} y = \arcsin(x) \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = \sin(y) \\ y \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right.$$

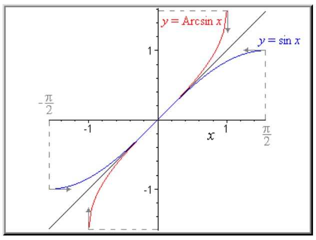

FIGURE 4.1 – courbe de arcsinus

La fonction $x \longmapsto y = \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$, sa dérivée étant

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.2 Fonction Arccosinus

La restriction de la fonction **cosinus** à l'intervalle $[0, \pi]$ définit une bijection continue de cet intervalle sur$[-1, 1]$. Sa fonction réciproque, notée **arccos** est une bijection continue de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.

$$\left\{ \begin{array}{r} y = \arccos(x) \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = \cos(y) \\ y \in [0, \pi] \end{array} \right.$$

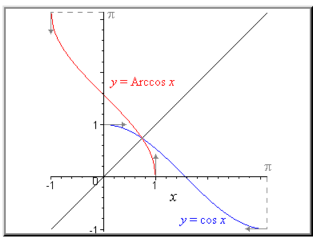

FIGURE 4.2 – courbe de arccos

La fonction $x \longmapsto y = \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$, sa dérivée étant

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.3 Fonction Arctangente

La restriction de la fonction **tangente** à l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$définit une bijection continue de cet intervalle sur$\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque, notée **arctan** est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{cases} y = \arctan(x) \\ \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ y \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

On a les propriétés de la fonction **arctang** qui se déduisent de celle de la fonction **tan** grâce aux résultats sur les fonctions réciproques :

- arctan est continue sur $\mathbb{R}$
- arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- arctan est impaire
- arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Reprsentation graphique de arctan : Elle se déduit de celle de la fonction **tan** par symtrie par rapport la première bissectrice.

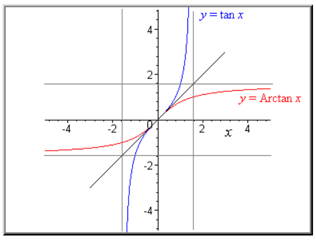

Figure 4.3 – courbe de arctan

4.4 Quelques formules utiles

- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$.
- $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \mathrm{sing(x)}\frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.
- $\cos(\arcsin(x)) + \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$.
- $\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.
- $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$.
- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 5

Fonctions Hyperboliques Réciproques

5.1 Fonctions Cosinus hyperbolique et Sinus hyperbolique

Définition 5.1

On appelle **Cosinus hyperbolique**, qu'on note **ch** , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$$

On appelle **Sinus hyperbolique**, qu'on note **sh** , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Propriétés 5.2

1. $e^x = ch(x) + sh(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. **ch** est paire et **sh** est impaire.
3. **ch** et **sh** sont dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $sh'(x) = ch(x)$et $\quad ch'(x) = sh(x)$.
4. $ch^2(x) - sh^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
5. $sh(x) \geq x \quad \forall x \geq 0$.
6. $\lim_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{ch(x)}{x} = +\infty$.
7. $\lim_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{sh(x)}{x} = +\infty$.

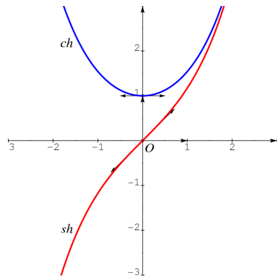

FIGURE 5.1 – courbe de ch et sh

5.2 Fonction tangente hyperbolique

Définition 5.3

On appelle **tangente hyperbolique**, qu'on note **th** , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Propriétés 5.4

1. $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $-1 < th(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
3. $th(x) \geq x \quad \forall x \geq 0.$
4. **th** est impaire.

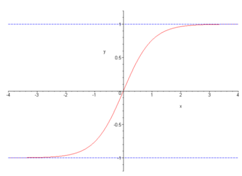

FIGURE 5.2 – courbe de th

5.3 Quelques Formules Utiles

5.3.1 Formules d'addition :

- $ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y).$
-] $ch(x-y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y).$
-] $sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y).$
- $sh(x-y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y).$

- $th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x)th(y)}$.
- $th(x-y) = \frac{th(x)-th(y)}{1-th(x)th(y)}$.

5.3.2 Formule de Duplication

- $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$.

•] $sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$.

- $th(2x) = \frac{2th(x)}{1-th^2(x)}$.

5.4 Fonctions hyperboliques réciproques

5.4.1 Fonction Argument Sinus Hyperbolique

La fonction **sh** est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. Et alors, elle admet une fonction réciproque.

Définition 5.5

On appelle fonction **argument sinus hyperbolique**, qu'on note **Argsh** la fonction réciproque de **sh** sur $\mathbb{R}$.. Alors on a :

$$\begin{cases} y = Argsh(x) \\ \hfill x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = sh(y) \\ \hfill y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Et d'après les résultats sur les fonctions réciproques, on a : **Argsh** est continue, strictement croissante, impaire et dérivable. et on a :

$$Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Représentation de Argsh :
Elle se déduit de celle de **sh** par symétrie par rapport à la première bissectrice.

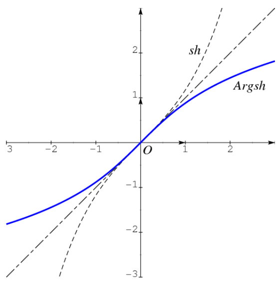

Figure 5.3 – courbe de Argsh

5.4.2 Fonction Argument Cosinus Hyperbolique

La fonction **ch** est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. Et alors, elle admet une fonction réciproque.

Définition 5.6

On appelle fonction **argument cosinus hyperbolique**, qu'on note **Argch** la fonction réciproque de **ch** sur $\mathbb{R}^+$. Alors on a :

$$\begin{cases} y = Argch(x) \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x = ch(y) \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Et d'après les résultats sur les fonctions réciproques, on a : **Argsh** est continue, strictement croissante et dérivable. et on a :

$$Argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in]1, +\infty[.$$

Représentation graphique de Argch :

Elle se déduit de celle de **sh** par symétrie par rapport à la première bissectrice.

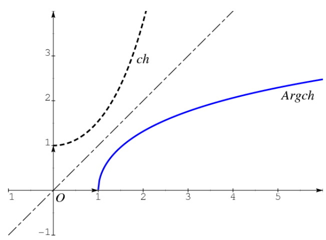

FIGURE 5.4 – courbe de Argch

5.4.3 Fonction Argument Tangente Hyperbolique

La fonction **th** est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. C'est donc une bijection pour ces ensembles. Et alors, elle admet une fonction réciproque.

Définition 5.7

On appelle fonction **argument tangente hyperbolique**, qu'on note **Argth** la fonction réciproque de **th** sur $\mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{cases} y = Argth(x) \\ x \in]-1, 1[\end{cases} \iff \begin{cases} x = th(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Et d'après les résultats sur les fonctions réciproques, on a : **Argth** est continue, strictement croissante, impaire et dérivable. et on a :

$$Argch'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Représentation graphique de Argth :
Elle se déduit de celle de **sh** par symétrie par rapport à la première bissectrice.

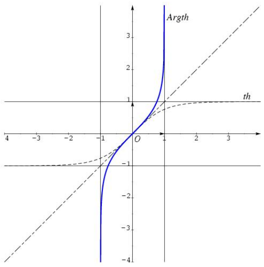

FIGURE 5.5 – courbe de Argth

5.5 Quelques formules utiles

- $ch(Argsh(x)) = \sqrt{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $sh(Argch(x)) = \sqrt{x^2-1} \quad \forall x \in [1,+\infty[.$
- $1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $ch(Argth(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[.$
- $sh(Argth(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[.$
- $Argch(x) = Log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \forall x \in]1,+\infty[.$
- $Argsh(x) = Log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Chapitre 6

Formules de Taylor et Développements limités

6.1 Formules de Taylor

6.1.1 Formules de Taylor Lagrange

Soit f une fonction réelle de classe C^n sur $[a,b]$ et admettant sur $]a,b[$ une dérivée d'ordre $n+1$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Un tel nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b-a)$ avec $\theta \in]0,1[$.
Lorsque $a = 0$, on obtient en posant $b = x$ la **formule**dite **de Mac-Laurin** :

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1).}$$

Applications
La fonction $x \longmapsto f(x) = \exp(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Donc pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}\exp(c)}{(n+1)!}.$$

La fonction $x \longmapsto f(x) = \sin(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f^{(k)}(x) = \sin(x + \frac{k\pi}{2})$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$; et pour $x = 0$, on a $f^{(k)}(0) = \sin(\frac{k\pi}{2})$; et donc,

$$\sin^{(2k)}(0) = \sin(2k\pi/2) = 0$$

et

$$f^{(2k+1)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

et

$$\sin(c + \frac{(2k+2)\pi}{2}) = (-1)^{k+1}\sin(c).$$

Par conséquent, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n = 2p+1$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\sin[x] = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+2}\sin(c)}{(2p+2)!}.$$

De même pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n = 2p$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\cos[x] = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}\cos(c)}{(2p+1)!}.$$

6.2 Formule de Taylor-young

Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage $\mathbf{I}$ d'un point a de $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors il existe une fonction réelle ε définie sur un voisinage de a telle que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Pour $a = 0$, on obtient la formule de **Mac-Laurin avec reste Young**

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Exemples
En prenant $a = 0$ dans la formule de la formule de Taylor avec reste Young on obtient les formules suivantes :

1. $\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x).$

2. $\cosh(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x).$

3. $\sinh = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$

4. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$

5. $\cos(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x).$

6.3 Applications

6.3.1 Recherche d'extremums

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et $x_0 \in I$.
Soit n le plus petit entier non nul tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors on a :

(a) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$, alors f admet un maximum relatif au point x_0.

(b) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$, alors f admet un minimum relatif au point x_0.

(c) Si n est impair, alors f n'admet pas d'extremum relatif au point x_0.

6.3.2 Inégalités

En utilisant les formules pécédentes, on obtient facilement les inégalités suivantes :

(a) $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \leq 0.$

(a) $log(1 + x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \forall x > 0.$

(a) $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(a) $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(a) $\tan(x) > x + \frac{x^3}{3} \quad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

6.3.3 Allure d'une courbe au voisinage d'un point

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et $x_0 \in I$. On se propose d'étudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente T_{x_0} à cette courbe au point x_0. l'équation de T_{x_0} est donné par :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Soit n le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. On alors 4 cas :

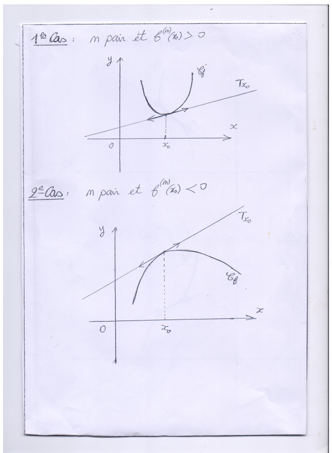

FIGURE 6.1 – Position

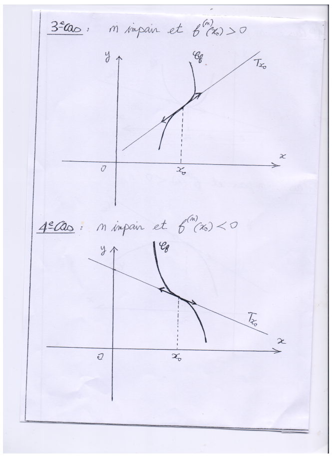

FIGURE 6.2 – Position

6.4 Comparaison de fonctions

Définition 6.1

Soient f, g deux fonctions numériques définies sur des voisinages d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose qu'il existe un voisinage U de a tel que g ne s'annule pas sur $U \setminus \{a\}$. On dit que f est

- Dominée par g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$ (grand O).
- Négligeable devant g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers a. On note $f \underset{a}{=} o(g)$(petit o).
- Équivalente à g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers a. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemples 6.2

1. On a $x^2 \sin(\frac{1}{x}) = O(x^2)$ au voisinage de 0.
2. On a $x^2 \sin(\frac{1}{x}) = o(|x|^{3/2})$ au voisinage de 0.
3. On a $x^2 + 3x + 5 = o(x^3 + 1$ au voisinage de $+\infty$
4. On a $x^3 - x \sim -x$ au voisinage de 0.
5. Une fonction f est bornée au voisinage de 0 ssi $f \underset{0}{=} O(1)$.
6. Une fonction f tend vers 0 ssi $f \underset{0}{=} o(1)$.

Propriétés 6.3

1. *la relation* $f \sim g \quad (x \longrightarrow a)$ *est une relation d'équivalence.*
2. $f \sim g \quad (x \longrightarrow a)$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = l$; *alors* $\lim_{x\to a} g(x) = l$.
3. $f_1 \sim g_1 \quad (x \longrightarrow a)$ *et* $f_2 \sim g_2 \quad (x \longrightarrow a)$ *alors* $f_1 f_2 \sim g_1 g_2 \quad (x \longrightarrow a)$.
4. $e^x - 1 \sim x \quad (x \longrightarrow 0)$.
5. $Log(x+1) \sim x \quad (x \longrightarrow 0)$.
6. $Log(x) \sim x - 1 \quad (x \longrightarrow 1)$.
7. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (x \longrightarrow 1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$.
8. *Si* $\alpha < \beta$ *On a alors :*
   - $|x|^\beta = o(|x|^\alpha) \quad (x \longrightarrow 0)$ *et* $x^\alpha = o(x^\beta) \quad (x \longrightarrow +\infty)$.
   - $(Log(x))^\alpha = o(x^\beta) \quad (x \longrightarrow +\infty)$.
   - $x^\alpha = o(e^{\beta x}) \quad (x \longrightarrow +\infty)$.

6.5 Développements limités

Définition 6.4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle et $a \in \bar{I}$(f n'est donc pas nécessairement dénie en a). On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n au voisinage de a (que l'on notera $(\mathbf{DL_n(a)})$; s'il existe $n+1$ réels $b_0, b_1, \ldots, b_n$ et une fonction ε définie sur I tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad (*)$$

avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

- La fonction polynôme $x \longmapsto b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n$ est appelée **partie principale** (ou **partie régulière)** du développement limité d'ordre n au point a.
- $(x-a)^n\varepsilon(x)$ **le reste** du $(\mathbf{DL_n(a)})$.

Remarque 6.5

- Admettre un développement limité d'ordre 0 en a est équivalent à avoir une limite finie en a.
- Un développement limité d'ordre n est unique, s'il existe.
- Si f est une fonction **paire** [resp. **impaire**] admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 ce développement ne contient que des puissances

paires [resp. **impaires**] de la variable.

- la relation $(*)$ sous la condition $\lim_{x \to a} \varepsilon_(x) = 0$ est équivalente à

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

- Soit f une fonction dénie en a.
  - Alors f admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en a.
    De plus, si tel est le cas : $f(a+h) = f(a) + o(1)$.
  - Alors f admet un développement limité en a l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en a.
    De plus, si tel est le cas : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$.

Théorème 6.6 (*Formule de Taylor-Young*)

Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si f est n fois dérivable en a alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Exemples 6.7

1. *Trouver le développement limité d'ordre n en 0 de $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$*
   Il suffit de calculer les dérivées successives.
   On a $f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-1-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Donc $f^{(k)}(0) = k!$ et
   $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$
2. *Trouver le développement limité d'ordre n en 0 de $f(x) = e^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{(k)}(x) = e^x$, donc $f^{(k)}(0) = 1$. D'où*
   $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$
3. *la fonction* sin *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ de la forme $n = 2p+2$, le développement limité d'ordre n de cette fonction au voisinage de 0 est donné par*
   $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$$

4. *la fonction* cos *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ de la forme $n = 2p+1$, le développement limité d'ordre n de cette fonction au voisinage de 0 est donné par*
$$\cos(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$
5. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$. La fonction estde classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*
$$f^{(p)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p},$$
le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de cette fonction au voisinage de 0 est donné par
$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n).$$

6.5.1 Dérivation et intégration des développements limités

Proposition 6.8

Soit Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. Alors, f admet au voisinage de a un développement limité d'ordre n, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h \longrightarrow 0}{o}(h^n)$, alors $f'(a+h) = \sum_{k=1}^{n} k b_k h^{k-1} + \underset{h \longrightarrow 0}{o}(h^{n-1})$.

Proposition 6.9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a , dont la dérivée admet un développement limité d'ordre n, soit :
$$f'(t) = b_0 + b_1(t-a) + \cdots + b_n(t-a^n) + o((t-a)^n).$$
Alors f admet, au voisinage de a, le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :
$$f(t) = f(a) + b_0(t-a) + b_1\frac{(t-a)^2}{2} + \cdots + b_n\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} + o((t-a)^{n+1}).$$

Exemples 6.10

Pour tout entier naturel n on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. L'intégration du développement limité d'ordre n de la fonction $x \longmapsto (1-x)^{-1}$ au voisinage de 0 nous permet d'obtenir celle de la fonction $x \longmapsto \ln(1-x)$ d'ordre $n+1$ au voisinage de l'origine :
$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1}).$$

6.5.2 Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle ouvert Icontenant l'origine et admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 dont les parties principales des développements limités seront désignés respectivement par P et Q. Alors,

Proposition 6.11

1. La somme $f+g$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, et,la partie principale du développement limité d'ordre n de $f+g$ est $P+Q$
2. Le produit fg admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, et,la partie principale du développement limité d'ordre n de fg s'obtient en ne conservant de PQ que les termes d'ordre $\leq n$
3. Si $g(0) \neq 0$ le quotient $\frac{f}{g}$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, et,la partie principale du développement limité d'ordre n de fg s'obtient en effectuant la division de P par Q suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n.
4. Si $f(0)=0$, le composé $g \circ f$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, et,la partie principale du développement limité d'ordre n de $g \circ f$ s'obtient en ne conservant du composé $Q \circ P$ que les termes d'ordre $\leq n$

Proposition 6.12

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement des développements limités l'ordre n en a et $f(a)$: $f(a+h) = f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k h^k}_{P(h)} + \underset{h \longrightarrow 0}{o}(h^n)$ et $g(f(a)+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h \longrightarrow 0}{o}(h^n)$ Alors $g \circ f$ admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en substituant $P(h)$ à h dans la partie régulière du développement limité de $g$et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs ou égales à n

Exemples 6.13

1. Déterminons le développement limité d'ordre 5 de la fonction $x \longmapsto \sin(x)\cosh(x)$ au voisinage de 0, on a
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \text{ et } \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$
la partie principale du développement limité de $\sin(x)\cosh(x)$ s'obtient en conservant du produit que les termes d'ordre ≤ 5
$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right),$$
par suite,
$$\sin(x)\cosh(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{7x^5}{60} + o(x^5).$$

2. Déterminons le développement limité d'ordre 5 de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-(\sinh(x))^2}$ au voisinage de 0, on a

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^5),$$

et comme $\sinh(0) = 0$ donc $x \longmapsto \frac{1}{1-(\sinh(x))^2}$ possède un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0, et la partie principale de ce développement de cette fonction s'obtient en conservant de

$$1 + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4$$

que les termes d'ordre ≤ 5, par conséquent,

$$\frac{1}{1-(\sinh(x))^2} = 1 + x^2 + \frac{7x^4}{6} + o(x^5).$$

3. Calculons le développement limité d'ordre 6 de la fonction $x \longmapsto \tan(x)$ au voisinage de 0. Cette fonction étant impaire, donc il suffit de chercher son développement limité d'ordre 5. On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \text{ et } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Ladivision suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 5 de $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$:

$$\begin{array}{ccc|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1 \quad -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{4-4}
x & -\frac{x^3}{2} & +\frac{x^5}{24} & x \quad +\frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ \cline{1-3}
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & \\
 & \frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{6} & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{2x^5}{15} &
\end{array}$$

donne

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + o(x^5).$$

6.5.3 Application des développements limités

Équation de la tangente en un point

La partie principale du développement limité d'ordre 1 en un point a est

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$$

donne l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.

Exemple 6.14

l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sin *au point d'abcisse 0 est donnée par* $y = x$

Exemple de calcul de limites

1. Calculons
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - \cosh(x^2)}{x^4}.$$
On a
$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_1(x),\ \cosh(x^2) = 1 + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_2(x),$$
avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$. Donc,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - \cosh(x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0}(-1 + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = -1$$

2. Calculons
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x - \frac{x^3}{3}}{x^5}.$$
Le développement limité d'ordre 5 de la fonction tan au voisinage de 0 donne
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0,$$
donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x - \frac{x^3}{3}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{15} + \varepsilon(x)\right) = \frac{2}{15}.$$

Position d'une courbe par rapport à la tangente en un point

Proposition 6.15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en a :
$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$$
où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coeficient c_k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = c_0 + c_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe $f(x) - y$ c'est-à-dire le signe de $c_k(x-a)^k$.

Il y a 3 cas possibles.

1. Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.

2. Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.

3. Si ce signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un point d'inflexion.