
Analyse combinatoire : Dénombrements

L'analyse combinatoire est l'étude mathématique de la manière de ranger des objets. Dans ce chapitre nous allons développer quelques techniques et méthodes pour dénombrer (sans vraiment compter directement) des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini.

3.1 Principe de multiplication

Principe Soit ξ une expérience qui comporte 2 étapes : la 1^{ère} qui a p_1 résultats possibles et chacun de ces résultats donne lieu à p_2 résultats possibles lors de la 2^{ème} étape. Alors l'expérience ξ a $p_1 \times p_2$ résultats possibles.

Remark 3.1

Le principe multiplicatif peut s'énoncer ainsi : si un événement A peut se produire de p façons possibles et si un événement B peut se produire de q façons possibles, alors la réalisation de A suivie de B peut se produire de $p \times q$ façons possibles.

Remark 3.2

Le principe de multiplication se généralise au cas où l'expérience ξ comporte n étapes. Le nombre de résultats possibles est alors :

$$p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n.$$

Example 3.3

1. On lance une pièce de monnaie deux fois successivement. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
 $2 \times 2 = 2^2.$
2. On jette 2 dés identiques. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
 $6 \times 6 = 6^2.$

Si une expérience ξ consiste à répéter n fois de façon indépendante une même expérience ξ_0 qui a p résultats possibles, alors ξ a $p^n = \underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{n \text{ fois}}$ issues possibles.

3.2 Arrangements

3.2.1 Cardinal, ensemble dénombrable :

Définition 17

Un ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n et une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans E . Si $E \neq \emptyset$ alors n est appelé cardinal de E , noté indifféremment $\text{Card}(E)$ ou $|E|$.
Par convention $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Exemple 3.4

1. Si $E = \{1, 2, \dots, n\}$ alors $\text{Card}(E) = n$.
2. Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors $\text{Card}(E) = 4$.

Soient E un ensemble fini et A et B deux sous-ensemble de E . Alors on a

- $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$ (où $\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$).
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
- $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$.

Définition 18

On dit qu'un ensemble E est **dénombrable** s'il est fini ou s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire si peut on ranger les éléments sous forme d'une suite $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$). Dans ce dernier cas on dit que E est infini et dénombrable.

Exemple 3.5

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{a, b, c, d, f, g, h\}$ et $\{\diamond, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ sont des ensembles finis.
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont infini dénombrables.

3.2.2 Arrangements avec répétition

Définition 19

Soient E un ensemble non vide de cardinal fini n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $p \in \mathbb{N}$.
On appelle **arrangement avec répétition de p éléments parmi n** tout p -uplet d'éléments de E c'est-à-dire tout élément du produit cartésien $E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$.

Exemple 3.6

1. Si $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ alors
 - $(1, 2, 3)$ est un arrangement de 3 éléments parmi 10. $(1, 2, 3) \in E^3$.

- $(0, 9, 8, 9)$ est un arrangement de 4 éléments parmi 10.
 - $(1, 2, 1, 3, 4, 2)$ est un arrangement de 6 éléments parmi 10.
 - 2. Si $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors
 - (e, b, c, a) est un arrangement de 4 éléments parmi 5.
 - (b, a, c) est un arrangement de 3 éléments parmi 5.
 - (d, a, b, a) est un arrangement de 4 éléments parmi 5.
- En pratique, et lorsque la situation le permet, un arrangement avec répétition de p éléments parmi n est tout simplement notée ainsi : $daba$.

Nombre d'arrangements avec répétition

Soit un arrangement avec répétition de p éléments parmi n .

- Pour choisir le 1^{ère} élément on a n possibilités.
- Pour choisir le 2^{ème} élément on a n possibilités.
- ⋮
- Pour choisir le $p^{\text{ème}}$ élément on a n possibilités.

En conséquence du principe de multiplication, le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments parmi n est n^p .

Remark 3.7

1. Le nombre n^p est aussi le nombre d'applications d'un ensemble F ayant p éléments vers un ensemble E ayant n éléments.
2. Si $|E| = n$ alors $|E^p| = n^p$.
3. En général, si E et F sont deux ensembles finis alors $|E^F| = |E|^{|F|}$.

3.2.3 Arrangements sans répétition

Définition 20

Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments parmi n tout sous-ensemble **ordonné** de E ayant p éléments deux à deux **distincts**.

Autrement dit, tout p -uplet **ordonné** $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ d'éléments de E deux à deux **distincts**.

Example 3.8

Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors

- abc, bac, cab, bcd, dca sont des arrangements de 3 éléments parmi 4.
- $abcd, abdc, bacd, dbca$ sont des arrangements de 4 éléments parmi 4.
- aab n'est pas un arrangement de 3 éléments parmi 4.

Example 3.9

Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Calculons le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 4.

On a

- 4 possibilités pour choisir le 1^{er} élément.
- 3 possibilités pour choisir le 2^{ème} élément.
- 2 possibilités pour choisir le 3^{ème} élément.

Par suite, le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 4 est : $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Le nombre d'arrangements et le symbole A_n^p :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On appelle factoriel n et on note $n!$ le nombre $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Par convention, $0! = 1$.

Notation On note $\mathcal{A}_n^p$ l'ensemble des arrangements de p éléments d'un ensemble de cardinal n , et $A_n^p = \text{Card}(\mathcal{A}_n^p)$.

Theorem 3.10

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors on le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble de cardinal n est

$$A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times (n-(p-1)) & \text{si } p \leq n. \end{cases}$$

Example 3.11

Tirage successif sans remise (échantillon exhaustif) : Modèle.

Soit une urne contenant n boules. Tout tirage successif sans remise de p boules ($p \leq n$) est un arrangement de p éléments parmi n .

Example 3.12

1. Nous avons 3 enfants. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir sur un banc de deux places ?
Chaque façon de s'asseoir est un arrangement de 2 éléments parmi 3. Le nombre de possibilités est donc $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$.
2. On veut former des nombres de trois chiffres différents parmi les chiffres : 2, 3, 5, 6, 7. Combien a-t-on de possibilités ?
Chaque nombre est un arrangement de 3 éléments parmi 5. Le nombre de possibilités est donc $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.
3. Une urne contient 6 boules. On effectue un tirage successif et sans remise de 3 boules. Combien a-t-on de possibilités ?
 $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

3.2.4 Permutations

Définition 21

Soit E un ensemble de cardinal n . On appelle permutation tout arrangement des n éléments de E .

De l'étude des arrangements, on déduit immédiatement que le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n est $A_n^n = n!$, et que toute permutation s'identifie à une bijection : $\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow E$.

Example 3.13

1. De combien de façons peut-on répartir 7 personnes sur 7 chaises ?
Désignons par $p_1, p_2, \dots, p_7$ les 7 personnes et posons $E = \{p_1, p_2, \dots, p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E , il y

en $a! = 5040$.

2. Combien y-a-t-il de nombres à trois chiffres choisis parmi les chiffres 1, 2, 3 ?

Chaque nombre est une permutation de ces trois chiffres. Il y en a donc $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Remark 3.14

Importante

Dans la pratique du calcul des probabilités, l'**arrangement sans répétition** (échantillon exhaustif) correspond au **tirage sans remise**, alors que l'**arrangement avec répétition** (échantillon non exhaustif) correspond au **tirage avec remise** (i.e. Bernoullien).

3.3 Combinaisons

3.3.1 Définition et exemples

Définition 22

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E de cardinal p .

Example 3.15

Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors les parties $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{d, c\}$ $\{d, a\}$ sont des combinaisons de deux éléments de E .

les parties $\{a, b, c\}$, $\{a, c, d\}$ et $\{d, c, b\}$ $\{b, d, a\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E .

Remark 3.16

Il est essentiel de noter que dans une Combinaison :

- on ne tient pas compte de l'ordre, les parties $\{a, b, c\}$, $\{c, a, b\}$ et $\{b, c, a\}$ sont les mêmes (autrement dit, deux parties contenant les mêmes éléments définissent la même combinaison).
- les éléments sont deux à deux distincts.

Notation On note C_n^p le nombre de combinaisons de p éléments parmi n .

Theorem 3.17

Pour tout entier n on a

$$C_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} & \text{si } p \leq n. \end{cases}$$

Example 3.18

1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Le nombre de parties de E contenant 2 éléments est $C_4^2 = 6$.
Le nombre de parties de E contenant 3 éléments est $C_4^3 = 4$.
2. De combien de façons différentes peut-on choisir 4 étudiants parmi 10 ?
 C_{10}^4 façons différentes.
3. Combien de groupes de 4 élèves peut-on former d'une classe de 30 élèves ?
Chaque groupe possible est une combinaison de 4 éléments parmi 30. Le nombre de groupes

possibles est : $C_{30}^4 = 27405$.

Example 3.19

Modèle.

Quand on effectue un tirage simultané (au même temps) de p boules d'une urne qui contient n boules ($p \leq n$) alors toute possibilité est une combinaison de p éléments parmi n .

3.3.2 Formule du binôme de Newton

Theorem 3.20

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ on a

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \\ &= C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^k a^k b^{n-k} + \dots + C_n^n a^n.\end{aligned}$$

Par récurrence sur n .

Remark 3.21

La formule est vraie plus généralement dans un anneau commutatif. Si l'anneau n'est pas commutatif, elle est vraie pour deux éléments qui commutent.

1. $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.
 2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.
 3. $\sum_{\substack{k \text{ pair}, k=0 \\ n}} C_n^k = \sum_{\substack{k \text{ impair}, k=0 \\ n}} C_n^k = 2^{n-1}$.
 4. $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$.
1. Développer $(1 + 1)^n$.
 2. Développer $(1 - 1)^n$.
 3. Séparer la somme précédente en distinguant k pair et k impair.
 4. Développer $(1 + x)^n$, puis dériver et évaluer en $x = 1$.

Example 3.22

Quel est le nombre de parties de l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$?

- Nombre de parties vides : $C_4^0 = 1$ (l'ensemble $\emptyset$).
- Nombre de parties ayant un élément : $C_4^1 = 4$.
- Nombre de parties ayant 2 éléments : $C_4^2 = 6$.

- Nombre de parties ayant 3 éléments : $C_4^3 = 4$.
- Nombre de parties ayant 4 éléments : $C_4^4 = 1$ (l'ensemble E lui même).

Ainsi, le nombre cherché est : $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$.

Remark 3.23

Le nombre de parties d'un ensemble E de cardinal n est 2^n , ce qui se montre directement avec la bijection

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \{0, 1\}^E \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A. \end{aligned}$$

Triangle de Pascal¹

La relation de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	$\dots$	$p-1$	p	$\dots$	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
$\dots$											
$n-1$	1	$n-1$					C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p		1	
n	1	n						C_n^p		n	1

1. Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stiefel (1543) et des Chinois (1303).

CHAPITRE 4

Lois de probabilités discrètes

Les probabilités sont une branche des Mathématiques dont l'objet est l'étude des phénomènes aléatoires ou non déterministes. Historiquement, il s'agit essentiellement des jeux de hasard et des problèmes d'espérance de vie pour des calculs de rente.

L'approche mathématique des ces problèmes n'apparaît réellement qu'au 17^{ème} siècle avec Blaise Pascal et Pierre de Fermat qui entretenaient des correspondances sur des problèmes des jeux du hasard en 1654 en se confrontant au problème suivant : pourquoi en jetant 3 dés obtient-on plus souvent la somme 11 que la somme 10 alors que

pour 11 : 146, 236, 155, 335, 443, 245

pour 12 : 156, 246, 255, 345, 336, 444.

Il va sans dire que les questions ayant trait au hasard (ou à certaines "tentatives de le mesurer") sont nettement antérieures à cette époque ; les philosophes grecs s'occupaient de toutes les questions imaginables et donc bien sûr des problèmes de hasard et de déterminisme.

Au début du 18^{ème} siècle, influencés par les travaux de Pascal et Fermat, des chercheurs comme Jacques Bernoulli ¹ 1713, Abraham De Moivre 1718, Christian Huygens 1657, Thomas Bayes 1763 et Pierre-Simon de Laplace 1812 ont réalisé de nombreuses avancées.

L'élaboration d'un cadre mathématique rigoureux est très récente et elle est due à Kolmogorov ², qui a axiomatisé le calcul des probabilités (fondements du calcul des probabilités 1933) et a permis en particulier l'utilisation de la théorie de la mesure.

Ainsi bien établie, la théorie des probabilités trouve actuellement des applications dans plusieurs domaines allant de la musique à la physique et dans l'expérience quotidienne, de la prédiction de climat à la prédiction des risques de nouveaux traitements médicaux.

1. Jacques ou Jakob Bernoulli (27 décembre 1654, Bâle - 16 août 1705) est un mathématicien et physicien suisse, auteur du premier ouvrage sur les probabilités (*Ars conjectandi*, ouvrage posthume de 1713).

2. Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (25 avril 1903, Tambov - 20 octobre 1987, Moscou) est un mathématicien russe dont les apports en mathématiques sont considérables.

4.1 Notions élémentaires de base

4.1.1 Expérience aléatoire, univers et événement

Définition 23

On appelle expérience aléatoire tout processus qui engendre des résultats ou des observations dont il est impossible de connaître à l'avance l'issue.

Exemple 4.1

lancé d'un dé, d'une pièce de monnaie, d'une fléchette en direction d'une cible, choix d'une carte dans un jeu de cartes, attente d'une rame de tramway, prélever des boules dans une urne, observer la position d'une particule dans un liquide,...

Définition 24

- On appelle univers, l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- Toute partie de Ω s'appelle événement.
- Un événement est dit élémentaire s'il contient un seul élément.

Exemple 4.2

- On lance une pièce de monnaie 1 fois : $\Omega = \{F, P\}$. Les événements de Ω sont : $\emptyset$, Ω , $\{F\}$ et $\{P\}$
- On lance une pièce de monnaie 2 fois : $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$. $\emptyset$, Ω , $\{FF\}$, $\{FP, PP\}$, $\{FF, FP, PF\}$ sont des événements de Ω .
- Jet d'un dé 1 fois : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{3, 6\}$, sont des événements de Ω .
- Jet d'un dé 2 fois : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.
Soit l'événement A : " la somme obtenue est supérieure ou égale à 11 ". On a

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Soit l'événement B : " la somme obtenue est divisible par 3 et par 4 ". On a

$$B = \{(6, 6)\}$$

et B est un événement élémentaire.

Vocabulaire :

- Ω s'appelle l'événement certain.
- $\emptyset$ s'appelle l'événement impossible.
- Un événement est dit réalisé si le résultat de l'expérience aléatoire lui appartient.
- Soient A et B deux événements. L'événement $A \cap B$ est réalisé si A et B sont réalisés à la fois et l'événement $A \cup B$ est réalisé si A est réalisé ou B est réalisé ou $A \cap B$ est réalisé. On dit que A et B sont incompatibles (i.e. ne se réalisent pas simultanément) si $A \cap B = \emptyset$.
- L'événement contraire d'un événement A , noté $\bar{A}$, est l'événement qui se réalise si l'événement A n'est pas réalisé

Définition 25

Soit Ω un ensemble quelconque. On appelle tribu ou σ -algèbre sur Ω toute partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, (l'ensemble

des parties de Ω), vérifiant les propriétés suivantes :

- $\Omega \in \mathcal{B}$
- $\forall A \in \mathcal{B}$ on a $\bar{A} \in \mathcal{B}$ (stabilité par complémentation)
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ on a $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ (stabilité par union dénombrable).

Exemple 4.3

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.
- Si Ω un ensemble et A une partie propre de Ω alors $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ est une tribu.

Ainsi définis, les événements d'une épreuve aléatoire $\mathcal{E}$ forment une tribu sur Ω (qui contient tous les événements élémentaires). D'où la définition suivante :

Définition 26

On appelle espace probabilisable lié à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ le couple $(\Omega, \mathcal{B})$ où Ω est l'univers des résultats de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu des événements liés à $\mathcal{E}$.

Un cas particulier très important : Si Ω est un ensemble fini ou infini dénombrable, la tribu des événements est nécessairement égale à $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier.

Remark 4.4

Importante

Si $\Omega = \mathbb{R}$ on considère toujours la tribu Borélienne $\mathcal{B}$ (engendrée par les ouverts $] -\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$) et ne peut pas prendre $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. L'inclusion $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ étant stricte puisqu'il y a des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des boréliens (la construction de telles parties fait appel à l'axiome de choix).

4.2 Probabilité : le modèle axiomatique de Kolmogorov

4.2.1 Un essai de justification

Il s'agit d'affecter à chaque événement A un poids $P(A)$ indiquant sa "chance" d'être réalisé si l'on effectue l'expérience aléatoire.

Des considérations relatives à l'expérience peuvent conduire, dans le cas où Ω est fini, à affecter des poids de probabilité identiques à chaque événement élémentaire (Probabilité de Laplace 19^{ème} siècle) : ce sera l'**hypothèse d'équiprobabilité**. Par exemple lorsqu'on jet un dé non pipé (équilibré), que l'on tire des cartes dans un jeu bien battu, que l'on prélève des boules indiscernables au toucher ...

Une autre approche est l'approche "**fréquentiste**" : on se donne un événement fixé A , on répète n fois l'expérience aléatoire et on note n_A le nombre de fois où l'événement A a été réalisé. Le rapport $f_A = \frac{n_A}{n}$ est la fréquence statistique de la réalisation de A au cours de ces n répétitions. On démontrera que, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{n_A}{n}$ fluctue de moins en moins autour d'une valeur limite (c'est la loi faible des grands nombres de Jacques Bernoulli) appelée fréquence de réalisation de A . Une approche intuitive de ce que pourrait être la "probabilité" $p(A)$ de l'événement A consiste à considérer la valeur $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$. Mais il est hors de question de "calculer" une telle limite.

Prenons l'exemple suivant d'une pièce de monnaie :

Exemple 4.5

Si nous effectuons n lancers de la pièce et que n_F représente le nombre de fois où la pièce donne face, alors nous pouvons, pour n'importe quel n , considérer la proportion $\frac{n_F}{n}$. À mesure que n devient de plus en plus grand, nous nous attendons à ce que le rapport $\frac{n_F}{n}$ devienne de plus en plus proche de $\frac{1}{2}$. Cela suggère de définir la probabilité $P(F)$ d'obtenir face comme :

$$P(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_F}{n}.$$

L'approche fréquentiste se limite à des expériences aléatoires aisément répétable et dans des conditions identiques.

Cependant, l'application f vérifient les propriétés élémentaires suivantes :

1. Pour tout événement A , $f_A = \frac{n_A}{n} \in [0, 1]$
2. $f_\Omega = 1$
3. Si A et B sont deux événements incompatibles alors on a $n_{A \cup B} = n_A + n_B$ et donc $f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

Par analogie avec ces trois propriétés de la fréquence, on définit ce qu'est une probabilité de manière purement axiomatique (présentation due à Kolmogorov), sans référence à une quelconque observation de la réalisation de l'expérience aléatoire.

4.2.2 Définition et exemples

Définition 27

Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$ toute application $P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant aux axiomes suivants :

- (i) $P(\Omega) = 1$ (totalité)
- (ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles (i.e. $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) : $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ (σ -additivité)

Le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ porte alors le nom d'espace probabilisé.

Exemple 4.6

Soient $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable et $x \in \Omega$. L'application

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est une probabilité.

Remark 4.7

P n'est pas déterminée de façon unique par le couple $(\Omega, \mathcal{B})$. Par exemple si l'on jette une pièce de monnaie normale ou si l'on jette une pièce truquée, l'espace probabilisable est le même dans les deux cas : $\Omega = \{P, F\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$. Mais l'espace probabilisé ne sera pas le même. Nous verrons que dans le premier cas on est conduit à prendre $P(\{P\}) = P(\{F\}) = \frac{1}{2}$, et dans le deuxième cas $P(\{P\}) = p$ et $P(\{F\}) = 1 - p$.

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Alors on a

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $\forall A \in \mathcal{B}, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{B}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (croissance de P).
5. $\forall A, B \in \mathcal{B}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (additivité forte).

1. Supposons que $P(\emptyset) > 0$ et considérons la suite $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \emptyset$. La somme $\sum_{n=0}^{\infty} P(\emptyset)$ ne pourrait converger car son terme général ne tend pas vers zéro et la σ -additivité donne $]0, 1] \ni P(\emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\emptyset) = +\infty$. Ce qui est impossible. Donc $P(\emptyset) = 0$.

Autre preuve : $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$.

2. On a $\Omega = A \cup \bar{A}$, la réunion étant disjointe. Ainsi, $1 = P(A) + P(\bar{A})$.
3. Il suffit d'écrire $B = A \cup B \setminus A$, la réunion est disjointe. $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.
4. D'après 3. $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.
5. D'une part $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$, et la seconde réunion est disjointe. D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$. D'autre part $B = (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)$ réunion disjointe. Donc $P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(B \cap A)$.

4.2.3 L'hypothèse d'équiprobabilité, probabilité uniforme

Considérons l'épreuve du jet d'un dé non pipé. Puisque le dé est non truqué toutes les faces ont la même chance de sortir. On définit sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la probabilité P satisfaisant l'hypothèse d'équiprobabilité :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}).$$

Comme $P(\Omega) = 1$ on en déduit que $P(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soit l'événement A : "avoir un nombre pair". On a $A = \{2, 4, 6\}$ et par suite

$$P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

D'où le théorème, historiquement fondamental, suivant

Theorem 4.8

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. L'hypothèse d'équiprobabilité (i.e. tous les événements élémentaires ont la même chance d'être réalisé) définit une probabilité P unique, donnée par

$$\forall A \subset \Omega, \quad P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On dit alors que la probabilité P est uniforme et que tous les événements sont équiprobables. En fait, en pratique

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre total de cas possibles}}$$

La relation dans le théorème précédent va nous permettre de calculer enfin des probabilités en se servant de toutes les techniques de dénombrement décrites dans le chapitre précédent.

Remark 4.9

Comme on l'a signalé avant, il ne faut pas croire que sur un espace probabilisable fini on ne définit que la probabilité uniforme. Ce pendant on peut définir des probabilités qui ne sont pas uniformes. Considérons le jet d'une pièce de monnaie truquée telle que $P(F) = \frac{1}{3}$ et $P(P) = \frac{2}{3}$. Alors P est une probabilité non uniforme définie sur l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec $\Omega = \{F, P\}$.

Example 4.10

On effectue un tirage successif sans remise de 2 boules, indiscernables au toucher, d'une urne qui contient 3 boules rouges et 5 boules vertes. Calculer les probabilités d'avoir :

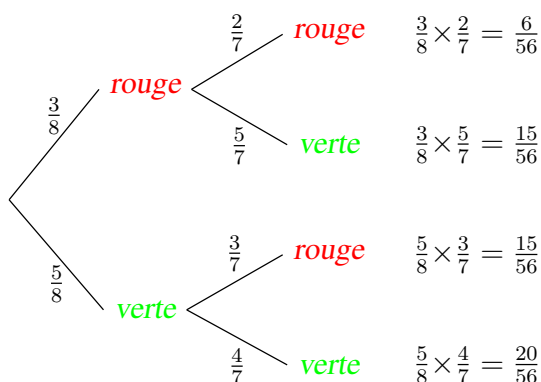
A : "2 boules rouges"

B : "2 boules de même couleur"

Puisque qu'on a un tirage successif sans remise, toute tirage possible est un arrangement de 2 éléments parmi 8. L'univers des éventualités Ω compte $\text{Card}(\Omega) = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$ éléments. On a $\text{Card}(A) = A_3^2 = 6$ et $\text{Card}(B) = A_3^2 + A_5^2 = 26$.

Comme l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite, on a $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{56}$ et $P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{26}{56}$.

On peut aussi calculer ces probabilités en utilisant l'arbre des éventualités suivant :



4.3 Conditionnement et indépendance

Les concepts de probabilité conditionnelle et d'indépendance sont définis explicitement par Abraham De Moivre³. On lui doit également un énoncé clair et précis de la formule des probabilités composées.

4.3.1 Probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle est la plus importante de toute la théorie des probabilités. Elle s'introduit en particulier à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire une

3. Abraham de Moivre (né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François - mort le 27 novembre 1754 à Londres) est un mathématicien français.

information partielle de "dernière minute" est fournie à l'expérimentateur. Prenons l'exemple du jet de deux dés parfaits et soit l'événement

A : " la somme des points obtenus est au moins égale à 10".

Il est clair que $P(A) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$.

1. Supposons que le 1^{er} dé amène un 3 (événement B), face à cette situation l'expérimentateur sait que A est irréalisable (A et B sont incompatibles). Nous dirons que la probabilité de A sachant que B est réalisé est nulle et nous écrivons $P(A/B) = 0$, qui se lit "probabilité de A sachant B ".
2. Supposons maintenant que le 1^{er} dé amène un 6 (événement C), pour avoir au moins 10 il faut que le 2^{ème} dé amène 4, 5 ou 6. Il y a trois chances parmi 6. Nous écrivons $P(A/C) = \frac{3}{6}$.

Définition 28

Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle. Soit A un événement quelconque. On appelle probabilité de A sachant que B est réalisé, le nombre noté $P(A/B)$ ou encore $P_B(A)$ défini par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Remark 4.11

- (i) $0 \leq P(A/B) \leq 1$.
- (ii) L'application $A \mapsto P(A/B)$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$.
 - $P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$ si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
 - $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$.

Cas particulier de l'équiprobabilité :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, P est la probabilité uniforme et B un événement de probabilité non nulle distinct de Ω . Alors on a

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)}}{\frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}.$$

Soit $w \in \Omega$. On a

$$\begin{aligned} P(\{w\}/B) &= \frac{1}{\text{Card}(B)} & \text{si } w \in B \\ P(\{w\}/B) &= 0 & \text{si } w \notin B \end{aligned}$$

La probabilité $P(\cdot/B)$ n'est donc pas uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exemple 4.12

On extrait sans remise 2 cartes d'un jeu de 32. La première carte tirée est un roi. Quelle est la probabilité que la 2^{ème} carte soit aussi un roi ?

On considère les deux événements

R_1 : " la 1^{ère} carte tirée est un roi"

et

R_2 : " la 2^{ème} carte tirée est un roi".

Il s'agit de calculer $P(R_2/R_1)$.

$$P(R_2/R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{A_4^2}{A_{32}^2}}{\frac{4}{32}} = \frac{3}{31}.$$

Soient A et B deux événements tels que :

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $P(\bar{A}/\bar{B})$.

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{3}{4}.$$

Remark 4.13

On écrit souvent la probabilité conditionnelle de la manière suivante :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B).$$

*Cette formule s'appelle **formule des probabilités composées** et c'est sous cette forme que le conditionnement sera le plus souvent utilisé. En fait dans un problème de calcul des probabilités on pressentira la valeur de $P(A/B)$ ce qui fournira le calcul de $P(A \cap B)$.*

Considérons deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ contenant chacune initialement 2 boules noires et 3 boules blanches toutes indiscernables au toucher. On tire une boule de l'urne $\mathcal{U}_1$, on note sa couleur et on la remet dans l'urne $\mathcal{U}_2$. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule noire ? Considérons les deux événements :

N_1 : "la boule tirée de $\mathcal{U}_1$ est noire" et N_2 : "la boule tirée de $\mathcal{U}_2$ est noire".

Il s'agit donc de calculer $P(N_1 \cap N_2)$. On a $P(N_1) = \frac{2}{5}$ et sachant qu'on a tiré une boule noire de $\mathcal{U}_1$, l'urne $\mathcal{U}_2$ va contenir 3 boules noires donc $P(N_2/N_1) = \frac{3}{6}$. D'après la formule des probabilités composées, on a

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P(N_2/N_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{5}.$$

Le théorème suivant constitue une généralisation de la formule des probabilités composées.

Theorem 4.14

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé tels que :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Alors on peut écrire :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Example 4.15

Soit une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules

de l'urne. Quelle est la probabilité que la 1^{ère} boule tirée soit blanche, la 2^{ème} blanche et la 3^{ème} noire ?

— Avec le conditionnement : Notons B_i l'événement "la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche" et N_i l'événement "la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire". Il s'agit de calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2/B_1)P(N_3/B_1 \cap B_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}.$$

— Par calcul directe :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{A_4^2 A_3^1}{A_7^3} = \frac{6}{35}.$$

4.3.2 La formule des probabilités totales

Theorem 4.16

Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ une famille d'événements telle que $\Omega = A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ et $P(A_i) > 0$. Si $B \in \mathcal{B}$ alors on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)$$

Remark 4.17

Dans le cas particulier $\Omega = A \cup \bar{A}$, $A \in \mathcal{B}$ avec $P(A) > 0$, la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A}).$$

C'est sous cette forme qu'elle sera le plus souvent utilisée.

Example 4.18

On considère une urne $\mathcal{U}_1$ contenant 2 boules blanches et une boule noire et une urne $\mathcal{U}_2$ contenant une boule blanche et une boule noire toutes indiscernables au toucher. On choisit une urne au hasard puis on prélève une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

On considère les événements suivants :

$$\begin{aligned} A_i &: \text{"avoir l'urne } \mathcal{U}_i \text{"} \quad i \in \{1, 2\}. \\ B &: \text{"avoir une boule blanche"}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'univers des éventualités est $\Omega = A_1 \cup A_2$, cette réunion est disjointe et on a $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$. La formule des probabilités totales nous permet d'écrire

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

4.3.3 La formule de Bayes

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. En utilisant le conditionnement, nous pouvons écrire

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A).$$

Nous en déduisons

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}.$$

Alors, on a la propriété suivante : Formule de Bayes⁴.

Soit $(A_i)_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$ une partition de Ω (i.e. $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et $\forall i \neq j \ A_i \cap A_j = \emptyset$). Soit B un événement.

Alors on a

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)}.$$

Exercice

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$. On lance le dé et on obtient 6. On relance alors ce dé et on obtient à nouveau 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

1. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. On relance alors ce dé et on obtient à nouveau 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
3. On relance alors ce dé n fois et on obtient à chaque lancer 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
4. Déduire le comportement de cette probabilité quand n devient assez grand. Le résultat est-il étonnant ?

On considère l'événement T : "le dé est pipé". On a $\Omega = T \cup \bar{T}$ et $T \cap \bar{T} = \emptyset$.

1. Soit l'événement S_1 : "obtenir 6 au 1^{er} lancer". Il s'agit de calculer $P(T/S_1)$. D'après la formule de Bayes on a

$$P(T/S_1) = \frac{P(T)P(S_1/T)}{P(T)P(S_1/T) + P(\bar{T})P(S_1/\bar{T})}.$$

Or $P(T) = \frac{1}{4}$, $P(\bar{T}) = \frac{3}{4}$, $P(S_1/T) = \frac{1}{2}$ et $P(S_1/\bar{T}) = \frac{1}{6}$. Ainsi, on a

$$P(T/S_1) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.$$

2. Soit l'événement S_2 : "obtenir 6 au 2^{ème} lancer". Il s'agit de calculer $P(T/S_2)$. De la même façon on obtient

$$P(T/S_2) = \frac{P(T)P(S_2/T)}{P(T)P(S_2/T) + P(\bar{T})P(S_2/\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^2}} = \frac{3}{4}.$$

3. Soit l'événement S_n : "obtenir 6 au $n^{\text{ème}}$ lancer". Il s'agit de calculer $P(T/S_n)$. On a de même

$$P(T/S_n) = \frac{P(T)P(S_n/T)}{P(T)P(S_n/T) + P(\bar{T})P(S_n/\bar{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(T/S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}} = 1$. Le résultat n'est pas étonnant puisque

$$P(T/S_1) < P(T/S_2) < \dots < P(T/S_n) < 1.$$

4. Thomas Bayes 1702 Londres-1761 Tunbridge Wells.

4.3.4 Indépendance de deux événements :

La notion de l'indépendance traduit le fait que la réalisation d'un événement n'a pas d'influence sur la réalisation d'un autre.

Définition 29

Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ sont dits (stochastiquement) indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remark 4.19

- (i) L'indépendance est une relation symétrique entre les événements.
- (ii) Si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$ alors A et B sont indépendants.
- (iii) A ne pas confondre indépendance ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$), et incompatibilité ($A \cap B = \emptyset$), d'ailleurs l'indépendance est une notion qui dépend de la probabilité et donc s'exprime dans $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, alors que l'incompatibilité est la disjonction des événements et s'exprime donc dans $(\Omega, \mathcal{B})$.

Example 4.20

On jette un dé équilibré. L'univers des éventualités est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est l'espace probabilisé, P étant la probabilité uniforme. Soient les événements suivant : $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$ et $C = \{5\}$. On a immédiatement :

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(A \cap C) = 0 \text{ et } P(B \cap C) = \frac{1}{6}.$$

On en déduit que A et B sont indépendants, mais B et C ainsi que A et C ne le sont pas.

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A et B sont indépendants
- (ii) A et $\overline{B}$ sont indépendants
- (iii) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants
- (iv) $\overline{A}$ et B sont indépendants

Preuve

Elle basée sur la relation $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ où la réunion est disjointe.

(i) $\Rightarrow$ (ii) la relation $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ et l'additivité nous permettent d'écrire

$$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A)P(B).$$

Ce qui implique

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Il suffit d'écrire $\overline{B} = (\overline{B} \cap \overline{A}) \cup (\overline{B} \cap A)$. Ainsi, $P(\overline{B}) = P(\overline{B} \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap A)$. Ce qui implique

$$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) On a $\bar{A} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. D'où $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(\bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$. Par conséquent, on a

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) On a $B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ ce qui implique $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(\bar{A})P(B) + P(A \cap B)$. Ainsi, on a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

4.3.5 Indépendance de n événements :

Définition 30

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

(i) On dit que ces événements sont deux à deux indépendants si

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i < j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

(ii) On dit que ces événements sont mutuellement indépendants si pour toute partie J de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remark 4.21

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance des événements deux à deux et la réciproque est fautive comme le montre les deux exemples suivants :

Example 4.22

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. On considère les événements suivants :

- A : "le premier jet a donné pile".
- B : "la deuxième jet a donné pile".
- C : "les deux jets ont donné le même résultat".

L'univers des éventualités est $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$ et P est la probabilité uniforme. On a

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} \text{ et } P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

les événements A , B et C ne sont pas mutuellement indépendants c'est à dire

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$$

mais ils sont deux à deux indépendants.

4.4 Variables aléatoires

4.4.1 Définition et exemples

Définition 31

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle (en raccourci v.a.r) toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :
 Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est un événement de Ω (il aura donc une probabilité).

Remark 4.23

1. Soit A une partie qui est la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrable d'intervalles, alors $X^{-1}(A)$ est aussi la réunion ou l'intersection d'un ensemble dénombrables d'événements. Comme $\mathcal{B}$ est une tribu, $X^{-1}(A)$ est encore un événement. A s'appelle un borélien de $\mathbb{R}$, l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ forme la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ appelée tribu des boréliens.
2. Si Ω est un ensemble discret (fini ou infini dénombrable) alors $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une v.a.r, ce sera pour nous le cas le plus fréquemment rencontré.

Exemple 4.24

1. On lance une pièce de monnaie, l'univers associé est $\Omega = \{F, P\}$. L'application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(F) = 0$ et $X(P) = 1$ est une v.a.r. L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
2. Étant donné un événement $A \in \mathcal{B}$. On appelle fonction indicatrice de l'événement A , la fonction notée $\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

La fonction $\mathbb{1}_A$ est une v.a.r. Soient A et B deux événements. Montrer que :

1. $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
2. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
3. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$
3. On jette deux dés. On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. On considère les deux applications :

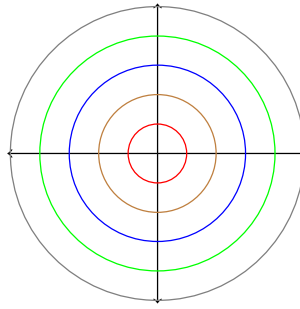
$$\begin{array}{ll} X : \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto a + b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} Y : \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont impairs} \\ 1 & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont pairs} \\ 2 & \text{si non} \end{cases} \end{array}$$

X et Y sont deux v.a.r.

4. On considère le jet d'une fléchette. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2$, l'application

$$\begin{array}{ll} X : \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

est une v.a.r, c'est la distance du point d'impact à l'origine.



Notations Il est d'usage en probabilité d'adopter les notations suivantes :

$$\begin{aligned} X^{-1}(\{a\}) &= \{w \in \Omega : X(w) = a\} & \text{se note } X = a \\ X^{-1}(]-\infty, a]) &= \{w \in \Omega : X(w) \leq a\} & \text{se note } X \leq a \\ X^{-1}(]a, +\infty[) &= \{w \in \Omega : X(w) > a\} & \text{se note } X > a \\ X^{-1}([a, b]) &= \{w \in \Omega : a \leq X(w) < b\} & \text{se note } a \leq X < b. \end{aligned}$$

4.4.2 Variables aléatoires réelles discrètes

Définition 32

Une v.a.r $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *discrète* si l'ensemble de ses valeurs $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

Exemple 4.25

1. Jet d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{F, P\}$. Soit la v.a.r $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(F) = 1$ et $X(P) = 0$. On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et donc X est discrète.
2. Jet d'une pièce de monnaie deux fois : $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$. Soit la v.a.r $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(w) = \text{nombre de fois pile}$. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et donc X est discrète.
3. Dans l'exemple 4.17 la v.a.r

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

n'est pas discrète.

Définition 33

Soit X une v.a.r discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. L'application

$$\begin{aligned} f : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto f(x) = P(X = x) \end{aligned}$$

s'appelle la *loi de probabilité de X* (on dit aussi la *distribution* ou la *densité de X*).

La loi de probabilité d'une v.a.r discrète X est en général donnée sous forme d'un tableau. Si $X(\Omega)$ est fini alors on pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la loi de X est

$X(\Omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\dots$	$P(X = x_k)$	$\dots$	$P(X = x_n)$

Exemple 4.26

1. On considère le jet d'une pièce de monnaie. L'univers des éventualités est $\Omega = \{F, P\}$. La loi de probabilité de la v.a.r $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(F) = 1$ et $X(P) = 0$ est donnée par le tableau suivant :

$X(\Omega)$	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. Jet d'une pièce de monnaie deux fois : $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$. Soit la v.a.r $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $X(w) = \text{nombre de fois pile}$. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

$X(\Omega)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Remarquons que si X est une v.a.r discrète et f sa loi de probabilité, alors

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1.$$

En effet, on peut écrire $\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$ et cette réunion est disjointe et dénombrable (car $X(\Omega)$ est dénombrable). En appliquant la σ -additivité on a

$$1 = P(\Omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x).$$

Toute application f positive sur une partie dénombrable A de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui vérifie $\sum_{x \in A} f(x) = 1$, peut être considérée comme la loi de probabilité d'une v.a.r discrète dont l'ensemble des valeurs prises est A . Soit X une v.a.r discrète. Posons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, en convenant de poser $P(X = x_i) = 0$ pour i assez-grand dans le cas où $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Définition 34

On dit que X possède une espérance mathématique si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente (i.e. si la série $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| P(X = x_i)$ est convergente). On appelle alors l'espérance mathématique de X , le nombre réel noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$$

Remark 4.27

Si $X(\Omega)$ est fini, X possède toujours une espérance mathématique.

Définition 35

Soit X une v.a.r discrète ayant une espérance mathématique $E(X)$. Alors, avec les notations précédentes,

on appelle variance de X le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par

$$V(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

sous réserve de convergence de cette série.

Si X admet une variance $V(X)$, alors on appelle écart-type de X le nombre réel positif $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Remark 4.28

1. Si $X(\Omega)$ est fini alors X possède toujours une variance.
2. Une v.a.r discrète ayant une espérance peut ne pas admettre une variance

Example 4.29

On lance un dé équilibré. On propose le jeu suivant : on réalise un gain nul si l'on obtient 1, un gain de 1DH si l'on obtient 2, 3 ou 4 et un gain de 2DH si le résultat est 5 ou 6. Soit X la v.a.r égale au gain obtenu.

1. Donner la loi de probabilité de X .
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

L'univers associé est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'espace probabilisable est $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ avec P la probabilité uniforme.

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

$X(\Omega)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

- 2.

$$E(X) = \sum_{i=0}^2 i P(X = i) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} = \frac{7}{6} \simeq 1.16.$$

$$V(X) = \sum_{i=0}^2 (i - 1.16)^2 P(X = i) \simeq 0.472.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 0.687.$$

Soit X une v.a.r discrète ayant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$.
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Par conséquent, Si X est une v.a.r discrète ayant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$ alors en posant $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$, on a

$$E(X^*) = 0 \quad \text{et} \quad V(X^*) = 1.$$

On dit alors que X^* est la v.a.r centrée réduite associée à X . Soient X une v.a.r discrète ayant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $E((X - a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2$ (Théorème de Kœnig-Huyghens).
2. En déduire que : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

1.

$$\begin{aligned}
E((X - a)^2) &= \sum_{i=0}^n (x_i - a)^2 P(X = x_i) = \sum_{i=0}^n (x_i - E(X) + E(X) - a)^2 P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=0}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) + 2(E(X) - a) \underbrace{\sum_{i=0}^n (x_i - E(X)) P(X = x_i)}_{=0} \\
&\quad + (E(X) - a)^2 \underbrace{\sum_{i=0}^n P(X = x_i)}_{=1} \\
&= V(X) + (E(X) - a)^2.
\end{aligned}$$

2. Il suffit de prendre $a = 0$.

4.4.3 Fonction de répartition

Définition 36

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(X \leq x).$$

Exemple 4.30

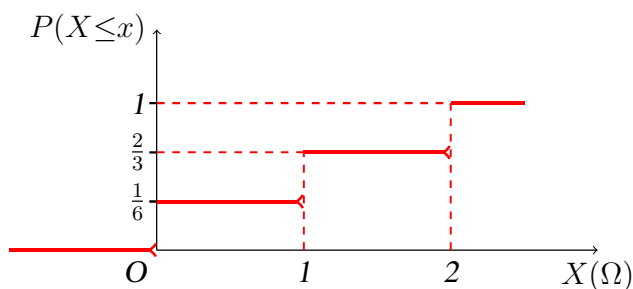
On reprend l'exemple 4.20

$X(\Omega)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

La fonction de répartition de X est :

- Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leq x) = 0$
- Si $0 \leq x < 1$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{6}$
- Si $1 \leq x < 2$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{6}$
- Si $x \geq 2$ alors $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$.

La représentation graphique de la fonction F est :



Soit X une v.a.r et F sa fonction de répartition. Alors F possède les propriétés suivantes :

1. F est croissante.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
3. F est continu à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
4. F a une limite à gauche en tout point x de $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t) = P(X = x).$$

En particulier, en tout point x_0 où F est continue, on a $P(X = x_0) = 0$.

Theorem 4.31

Tout fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle que

1. F est croissante.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
3. F est continue à droite.

est la fonction de répartition d'une v.a.r X .

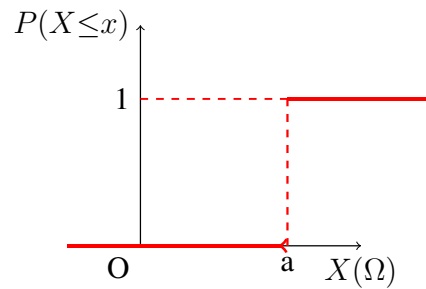
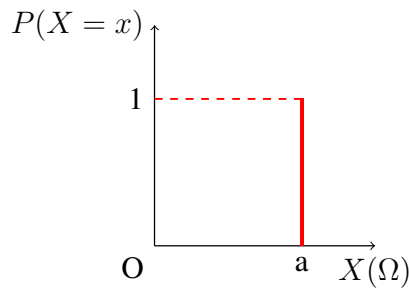
4.5 Lois discrètes classiques

4.5.1 Loi certaine

Définition 37

On appelle variable certaine, une v.a.r X constante. Autrement dit, il existe un nombre réel a tel que $X(\Omega) = \{a\}$. Par conséquent, $P(X = a) = 1$.

On vérifie aisément que $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.



4.5.2 Loi uniforme

Définition 38

On dit qu'une v.a.r X suit une loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, si on a :

1. $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
2. $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, P(X = k) = \frac{1}{n}$.

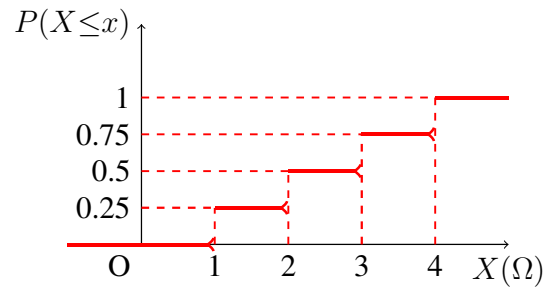
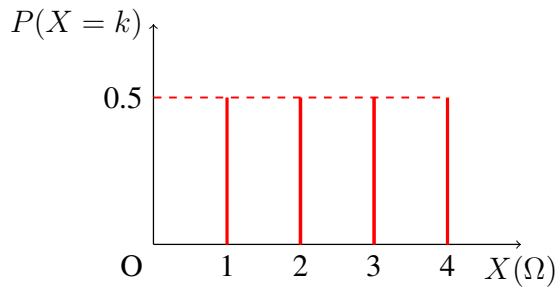
On écrit alors : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_n$.

Le modèle probabiliste : On choisit au hasard (i.e. avec équiprobabilité) un objet parmi n numéroté de 1 à n et on appelle X le numéro de l'objet choisi (pièce de monnaie, dé, ...).

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2}.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_4$ alors les figures suivantes représentent la loi de probabilité et la fonction de répartition de X .



4.5.3 Loi de Bernoulli

Définition 39

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une v.a.r X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
2. $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

On note alors : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ ou $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Le modèle probabiliste : On lance une pièce où la probabilité d'amener pile (succès) est $p \in]0, 1[$.

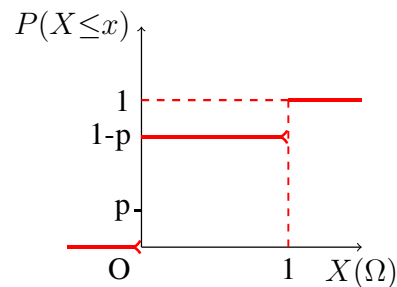
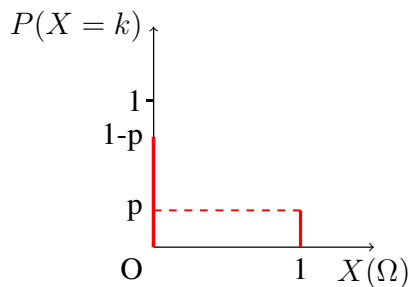
X est également le nombre de boules blanches obtenues en effectuant un tirage d'une boule **avec remise** dans une urne contenant une proportion p de boules blanches.

Une variable de Bernoulli illustre plus généralement toute expérience n'ayant que deux issues possibles et effectuée une seule fois.

$$E(X) = 0(1-p) + 1 \times p = p.$$

$$V(X) = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2p = p(1-p).$$

Représentation graphique :



4.5.4 Loi binomiale

Définition 40

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r X suit la loi binomiale de paramètres n et p si

1. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.
2. $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

On note alors : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ ou $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Le modèle probabiliste :

1. On considère une urne contenant deux catégories de boules : des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. Soit l'expérience aléatoire qui consiste à tirer n boules **avec remise** de cette urne. On appelle X le nombre de boules blanches obtenues au cours de ce tirage de n boules.
2. répéter n fois une expérience aléatoire dont le résultat se traduit par l'apparition (le succès) ou la non apparition (l'échec) d'un événement A de probabilité p ($p \in]0, 1[$).

Remark 4.32

1. $\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = 1$ (Formule du binôme).
2. Une variable de Bernoulli, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$, est une variable binomiale de paramètres 1 et p .
3. Toute variable binomiale $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors on a

1. $E(X) = np$.
2. $V(X) = np(1 - p)$.

Preuve

1.

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

or

$$k C_n^k = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n C_{n-1}^{k-1}.$$

Ainsi, on a

$$E(X) = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1 - p)^{n-1-k} = np.$$

2. d'après la formule de Kœnig-Huyghens, on a

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1) + X) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2$$

Pour $n \geq 2$, on écrit

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Or

$$k(k-1)C_n^k = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k p^k (1-p)^{n-2-k} \\ &= n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

Si $n = 1$ alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$ et on sait que $V(X) = p(1-p)$.

Remark 4.33

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $n - X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, q = 1 - p)$. En fait,

$$P(n - X = k) = P(X = n - k) = C_n^{n-k} p^{n-k} (1-p)^k = C_n^k (1-p)^k p^{n-k},$$

le succès pour X est l'échec pour $n - X$. C'est pourquoi les tables de la loi binomiale se limitent au cas où $p \leq 0.5$.

Example 4.34

Une urne contient 6 boules rouges et 5 boules noires indiscernables au toucher. On tire 10 fois successivement une boule avec remise. Quelle est la loi du nombre de boules rouges obtenues ?

$\Omega = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme. Le succès ici est "obtenir une boule rouge". Soit $S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$, on a $P(S) = \frac{6}{11}$. Soit X la v.a.r prenant pour valeur le nombre de rouges obtenues. Alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10, \frac{6}{11})$.

Soient X_1 et X_2 deux variables binomiales telles que $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.

Montrer que si X_1 et X_2 sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

4.5.5 Loi de poisson

Définition 41

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une v.a.r X suit la loi de Poisson de paramètre λ si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Remark 4.35

1. On vérifie facilement que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
2. La loi de Poisson est la "loi limite" d'une loi binomiale lorsque np reste constant et n tend vers $+\infty$.
En effet, soit $\lambda = np$. On considère une v.a.r X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad P(X = k) &= C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} e^{(n-k) \log(1 - \frac{\lambda}{n})} \\ &\longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

La loi de Poisson apparaît donc lorsque l'on compte le nombre de succès au cours d'un nombre d'épreuves très élevé, avec une probabilité p du succès très faible : c'est la loi des "événements rares".

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors on a

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

On a bien la convergence des séries qui suivent (par la règle de D'Alembert par exemple).

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Pour la variance, on calcule

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k(k-1) + k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda.$$

Exemples d'application

- Nombre de véhicules franchissant un poste de péage pendant une période de durée T .
- Nombre d'appels téléphoniques reçus par un standard pendant une période de durée T .
- Nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, la production étant de bonne qualité.
- Nombre d'accidents pendant une période de durée T .
- Nombre d'œufs pondus au cours d'une ponte par certaines espèces animales.

4.5.6 Loi géométrique, temps d'attente

Définition 42

On dit qu'une v.a.r X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si on a

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

2. $\forall k \in \mathbb{N}^* : P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$.

Modèle probabiliste :

En pratique, la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est suivie par une v.a.r X si :

1. X = le nombre de lancers nécessaires d'une pièce de monnaie pour avoir la 1^{ère} apparition de "face" avec p = la probabilité d'avoir "face" ($\frac{1}{2}$ si la pièce est équilibrée). Les lancers sont supposés être indépendants.
2. X = le nombre de tirages nécessaires pour avoir la 1^{ère} apparition d'une boule blanche lorsqu'on fait un tirage avec remise dans une urne contenant la proportion p de boules blanches.

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$. Alors on a

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

La série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ a pour rayon de convergence 1, et on a

$$\forall x \in]-1, 1[: \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Or la somme d'une série entière de rayon R est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et on peut dériver terme à terme, ce qui donne dans notre cas

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Par suite, on a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (k(k-1) + k) p(1-p)^{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k p(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) (1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{p}{p^2}.
\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Lois absolument continues classiques

5.1 Définition et propriétés

5.1.1 Variables continues

Définition 43

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et soit F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une v.a.r absolument continue s'il existe une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe et vaut 1.
4. F_X est liée à f par la relation : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

On dit alors que f est une densité de X .

Remark 5.1

1. La fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f n'est pas unique, en effet si on la modifie en un point on obtient une autre fonction qui satisfait les mêmes propriétés, en fait la valeur des intégrales $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ ne change pas.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R};$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

En particulier, comme F_X est continue on a

$$P(X = a) = F_X(a) - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t) = 0.$$

et de même $P(X = b) = 0$.

Ainsi, $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt$.

Example 5.2

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. $f \geq 0$, continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = 1.$$

Donc f est une densité de probabilité d'une v.a.r X absolument continue. On dit alors que X suit une loi de Laplace.

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $f_a(x) = \frac{a}{\pi x^2 + a^2}$. $f \geq 0$, continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2}dx = \frac{2}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^{+\infty} = 1.$$

Donc f_a est une densité de probabilité d'une v.a.r absolument continue X . On dit que X suit une loi de Cauchy de paramètre a .

3. On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

$f \geq 0$ et discontinue en 0 et 1. De plus, on a

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{4\sqrt{x}}dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{x} \right]_{\epsilon}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}.$$

De même

$$\int_1^A \frac{1}{2x^2}dx = \left[\frac{-1}{2x} \right]_1^A = \frac{-1}{2A} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{quand } A \rightarrow +\infty.$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}dx = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité d'une v.a.r X dont la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

On remarque que la fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit X une v.a.r ayant une densité f . Alors en tout point x_0 où f est continue, la fonction de répartition F_X de X est dérivable et on a

$$F'_X(x_0) = f(x_0).$$

Soit X une v.a.r absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ de densité f . Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, alors $Y = aX + b$ est une v.a.r absolument continue dont une densité g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Supposons d'abord $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on écrit

$$(Y \leq x) = \left(X \leq \frac{x-b}{a}\right),$$

ce qui montre que Y est bien une v.a.r car $(X \leq \frac{x-b}{a})$ est un événement, de plus

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Par dérivation des fonctions composées, on en déduit que F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut être sur un ensemble fini de points I où elle est dérivable à gauche et à droite, et on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus I$

$$F'_Y(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Ce qui montre que l'on peut prendre pour densité de Y la fonction $x \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

Maintenant, si $a < 0$ alors

$$(Y \leq x) = \left(X \geq \frac{x-b}{a}\right),$$

ce qui montre encore que Y est une v.a.r, de plus

$$F_Y = P(Y \leq x) = P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Par conséquent, F_Y est encore dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut être sur un ensemble fini de points I où elle est dérivable à gauche et à droite et on a sur $\mathbb{R} \setminus I$

$$F'_Y = -\frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Ce qui achève la preuve.

5.1.2 Espérance et variance d'une v.a.r à densité

Définition 44

Soit X une v.a.r à densité f . On appelle espérance de X le réel

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

sous réserve de convergence absolue de cette intégrale.

Remark 5.3

C'est l'analogie de l'expression de l'espérance dans le cas discret : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$.

Example 5.4

Soit X une v.a.r absolument continue suivant une loi de Laplace. Une densité de X est $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. On a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0,$$

car la fonction $x \longrightarrow x f(x)$ est impaire.

Linéarité de E .

Soient X et Y deux v.a.r à densité admettant une espérance et soit λ un réel. Alors, $\lambda X + Y$ admet une espérance et on a

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$$

Theorem 5.5

Théorème de transfert

Soient X une v.a.r de densité f et $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $|\phi|f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, $\phi(X)$ possède une espérance et on a

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx$$

Définition 45

Soit X une v.a.r de densité f . On appelle moment d'ordre 2, l'espérance, si elle existe, de X^2 soit

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Définition 46

Soit X une v.a.r absolument continue de densité f . On appelle variance de X l'espérance, si elle existe, de la variable $(X - E(X))^2$, soit

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

Remark 5.6

On a aussi

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

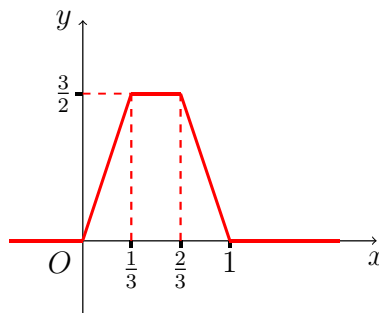
Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \\ \frac{9}{2}x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{3}{2} & \text{si } x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ -\frac{9}{2}(x-1) & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Montrer que f est la densité d'une v.a.r absolument continue X . Calculer son espérance et sa variance.
 $f \geq 0$, continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{2}x dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{-9}{2}(x-1) dx = 1.$$

Donc f est la densité d'une v.a.r absolument continue X .



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{2}x^2 dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}x dx - \frac{9}{2} \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{3}{2}(x^2 - x) dx = \frac{25}{36} \simeq 0.6944.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{2}x^3 dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}x^2 dx - \frac{9}{2} \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{3}{2}(x^3 - x^2) dx = \frac{20}{27}.$$

Ainsi,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \simeq 0.258.$$

5.2 Lois absolument continues classiques

5.2.1 Loi uniforme

Définition 47

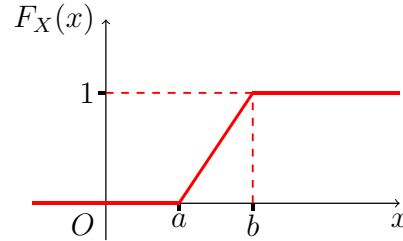
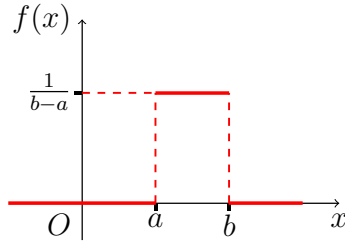
Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On dit que X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$, $a < b$, si X est absolument continue et admet comme densité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

(i.e. $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$). Nous écrivons alors $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$.

La fonction de répartition est alors définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$



Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors on a

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

D'où

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5.2.2 Loi exponentielle

Définition 48

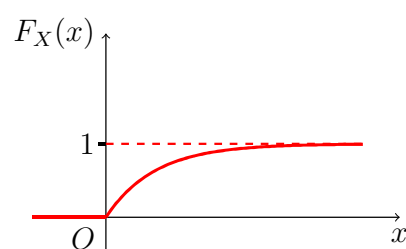
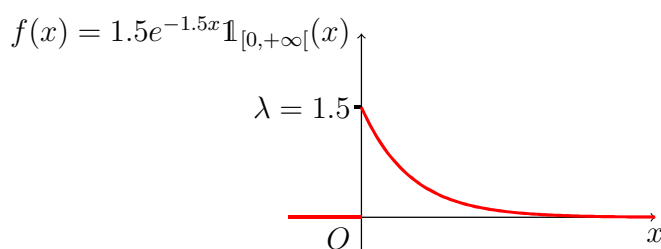
Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si X est absolument continue et admet comme densité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Nous écrivons alors $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

La fonction de répartition est alors définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Si $X \leadsto \mathcal{E}(\lambda)$ alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. On rappelle que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Une intégration par partie permet d'avoir

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{-2}{\lambda} \left[x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{-2}{\lambda^2} \left[e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Par suite, à l'aide de la formule de Kœnig-Huyghens on obtient

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

5.2.3 Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

C'est une loi fondamentale en probabilité et statistiques. Elle constitue un modèle très utilisé dans plusieurs domaines tels que :

- Variation du diamètre d'une pièce dans une fabrication industrielle.
- La répartition des erreurs de mesure autour de la vraie valeur.

C'est une "loi limite" de caractéristiques liés à un échantillon de grande taille.

Rappelons tout de même la formule fondamentale Intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

On note d'abord que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Soit $a > 0$. Posons

$$I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx.$$

Par le théorème de Fubini on a

$$(I(a))^2 = \int_{[0,a] \times [0,a]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

On effectue un changement de variables en passant en coordonnées polaires en posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$(I(a))^2 = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} - e^{-a^2} \right].$$

Ainsi,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (I(a))^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Soit

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Définition 49

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On dit que X suit la loi normale centrée réduite si elle a pour densité la fonction f définie par :

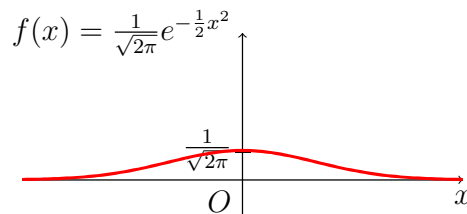
$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Il est facile de voir que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. La courbe de f (dite parfois courbe en cloche) s'appelle courbe de Gauss¹. La loi de probabilité s'appelle la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ ou encore la loi de Gauss de paramètres 0 et 1. La fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

n'a pas d'expression "explicite" à l'aide des fonctions usuelles ; elle est donnée sous forme d'une table numérique. Ci-dessous le graphe de la densité d'une v.a.r $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.



La proposition suivante justifie la tabulation de $F(x)$ seulement pour les valeurs positives de x . Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Alors, on a

1. Johann Carl Friedrich Gauß (traditionnellement transcrit Gauss en français), né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé "le prince des mathématiciens", il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

1. $\forall x \in \mathbb{R}; P(X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - P(X \leq -x)$ i.e. $F(-x) = 1 - F(x)$ et en particulier $F(0) = \frac{1}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+; P(|X| \leq x) = 2F(x) - 1$ et $P(|X| \geq x) = 2(1 - F(x))$.

1.

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1 - \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1 - P(X \leq -x).$$

2.

$$P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = P(X \leq x) - P(X \leq -x) = F(x) - F(-x) = 2F(x) - 1.$$

$$P(|X| \geq x) = 1 - P(|X| \leq x) = 1 - (2F(x) - 1) = 2(1 - F(x)).$$

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$, il existe un réel $A > 0$ tel

que $\forall x > A : x e^{-\frac{1}{2}x^2} < \frac{1}{x^2}$. Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ existe. Par conséquent, X a une espérance.

Sachant que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est impaire, on a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0.$$

De la même façon, $E(X^2)$ existe. Une intégration par partie permet d'avoir

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left[-x e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right] = 1.$$

Ainsi, par la formule de Kœnig-Huyghens on obtient

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.$$

Remark 5.7

Cette propriété explique la notation $\mathcal{N}(0, 1)$; 0 est l'espérance et 1 est son écart-type.

Définition 50

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On dit que X suit la loi normale de paramètres m et σ , ($m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$), si X est v.a.r absolument continue dont une densité est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$.

On dit que X suit une loi de Laplace-Gauss ou encore X est une v.a.r normale ou gaussienne.

Theorem 5.8

Soit X une v.a.r définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors on a

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \iff \frac{X - m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors pour tout réel y

$$P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq y\right) = P(X \leq \sigma y + m) = \int_{-\infty}^{\sigma y + m} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

En posant $t = \frac{X-m}{\sigma}$ on obtient

$$P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq y\right) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

La variable $\frac{X-m}{\sigma}$ a donc pour densité la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$. C'est-à-dire

$$\frac{X - m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Maintenant, si $\frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Alors pour tout réel y , on a

$$P(X \leq y) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{y - m}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{y-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

En posant $x = \sigma t + m$, on trouve

$$P(X \leq y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Ainsi,

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma).$$

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ alors $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \implies \frac{X - m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Par conséquent, comme

$$E\left(\frac{X - m}{\sigma}\right) = 0$$

on a

$$E(X) = m$$

et comme

$$V\left(\frac{X - m}{\sigma}\right) = 1$$

on a

$$V(X) = \sigma^2.$$

Intégrale $F(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{et} \quad F(-t) = 1 - F(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000