UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
FACULTÉ DES SCIENCES ET TÉCHNIQUES-ERRACHIDIA

COURS DE TOPOLOGIE

MODULE M510

Présenté par

Abdellatif SADRATI

FILIÈRE : LST–M.A–S5

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2022-2023

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ESPACES MÉTRIQUES

Dans tout le chapitre, E est un ensemble non vide.

1.1 Notion de distance et d'espace métrique

Définition 1.1.1. *On appelle* ***distance*** *(ou métrique) sur E toute application* $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

(i) Pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation) ;*

(ii) Pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie) ;*

(iii) Pour tous $x, y, z \in E$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire).*

• *On dit alors que* $d(x,y)$ *est la distance de x à y, et* (E,d) *est un* ***espace métrique.***
• *Si la propriété* (i) *est remplacée par :* $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$, *on dit que d est une semi-distance sur E et que* (E,d) *est un espace semi-métrique.*

Exemples 1.1.2. *1)* ***Distance usuelle sur*** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ***ou*** $\mathbb{C}$ ***:*** $d(x,y) = |x-y|$.

2) ***Distance de Manhattan sur*** $\mathbb{R}^2$ ***:*** $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$,

$$d_1(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$

3) ***Distance Euclidienne sur*** $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ ***:*** $x = (x_1, \ldots x_n), y = (y_1, \ldots y_n)$,

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

4) ***Distance de Hölder sur*** $\mathbb{K}^n, n \geq 1, (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ***ou*** $\mathbb{C})$ ***:*** $x = (x_1, \ldots x_n), y = (y_1, \ldots y_n)$ *et* $\alpha \geq 1$,

$$d_\alpha(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

5) Sur $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ *:* $x = (x_1, x_2, \ldots x_n), y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \text{ est une distance.}$$

6) ***Distance discrète :*** *sur tout ensemble non vide E, on peut définir la distance discrète par :* $d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \;\; x = y \\ 1 & si \;\; x \neq y. \end{cases}$

7) ***Distance produit :*** *Soit (E,d) un espace métrique. Pour $(x,y),(x',y') \in E \times E$, l'application*

$$\delta((x,y),(x',y')) = \max\{d(x,x'),d(y,y')\}$$

est une distance sur $E \times E$.

8) *Soit $B(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications bornées de E dans $\mathbb{K}$. Pour $f,g \in B(E,\mathbb{K})$, $d(f,g) = \sup_{x\in E}|f(x)-g(x)|$ est une distance.*

Proposition 1.1.3. *Dans tout espace métrique (E,d) on a les propriétés suivantes.*

a) $\forall (x_1,x_2,...,x_n) \in E^n,\;\; d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+...+d(x_{n-1},x_n)$;

b) $\forall (x,y,x',y') \in E^4,\;\; |d(x,y)-d(x',y')| \leq d(x,x')+d(y,y')$;

c) *Si f est une injection de E dans un espace métrique (E',d'), l'application d définie par $d(x,y) = d'(f(x),f(y))$ est une distance sur E.*

Définition 1.1.4. *Soient (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $r > 0$. On dit que*
- *$B(a,r) = \{x \in E/d(x,a) < r\}$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r ;*
- *$\overline{B}(a,r) = \{x \in E/d(x,a) \leq r\}$ est la boule fermée de centre a et de rayon r ;*
- *$S(a,r) = \{x \in E/d(x,a) = r\}$ est la sphère de centre a et de rayon r.*

Exemples 1.1.5. a) *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a :* $B(a,r) =]a-r,\; a+r[$, $\overline{B}(a,r) = [a-r,\; a+r]$ *et* $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$.

b) *Dans E muni de la distance discrète, pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, on a :*

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & si \; r \leq 1 \\ E & si \; r > 1 \end{cases} \qquad et \;\; \overline{B}(a,r) = \begin{cases} \{a\} & si \; r < 1 \\ E & si \; r \geq 1 \end{cases}$$

Remarque 1.1.6. *Ces ensembles dépendent de l'ensemble E et de la distance d. Par exemple, sur $(\mathbb{R},d)$ avec $d(x,y) = |x-y|$, $B(1,2) =]-1,3[$ alors que sur $([0,3],d)$ on a $B(1,2) = [0,3[$.*

Propriété élémentaire : Si $0 < r < r'$, alors

$$B(a,r) \subset \overline{B}(a,r) \subset B(a,r') \;\text{ et }\; S(a,r) \subset \overline{B}(a,r).$$

1.2 Partie bornée, distance de deux parties

Définition 1.2.1. *On dit qu'une partie A d'un espace métrique E est bornée si elle est contenue dans une boule.*

Comme conséquence, on établit que si $A \subset E$ est une partie bornée alors, pour tout point $a \in E$, il existe une boule de centre a qui contient A.

En effet, si A est bornée, alors A est contenue dans une boule convenable $B(x_0, r_0)$. Si $a \in E$, la boule $B(a, d(a, x_0) + r_0)$ contient A.

Définition 1.2.2. ***Le diamètre*** *d'une partie A de (E, d) est donné par la formule :*

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Proposition 1.2.3. *Une partie A de E est bornée si et seulement si son diamètre est fini.*

Démonstration. Si $\delta(A)$ désigne le diamètre de A, alors pour tout $a \in A$, la boule ouverte $B(a, \delta(A) + 1)$ contient A. Donc A est bornée. Inversement, si A est bornée alors A est contenue dans une boule $B(a, r)$ et on vérifie qu'on a $\delta(A) \leq 2r$. En effet, pour tous $x, y \in A$, on a $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < 2r < +\infty$. □

Définition 1.2.4. *Soit (E, d) un espace métrique.*

1) *Soit A une partie non vide de E. On appelle distance d'un point $x \in E$ à A le nombre positif*
$$d(x, A) = \inf\{d(x,a)/a \in A\}.$$

2) *Soient A et B deux parties non vides de E. On appelle distance de A à B le nombre positif*
$$d(A, B) = \inf\{d(a,b)/a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Remarque 1.2.5. *Si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $d(A, B) = 0$, mais la réciproque n'est pas vraie.*

Définition 1.2.6. *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E.*

- *On dit que A est un ouvert ou A est une partie ouverte de E, si pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.*
- *On dit que A est un fermé ou A est une partie fermée de E, si son complémentaire $\complement_E^A = E \setminus A$ est un ouvert de (E, d).*

Exemples 1.2.7. 1) *Dans $(\mathbb{R}, |.|)$.*

a) $]0,1[$ *et* $]-\infty, 0[$ *sont des ouverts.*

b) $[0,1]$ *et* $[1, +\infty[$ *sont des fermés.*

c) $\mathbb{R}$ *est à la fois ouvert et fermé.*

d) $[0,1[$ *n'est ni ouvert ni fermé.*

2) *Dans un espace métrique (E,d), toute boule ouverte est un ouvert et toute boule fermée est un fermé.*

Remarque 1.2.8. *La notion d'ouvert est un point clé de ce cours. L'ensemble de tous les ouverts de (E,d) s'appelle la topologie de (E,d).*

Proposition 1.2.9. *Soit (E,d) un espace métrique.*

1) *$\varnothing$ et E sont des ouverts de (E,d).*

2) *Une intersection* ***finie*** *d'ouverts est un ouvert de (E,d).*

3) *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert de (E,d).*

Démonstration. 1) est évident.

2) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts de E. Soit $x \in \bigcap\limits_{i\in I} O_i$. Pour chaque $i \in I$, $x \in O_i$ qui est ouvert, donc il existe un nombre $r_i > 0$ tel que la boule $B(x,r_i) \subset O_i$. En posant $r = \min\{r_i, i \in I\}$, on a $r > 0$ (car I est fini) et $B(x,r) \subset \bigcap\limits_{i\in I} O_i$.

3) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E. Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est un ouvert de (E,d), alors il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x,r_0) \subset O_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. □

Attention : Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. En effet, $\bigcap\limits_{n\geq 1}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas un ouvert de $(\mathbb{R},|.|)$.

Proposition 1.2.10. *Soit (E,d) un espace métrique.*

1) *$\varnothing$ et E sont des fermés de (E,d).*

2) *Une intersection quelconque de fermés est un fermé de (E,d).*

3) *Une réunion* ***finie*** *de fermés est un fermé de (E,d).*

Démonstration. Par passage aux complémentaires. □

Définition 1.2.11. *Soient d_1 et d_2 deux distances sur E.*

1) *On dit que d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes, s'il existent $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que, pour tous $x,y \in E$, on a : $\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$.*

2) *On dit que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, si elles définissent les mêmes parties ouvertes.*

1.3 Sous-espace métrique

Définition 1.3.1. *Soit (E,d) un espace métrique et soit A une partie de E. La restriction d_A de d à $A\times A$ est une distance sur A, appelée* ***distance induite*** *sur A. Cette distance fait de A un espace métrique, et (A,d_A) est appelé sous espace métrique de (E,d) (ou tout simplement A est un sous espace métrique de E).*

Remarque 1.3.2. *Si A est une partie de E et si B est une partie de A, alors il faut préciser quand on dira que B est une partie ouverte ou fermée.*

Théorème 1.3.3. *Soit (E,d) un espace métrique et soit A une partie de E. Les assertions suivantes sont vraies.*

a) V est une partie ouverte de A si et seulement s'il existe une partie ouverte U de E tel que $V=U\cap A$.

b) G est une partie fermé de A si et seulement s'il existe une partie fermé F de E tel que $G=F\cap A$.

c) Si A est une partie ouverte de E, alors V est une partie ouverte de A si et seulement si $V\subset A$ et V est une partie ouverte de E.

d) Si A est une partie fermée de E, alors G est une partie fermée de A si et seulement si $G\subset A$ et G est une partie fermée de E.

Démonstration. a) Soient $x\in A$ et $r>0$. Soit $B_A(x,r)=\{y\in A;\ d(x,y)<r\}$. Il est clair que $B_A(x,r)=B(x,r)\cap A$.

$\Rightarrow$) Si $x\in V$, alors il existe un nombre r_x tel que $\{x\}\subset B_A(x,r_x)\subset V$. On a donc,

$$V=\cup_{x\in V}\{x\}\subset\cup_{x\in V}B_A(x,r_x)=(\cup_{x\in V}B(x,r_x))\cap A.$$

D'où $V=U\cap A$, avec $U=\cup_{x\in V}B(x,r_x)$ une partie ouverte de E.

$\Leftarrow$) Soit $x\in V=U\cap A$, avec U une partie ouverte de E. On a $x\in U$, donc il existe un nombre $r>0$ tel que $B(x,r)\subset U$. Il s'ensuit que $B_A(x,r)\subset U\cap A=V$.

b) Par passage aux complémentaires dans a) : G une partie fermée de A $\Leftrightarrow$ $\complement_A^G=A\setminus G$ est une partie ouverte de A $\Leftrightarrow$ il existe une partie ouverte U de E tel que $A\setminus G=U\cap A$ $\Leftrightarrow$ (en posant $F=\complement_E^U$) il existe une partie fermée F de E telle que $G=F\cap A$.

c) $\Rightarrow$) Si V est une partie ouverte de A, alors il existe une partie ouverte U de E telle que $V=U\cap A$ et donc clairement V est une partie ouverte de E.

$\Leftarrow$) On a $V=V\cap A$, et donc V est une partie ouverte de A.

La preuve de d) est identique à celle de c). $\square$

1.4 Limite et continuité dans un espace métrique

Définition 1.4.1. *Soit (E,d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $a \in E$ si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ d(x_n,a) < \varepsilon.$$

Autrement dit $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $a \in E$ si et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,a) = 0$.

Définition 1.4.2. *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to E'$ est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ d(x,x_0) < \eta \implies d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

- *L'application f est continue si elle est continue en tout point $x \in E$.*
- *L'application f est uniformément continue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ d(x,y) < \eta \implies d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.4.3. *1. Pour la continuité uniforme, η dépend uniquement de ε.*

2. Si f est uniformément continue sur E, alors f est continue en tout point de E. Mais la réciproque est fausse.

Définition 1.4.4. *Soit $f : E \to E'$ une application entre deux espaces métriques (E,d) et (E',d'). On dit que f est* ***Lipschitzienne*** *si et seulement s'il existe une constante $k > 0$ telle que :*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ d'(f(x),f(y)) \leq k d(x,y).$$

(Eventuellement on précise : k-lipschitzienne).

Proposition 1.4.5. *Une application lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Immédiate. □

Définition 1.4.6. *On dit que f est une isométrie de (E,d) sur (E',d') si*

1) f est une bijection de E sur E' ;

2) f conserve les distances c-à-d,

$$\forall (x_1,x_2) \in E \times E,\ \text{on a } d'(f(x_1),f(x_2)) = d(x_1,x_2).$$

- *On dit alors que (E,d) et (E',d') sont* ***isométriques.***

Proposition 1.4.7. *Soit f une isométrie de (E,d) sur (E',d'). On a*

1. f^{-1} est une isométrie de (E',d') sur (E,d).

2. f et f^{-1} sont uniformément continues (on dit que f est bi-uniformément continue).

Démonstration. Immédiate. $\square$

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1. *Soit $E=\{a_i/\ i\in\mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable et soit $d: E\times E\to\mathbb{R}^+$ définie par*

$$d(a_i,a_j)=\begin{cases}0 \ \ si \ \ i=j\\ \delta+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+j} \ si \ i\neq j,\end{cases}$$

avec $\delta\in]0,+\infty[$. Montrer que d est une distance sur E.

Solution

(i) $d(a_i,a_j)=0\Leftrightarrow i=j\Leftrightarrow a_i=a_j$.

(ii) $d(a_i,a_j)=d(a_j,a_i)$.

(iii) Soient $a_i,a_j,a_k\in E$. Si deux indices parmi i, j et k coïncident, c'est fini. Sinon, on a

$$\begin{aligned} d(a_i,a_j)=\delta+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+j} &\leq 2\delta+\frac{2}{1+k}+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+j}\\ &= d(a_i,a_k)+d(a_k,a_j). \end{aligned}$$

Exercice 1.5.2. *Soient $(E_i,d_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'espaces métriques et $E=\prod_{i=1}^n E_i$. Pour $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in E$, on note par :*

$$\delta_1(x,y)=\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i),\ \ \delta_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \ et \ \delta_\infty(x,y)=\max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i).$$

1) Montrer que δ_1, δ_2 et δ_∞ sont des distances sur E.

2) Montrer que δ_1, δ_2 et δ_∞ sont métriquement équivalentes.

Solution

Soient $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n), z=(z_1,...,z_n)\in E$.

i) Montrons que δ_1 est une distance. Il est clair que $\delta_1(x,y)=0\Leftrightarrow d_i(x_i,y_i)=0$ $\forall i=1,...,n$, $\Leftrightarrow x_i=y_i\Leftrightarrow x=y$ et $\delta_1(x,y)=\delta_1(y,x)$. Pour l'inégalité triangulaire, on a $d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$. En additionnant terme à terme, on obtient le résultat.

ii) Montrons que δ_2 est une distance. Il est facile de voir que $\delta_2(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ et $\delta_2(x,y)=\delta_2(y,x)$. Pour l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\delta_2^2(x,y) &= \sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n [d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n d_i(x_i,z_i)^2+\sum_{i=1}^n d_i(z_i,y_i)^2+2\sum_{i=1}^n d_i(x_i,z_i)d_i(z_i,y_i).\end{aligned}$$

Comme pour tous $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,...,n)$, $\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, on a

$$\begin{aligned}\delta_2^2(x,y) &\leq \sum_{i=1}^n d_i(x_i,z_i)^2+\sum_{i=1}^n d_i(z_i,y_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n d_i(z_i,y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^n d_i(z_i,y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2.}\end{aligned}$$

D'où $\delta_2(x,y)\leq\delta_2(x,z)+\delta_2(z,y)$.

iii) Il est facile de vérifier que $\delta_\infty(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ et $\delta_\infty(x,y)=\delta_\infty(y,x)$. Pour l'inégalité triangulaire, on a $d_i(x_i,y_i)\leq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$ $(i=1,...,n)$. Il vient que $\max\limits_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i)\leq \max\limits_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,z_i)+\max\limits_{1\leq i\leq n} d_i(z_i,y_i)$. D'où $\delta_\infty(x,y)\leq\delta_\infty(x,z)+\delta_\infty(z,y)$.

2) Pour tous $x,y\in E$, on a : $\delta_\infty(x,y)\leq\delta_1(x,y)\leq n\delta_\infty(x,y)$, donc δ_1 et δ_∞ sont métriquement équivalentes. De même, on a : $\delta_\infty(x,y)\leq\delta_2(x,y)\leq\sqrt{n}\delta_\infty(x,y)$, ce qui montre que δ_2 et δ_∞ sont métriquement équivalentes. On en déduit ensuite par transitivité que δ_1 et δ_2 sont métriquement équivalentes.

Exercice 1.5.3. *Soit $\varphi : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi(x+y)\leq\varphi(x)+\varphi(y)$, pour tous $x,y\in[0,+\infty[$*

1) Montrer que si d est une distance sur un ensemble E, alors $\varphi\circ d$ l'est aussi.

2 Application :

a) Montrer que $d'=\frac{d}{1+d}$ et $d''=\ln(1+d)$ sont deux distances sur E.

b) Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes.

c) Est-ce que d et d' sont métriquement équivalentes.

Solution

1) Soient $x,y\in E$. On a $(\varphi\circ d)(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ et $(\varphi\circ d)(x,y)=(\varphi\circ d)(y,x)$ sont évidentes.

Pour l'inégalité triangulaire, soient $x,y,z \in E$. On a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, donc

$$(\varphi \circ d)(x,y) = \varphi(d(x,y)) \leq \varphi(d(x,z) + d(z,y)) \leq \varphi(d(x,z)) + \varphi(d(z,y)).$$

D'où, $(\varphi \circ d)(x,y) \leq (\varphi \circ d)(x,z) + (\varphi \circ d)(z,y)$.

2) *a*) Soit $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \frac{x}{1+x}$. Alors on a, $\varphi(0) = 0$ et

$$\varphi(x+y) = \frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = \varphi(x) + \varphi(y).$$

De plus, $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \Rightarrow \varphi$ est strictement croissante, donc d' est une distance d'après 1).

Pour d'', on considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \ln(1+x)$. On a aussi $g(0) = 0$, et comme $1+x+y \leq (1+x)(1+y)$ alors

$$\ln(1+x+y) \leq \ln(1+x) + \ln(1+y) \;\Rightarrow\; g(x+y) \leq g(x) + g(y).$$

g est strictement croissante, car $g'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$. On en déduit donc que d'' est une distance.

b) Il est clair que $d' \leq d$, donc tout ouvert pour d' est un ouvert pour d. En effet, soit O un ouvert pour d', alors pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B_{d'}(x,r) \subset O$. Or, $B_d(x,r) \subset B_{d'}(x,r) \subset O$, donc O est ouvert pour d.

Inversement, considérons O un ouvert pour d et montrons qu'il est ouvert pour d'. Soit $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_d(x,r) \subset O$. Prenons $0 < \varepsilon < \frac{r}{1+r}$, alors nous avons $d'(x,z) < \varepsilon < \frac{r}{1+r} \Rightarrow \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} < \varepsilon \Rightarrow d(x,z) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < r \Rightarrow B_{d'}(x,\varepsilon) \subset B_d(x,r)$.

c) Supposons que d et d' soient métriquement équivalentes, alors ils existent $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tous $x,y \in E$, $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$. Si on considère par exemple $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$, alors pour $x > 0$ et $y = 0$, on obtient $\alpha x \leq \frac{x}{1+x} \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{1+x}$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve $\alpha \leq 0$, contradiction. Donc d et d' ne sont pas métriquement équivalentes.

Exercice 1.5.4. *Soit (E,d) un espace métrique.*

1) Montrer que toute boule ouverte est un ouvert de E.

2) Soient A et B deux parties bornées de E. Montrer que $A \cup B$ est bornée avec

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$$

Solution

1) Soit $B(a,r)$ une boule ouverte de E de centre a et de rayon r. On a donc pour tout $x \in B(a,r)$, $d(a,x) < r$. Posons $r_x = r - d(a,x)$ et montrons que $B(x,r_x) \subset B(a,r)$. Pour cela, soit $y \in B(x,r_x)$, donc $d(x,y) < r_x$. Par suite, $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < r$. Donc $y \in B(a,r)$.

2) Soit $x_0 \in E$ et $x \in A$. Alors pour tout $a \in A$, an a

$$\begin{aligned} d(x_0,x) \leq d(x_0,a)+d(a,x) &\leq d(x_0,a)+\delta(A) \\ &\leq \inf_{a\in A} d(x_0,a)+\delta(A) \\ &= d(x_0,A)+\delta(A). \end{aligned}$$

Il vient que $A \subset B\,(x_0, d(x_0,A)+\delta(A))$. De même, on obtient $B \subset B\,(x_0, d(x_0,B)+\delta(B))$. Par suite, $A \cup B \subset B\,(x_0, \delta(A)+\delta(B)+d(x_0,A)+d(x_0,B))$, par conséquent $A \cup B$ est bornée.

Montrons que $\delta(A\cup B) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$. Pour cela, soit $x,y \in A\cup B$.

i) Si $x,y \in A$ (resp. $x,y \in B$), alors $d(x,y) \leq \delta(A) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$ (resp $d(x,y) \leq \delta(B) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$). Par suite, $\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$ (resp. $\sup\limits_{x,y\in B} d(x,y) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$).

ii) Supposons que $x \in A$ et $y \in B$ (de même si $x \in B$ et $y \in A$). Alors pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a

$$\begin{aligned} d(x,y) \leq d(x,a)+d(a,b)+d(b,y) &\leq \delta(A)+\delta(B)+d(a,b) \\ &\leq \delta(A)+\delta(B)+\inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) \\ &= \delta(A)+\delta(B)+d(A,B). \end{aligned}$$

Donc, $\delta(A\cup B) \leq \delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$.

Exercice 1.5.5. *On considère le sous ensemble $E = [0,1]\cup[2,4[$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$.*

1) La partie $A = [2,4[$ est-elle ouverte dans l'espace métrique (E,d) ?

2) Montrer que $B = [0,1]$ est une partie à la fois ouverte et fermée dans (E,d).

3) La suite $x_n = 4-3^{-n}$ est-elle convergente dans (E,d).

Solution

1) On a $A \subset E$ et $A = B(3,\frac{3}{2})\cap E$, avec $B(3,\frac{3}{2})$ est la boule ouverte de $\mathbb{R}$ de centre 3 et de rayon $\frac{3}{2}$, donc A est ouvert dans E. Aussi, on a $A = \overline{B}(3,\frac{3}{2})\cap E$, avec $\overline{B}(3,\frac{3}{2})$ est la boule fermée de $\mathbb{R}$ de centre 3 et de rayon $\frac{3}{2}$, donc A est fermée dans E.

2) De même, la partie B est à la fois ouverte et fermée dans E. En effet, B c'est l'intersection de E avec la boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}$ de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{3}{2}$.

3) Il est clair que la suite $(x_n)_n \subset E$. Si $(x_n)_n$ convergeait dans E vers un point a, elle convergeait aussi dans $\mathbb{R}$ vers ce point. Mais dans $\mathbb{R}$ la suite tend vers 4. Comme la limite est unique, alors $a = 4$, ce qui est absurde puisque $4 \notin E$.

Exercice 1.5.6. *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $f : E \to E'$ une application et $x \in E$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *f est continue en $x \in E$.*

b) *Pour toute suite (x_n) d'éléments de E qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.*

Solution

$a) \Longrightarrow b)$. Supposons tout d'abord que f est continue en x. Fixons une suite (x_n) qui converge vers x et soit $\varepsilon > 0$.

D'une part, il existe $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(x')) < \varepsilon$ dès que $d(x,x') < \eta$; et d'autre part il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n,x) < \eta$ pour tout $n \geq N$.

Alors, pour tout $n \geq N$, on a $d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$, ce qui prouve que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas continue en x :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists y \in E,\ d(x,y) < \eta \text{ et } d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Pour $\eta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), on obtient une suite (y_n) telle que $d(x,y_n) < \frac{1}{n}$, en particulier (y_n) converge vers x, mais $d'(f(y_n), f(x)) \geq \varepsilon$. Par conséquent, $(f(y_n))$ ne converge pas vers $f(x)$.

CHAPITRE 2

ESPACES TOPOLOGIQUES

Dans tout ce chapitre E est un ensemble non vide.

2.1 Notion de Topologie

Définition 2.1.1. *On appelle **topologie** sur E toute partie τ de $P(E)$ vérifiant les trois propriétés suivantes.*

(O_1) *$\varnothing$ et E appartiennent à τ ;*

(O_2) *L'intersection de toute famille **finie** d'éléments de τ appartient à τ ;*

(O_3) *La réunion de toute famille quelconque d'éléments de τ appartient à τ.*

- *Le couple (E,τ) est appelé un espace topologique.*
- *Les éléments de τ sont appelés les ouverts de (E,τ) ou de E.*

Exemples 2.1.2. *1) $\tau = \{\varnothing, E\}$ est une topologie sur E appelée **Topologie grossière**.*

*2) $\tau = P(E)$ est une topologie sur E appelée **Topologie discrète**, c'est la topologie sur E qui possède le plus d'ouverts.*

3) $\tau = \{A \subset E / \complement_E^A \text{ est fini}\} \cup \{\varnothing\}$ est une topologie sur E.

*4) $\tau = \{A \subset \mathbb{R} / \forall x \in A, \exists\,]a,b[\text{ tel que } x \in]a,b[\subset A\}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée Topologie euclidienne ou **Topologie usuelle**.*

5) Les espaces métriques sont des espaces topologiques.

Définition 2.1.3. *Une partie A d'un espace topologique (E,τ) est dite fermé si c'est le complémentaire d'un ouvert.*

Proposition 2.1.4. *Soit (E,τ) un espace topologique. On a les propriétés suivantes.*

1) $\varnothing$ et E sont des fermés de E.

*2) Toute réunion **finie** de fermés est un fermé de E.*

3) Toute intersection quelconque de fermés est un fermé de E.

Remarque 2.1.5. *La réunion d'une famille quelconque et même dénombrable de fermés n'est pas toujours fermé. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle :*

$$Q = \{r_0, r_1, ..., r_n, ...\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{r_n\};$$

$\{r_n\}$ est fermé mais Q n'est pas fermé.

2.2 Base d'une topologie, voisinages et base de voisinages

2.2.1 Base d'ouverts

Définition 2.2.1. *On appelle base d'une topologie τ toute partie $\mathscr{B}$ de τ telle que, tout ouvert $O \in \tau$ soit la réunion d'une famille d'ouverts appartenant à $\mathscr{B}$.*

Exemples 2.2.2. *1) τ est une base de τ.*

2) $\{\{x\}/x \in E\}$ est une base de la topologie discrète.

3) L'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.3. *Pour qu'une partie $\mathscr{B}$ de τ soit une base de τ il faut et il suffit que pour tout $O \in \tau$ et tout $x \in O$, il existe $w \in \mathscr{B}$ tel que $x \in w \subset O$.*

Démonstration. $\Rightarrow$) évident (revenir à la définition).
$\Leftarrow$) Soit $O \in \tau$. Pour tout $x \in O$, il existe $w_x \in \mathscr{B}$ tel que $x \in w_x \subset O$ (par hypothèse). On a donc $O = \underset{x \in O}{\cup} w_x$, d'où $\mathscr{B}$ est une base de τ. $\square$

2.2.2 Voisinages et base de voisinages

Définition 2.2.4. *Soit (E, τ) un espace topologique.*

- *On appelle voisinage d'un point $x \in E$ toute partie de E qui contient un ouvert contenant x.*
- *On appelle voisinage d'une partie A de E toute partie de E qui contient un ouvert contenant A.*
- *On désigne par $\vartheta(x)$ l'ensemble des voisinages de x et par $\vartheta(A)$ l'ensemble des voisinages de A.*

Remarque 2.2.5. *Toute partie qui contient un voisinage de x (resp. de A) est un voisinage de x (resp. de A).*

Exemple 2.2.6. *a) Dans E muni de la topologie grossière, le seule voisinage d'un point x de E est E.*

b) Dans E muni de la topologie discrète, toute partie contenant x est un voisinage de x, en particulier $\{x\}$ est un voisinage de x.

Proposition 2.2.7. *Pour qu'une partie v de E soit un voisinage d'une partie A de E il faut et il suffit que v soit voisinage de tout point de A.*

Démonstration. $\Rightarrow$) évident (voir la définition d'un voisinage).

$\Leftarrow$) On suppose que pour tout $x \in A$, $v \in \vartheta(x)$. Donc pour tout $x \in A$, il existe un ouvert O_x tel que $x \in O_x \subset v$. On a $O = \underset{x\in A}{\cup} O_x$ est un ouvert tel que $A \subset O \subset v$. D'où $v \in \vartheta(A)$. □

Proposition 2.2.8. *Pour qu'une partie A de E soit un ouvert il faut et il suffit qu'elle soit voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Pour que A soit voisinage de chacun de ses points il faut et il suffit que $A \in \vartheta(A)$ (voir la proposition précédente), c-à-d il existe un ouvert O tel que $A \subset O \subset A$ $\Rightarrow A = O$. Donc A est un ouvert. □

Exercice 2.2.9. *Soit (E,τ) un espace topologique.*

- *a) Montrer que l'intersection de toute famille finie de voisinages de $x \in E$ est aussi voisinage de x.*
- *b) Montrer que tout voisinage v de x, il existe un autre voisinage u de x tel que pour tout $y \in u$ on ait $v \in \vartheta(y)$.*

Définition 2.2.10. *On appelle base (ou système fondamental) de voisinages d'un point $x \in E$ toute partie $S(x)$ de $\vartheta(x)$ telle que, tout voisinage v de x contient un voisinage w de x appartenant à $S(x)$: $\forall v \in \vartheta(x)$, $\exists w \in S(x)$ tel que $w \subset v$.*

Exemples 2.2.11. *a)* $S(x) = \vartheta(x)$.

- *b)* $S(x) = \{O \in \tau / \ x \in O\}$.
- *c) Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle :* $S(x) = \{]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
- *d) Dans E muni de la topologie discrète :* $S(x) = \{\{x\}\}$.
- *e) Dans un espace métrique :* $S(x) = \left\{B(x,\frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ *;* $S(x) = \{B(x,r),\ r > 0\}$.

2.3 Intérieur, Adhérence et Frontière

Soient A et B deux parties d'un espace topologique E.

Définition 2.3.1. *Soit $x \in E$. On dit que x est intérieur à A si A est voisinage de x ($A \in \vartheta(x)$). L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle* ***l'intérieur*** *de A et noté $\overset{\circ}{A}$ ou $int(A)$.*

Proposition 2.3.2. *L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A est la réunion de la famille $(O_i)_{i\in I}$ des ouverts inclus dans A.*

Démonstration. $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \vartheta(x) \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in O_i \subset A$ (O_i ouvert dans A) $\Leftrightarrow x \in \cup_{i\in I} O_i$. □

Corollaire 2.3.3. *a) L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.*

b) A est un ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

c) Si $A \subset B$ alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

d) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

Démonstration. Se déduit de la proposition précédente. □

Remarque 2.3.4. *On n'a pas en général $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. On peut prendre par exemple le cas de $E = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$.*

On a $\overset{\circ}{A} =]0,1[$, $\overset{\circ}{B} =]1,2[$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0,1[\cup]1,2[\neq]0,2[= \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

Définition 2.3.5. *On dit qu'un point $x \in E$ est **adhérent** à A si tout voisinage de x rencontre A ($\forall v \in \vartheta(x),\ v \cap A \neq \varnothing$).*

*L'ensemble des points adhérents à A est appelé **adhérence ou fermeture** de A et noté $\overline{A}$ ou $adh(A)$.*

Exemples 2.3.6. *a) Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, l'adhérence d'un intervalle borné quelconque de bornes a et b est $[a,b]$.*

b) Dans $\mathbb{R}$ l'adhérence de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

c) Si A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, $\inf A \in \overline{A}$ et $\sup A \in \overline{A}$.

Proposition 2.3.7. *Soit A une partie d'un espace topologique E.*

1) L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

2) L'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A.

Démonstration. 1) Soit F un fermé tel que $A \subset F$. Soit $x \notin F$, c-à-d $x \in \complement_E^F \subset \complement_E^A$, il vient que $O = \complement_E^F$ est un voisinage de x et $O \cap A = \varnothing$, par suite $x \notin \overline{A}$. D'où $\overline{A} \subset F$.

2) Montrons que $\overline{A} = \underset{A \subset F}{\cap} F$ (F fermé). L'inclusion $\overline{A} \subset \underset{A \subset F}{\cap} F$ est évidente. Montrons que $\underset{A \subset F}{\cap} F \subset \overline{A}$. Soit $x \notin \overline{A}$, il existe donc $v \in \vartheta(x)$ tel que $v \cap A = \varnothing$. Par suite, il existe un ouvert O contenant x et $O \cap A = \varnothing$, donc $A \subset \complement_E^O = F$ et $x \notin F$, par conséquent $x \notin \underset{A \subset F}{\cap} F$. □

Proposition 2.3.8. *1) A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

2) $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

4) $\complement_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E^A}}$ *et* $\complement_E^{\overset{\circ}{A}} = \overline{\complement_E^A}$.

Démonstration. 1), 2) et 3) sont immédiates. Montrons 4). Comme $\overline{A} = \bigcap_{A \subset F} F$ (F fermé), alors $\complement_E^{\overline{A}} = \bigcup_{A \subset F} \complement_E^F$. Posons $\complement_E^F = O$ un ouvert de E, alors $\complement_E^{\overline{A}} = \cup O$ avec $O \subset \complement_E^A$, donc $\complement_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widehat{\complement_E^A}}$. L'autre égalité est identique. □

2.4 Points frontières, Points d'accumulation, Points isolés

Soit A une partie d'un espace topologique E.

Définition 2.4.1. *Un point $x \in E$ est un point **frontière** de A si x est adhérent à la fois à A et à $\complement_E^A$. Lensemble des points frontières de A est appelé la **frontière** de A et noté A^* ou $F_r(A)$.*

Exemples 2.4.2. *a) Dans $\mathbb{R}$, la frontière d'un intervalle borné de bornes a et b est $\{a,b\}$.*

b) Dans $\mathbb{R}$, $F_r(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Proposition 2.4.3. *1) On a $F_r(A)$ est fermé.*

2) $F_r(\complement_E^A) = F_r(A)$.

Démonstration. Se déduit de la définition. □

Définition 2.4.4. *1) Un point $x \in E$ est un point **d'accumulation** de A si pour tout voisinage $v \in \vartheta(x)$, $v \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing$.*

*2) Un point de A est un point **isolé** s'il existe un voisinage $v \in \vartheta(x)$ tel que $v \cap A = \{x\}$.*

Remarque 2.4.5. *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A est égale à la réunion de l'ensemble des points d'accumulation de A et de l'ensemble des points isolés de A.*

2.5 Espaces topologiques séparés, métrisables

Définition 2.5.1. *On dit qu'un espace topologique E est séparé si pour tous points distincts x et y, ils existent $u \in \vartheta(x)$ et $v \in \vartheta(y)$ tels que $u \cap v = \varnothing$.*

Exemples 2.5.2. *a) Tout espace discret est séparé.*

b) Tout espace métrique est séparé.

Définition 2.5.3. *La topologie canonique d'un espace métrique E est celle dont une base d'ouverts est constituée des boules ouvertes.*

Un espace topologique est dit métrisable si sa topologie est induite par une distance.

2.6 Densité topologique

Soit A une partie d'un espace topologique E.

Définition 2.6.1. *1) On dit que A est* **partout dense** *(ou dense) dans E si* $\overline{A} = E$.

2) On dit qu'un espace topologique est séparable s'il existe une partie dénombrable A de E dense dans E ($A \subset E$ *et* $\overline{A} = E$*).*

Remarque 2.6.2. *Toute partie qui contient une partie dense dans E est dense dans E.*

Exemples 2.6.3. *a)* $\mathbb{Q}$ *et* $\complement_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ *sont denses dans* $\mathbb{R}$.

b) Dans E muni de la topologie grossière toute partie non vide est dense.

c) Dans E muni de la topologie discrète la seule partie dense dans E est E tout entier.

Proposition 2.6.4. *Pour q'une partie A de E soit dense dans E il faut et il suffit que tout ouvert non vide de E rencontre A.*

Démonstration. Soit O un ouvert non vide de E et soit $x \in O$. Comme $\overline{A} = E$, alors $x \in \overline{A}$, d'où le voisinage O de x rencontre A. Inversement, soit $x \in E$ et soit $v \in \vartheta(x)$, alors il existe un ouvert non vide O de E tel que $x \in O \subset v$. On a donc $O \cap A \neq \varnothing$ c-à-d $v \cap A \neq \varnothing$, d'où $x \in \overline{A}$. □

2.7 Exercices

Exercice 2.7.1. *On considère dans* $\mathbb{R}$ *l'ensemble* $\Sigma \subset P(\mathbb{R})$ *:*

$$\Sigma = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{]-x, x[\ / \ x \in \mathbb{R}, x > 0\}.$$

1) Montrer que Σ *est une topologie de* $\mathbb{R}$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Pour* $A = \{a\}$ *et* $A = [a, b]$ *déterminer* $\overline{A}$ *et* $\overset{\circ}{A}$.

<u>**Solution**</u>
1) Montrons que Σ est une topologie de $\mathbb{R}$.
(O_1) On a $\varnothing, \mathbb{R} \in \Sigma$.
(O_2) On a pour $x > 0$, $y > 0$, $]-x, x[\cap]-y, y[=]-\inf(x,y), \inf(x,y)[\in \Sigma$.
(O_3) Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $(x_i)_{i\in I}$ est majorée alors $\bigcup\limits_{i\in I}]-x_i, x_i[=]-\sup x_i, \sup x_i[\in \Sigma$.
- Si $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas majorée alors $\bigcup\limits_{i\in I}]-x_i, x_i[= \mathbb{R} \in \Sigma$, car sinon il existe un nombre $x > 0$ tel que $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i\in I}]-x_i, x_i[$, donc $x > x_i$ pour tout $i \in I$, impossible car $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas majorée.

2) On a lensemble des fermés est le suivant :

$$\Gamma = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, -x] \cup [x, +\infty[/ \ x \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

Soit $F =]-\infty, -x] \cup [x, +\infty[$. On a $a \in F \Leftrightarrow x \leq a$, donc

$$\overline{A} = \overline{\{a\}} = \bigcap_{x \leq a}]-\infty, -x] \cup [x, +\infty[=]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[.$$

De même on a $\overline{[a,b]} =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Il est facile de voir que $\overset{\circ}{\{a\}} = \overset{\circ}{[a,b]} = \varnothing$.

Exercice 2.7.2. *Soit τ l'ensemble des parties de l'intervalle $[0,1[$ de la forme $[0,\alpha[$, $\alpha \in [0,1]$.*

1) Montrer que τ est une topologie sur $[0,1[$.

2) Déterminer les fermés et montrer que $([0,1[, \tau)$ n'est pas séparé.

3) Soit $A = [a,b]$, détrminer $\overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}$.

<u>Solution</u>

1) Montrons que τ est une topologie sur $[0,1[$.

- On a $\varnothing \in \tau$ et $[0,1[\in \tau$, avec $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

- Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, $[0,\alpha_1[\cap [0,\alpha_2[= [0, \inf(\alpha_1, \alpha_2)[\in \tau$.

- Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille quelconque dans $[0,1]$. On a $\sup_{i \in I} \alpha_i$ existe car cette famille est majorée dans $\mathbb{R}$. Donc $\bigcup_{0 \leq \alpha_i \leq 1} [0, \alpha_i[= [0, \sup \alpha_i[\in \tau$.

2) A est fermée si et seulement s'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $\complement_{[0,1[}^{A} = [0,\alpha[$. Or, $A = \complement_{[0,1[}^{\complement_{[0,1[}^{A}} = \complement_{[0,1[}^{[0,\alpha[} = [\alpha, 1[$, donc les fermées sont de la forme $[\alpha, 1[$ avec $\alpha \in [0,1]$.

Supposons que $([0,1[, \tau)$ est séparé, alors pour tous $\alpha, \beta \in [0,1[$, avec $\alpha \neq \beta$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ tels que $\alpha \in [0,\alpha_1[$, $\beta \in [0,\alpha_2[$ et $[0,\alpha_1[\cap [0,\alpha_2[= \varnothing$, ce qui est absurde.

3) Soit $A = [a,b]$.

- $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, donc $\overline{A} = [a, 1[$.

- $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Si $a = 0$, $\overset{\circ}{A} = [0,b[$. Si $a \neq 0$, $\overset{\circ}{A} = \varnothing$.

Exercice 2.7.3. *Soit (E,τ) un espace topologique et soit $\mathscr{B}$ une partie de τ.*

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts si et seulement si, pour tout point $a \in E$, la famille des éléments de $\mathscr{B}$ qui contiennent a est une base de voisinages de a.

<u>Solution</u>

Pour tout $a \in E$, notons $F_a = \{w \in \mathscr{B} / \ a \in w\}$.

$\Rightarrow$) Supposons que $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts et fixons $a \in E$. Soit $v \in \vartheta(a)$ un voisinage de a, alors il existe un ouvert O tel que $a \in O \subset v$. Comme $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts, il existe donc $w \in \mathscr{B}$ tel que $a \in w \subset O \subset v$, ce qui montre que F_a est une base de voisinages de a.

$\Leftarrow$) Supposons que pour tout $a \in E$, F_a est une base de voisinages de a. Soit O un ouvert de E, alors O est voisinage de chacun de ses points, autrement dit, pour tout $a \in O$ il existe $w \in F_a \subset \mathscr{B}$ tel que $a \in w \subset O$. D'où $\mathscr{B}$ est une base d'ouverts.

Exercice 2.7.4. *Soient E un espace topologique et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de E.*

1) Montrer que

$$a)\ \overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I}A_i}} \subset \cap_{i\in I}\overset{\circ}{A_i}, \qquad b)\ \cup_{i\in I}\overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\widehat{\cup_{i\in I}A_i}},$$
$$c)\ \overline{\cap_{i\in I}A_i} \subset \cap_{i\in I}\overline{A_i} \qquad d)\ \cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}.$$

2) On suppose que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est finie. Montrer que

$$e)\ \overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I}A_i}} = \cap_{i\in I}\overset{\circ}{A_i}, \qquad f)\ \cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}.$$

Solution

1) $a)$ $\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I}A_i}}$ est un ouvert contenu dans $\cap_{i\in I}A_i$, il est donc contenu dans chacun des A_i, donc dans $\overset{\circ}{A_i}$, donc dans $\cap_{i\in I}\overset{\circ}{A_i}$.

$b)$ Pour tout $i \in I$, $\overset{\circ}{A_i}$ est un ouvert inclus dans A_i, $\cup_{i\in I}\overset{\circ}{A_i}$ est un ouvert contenu dans $\cup_{i\in I}A_i$ et donc $\cup_{i\in I}\overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\widehat{\cup_{i\in I}A_i}}$.

$c)$ Pour tout $i \in I$, $\overline{A_i}$ est un fermé contenant A_i, donc, $\cap_{i\in I}A_i \subset \cap_{i\in I}\overline{A_i}$, d'où $\overline{\cap_{i\in I}A_i} \subset \cap_{i\in I}\overline{A_i}$.

$d)$ Pour tout $j \in I$, $A_j \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}$, donc $\overline{A_j} \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}$ et donc $\cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}$.

2) $e)$ Lorsque I est fini, $\cap_{i\in I}\overset{\circ}{A_i}$ est un ouvert et il est contenu dans $\cap_{i\in I}A_i$, donc il est contenu dans $\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I}A_i}}$. Comme on a déjà montré que $\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I}A_i}} \subset \cap_{i\in I}\overset{\circ}{A_i}$, on en déduit l'égalité.

$f)$ Lorsque I est fini, $\cup_{i\in I}\overline{A_i}$ est un fermé, qui contient $\cup_{i\in I}A_i$, donc il contient $\overline{\cup_{i\in I}A_i}$. Comme on a déjà montré que $\cup_{i\in I}\overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I}A_i}$, on en déduit l'égalité.

Exercice 2.7.5. *Soient E un espace topologique et A une partie de E.*

1) Montrer que A est ouvert si et seulement si, pour toute partie B de E, $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2) On suppose que A est un ouvert de E et B une partie de E.

a) *Montrer que si B est dense dans E, alors* $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.

b) *Montrer que si A et B sont denses dans E, alors* $A \cap B$ *est dense dans E.*

Solution

1) Supposons que A est ouvert et soit $x \in A \cap \overline{B}$, alors on a $A \in \vartheta(x)$. Soit $v \in \vartheta(x)$ quelconque, donc $v \cap A \in \vartheta(x)$, et puisque $x \in \overline{B}$ alors $v \cap A \cap B \neq \varnothing$, d'où $x \in \overline{A \cap B}$.

Inversement, si $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ pour toute partie B de E, alors pour $B = \complement_E^A$ on a $A \cap \overline{\complement_E^A} \subset \overline{A \cap \complement_E^A} = \varnothing$, et puisque $\overline{\complement_E^A} = \complement_E^{\mathring{A}}$ alors $A \cap \complement_E^{\mathring{A}} = \varnothing$. Donc $A = \mathring{A}$ et A est un ouvert.

2) $a)$ Supposons que B est dense dans E et montrons que $\overline{A} = \overline{A \cap B}$. Comme $\overline{B} = E$ et $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ d'apès 1), alors $A \cap E \subset \overline{A \cap B}$, c-à-d $A \subset \overline{A \cap B}$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cap B}$. D'autre part, on a $A \cap B \subset A$, c-à-d $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$, on en déduit donc que $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.

$b)$ D'après $a)$, si B est dense alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$, et Comme A est dense alors $E = \overline{A} = \overline{A \cap B}$, d'où le résultat.

Exercice 2.7.6. *Pour toute partie A de l'espace topologique* (E, τ) *on pose* $\alpha(A) = \mathring{\overline{A}}$ *et* $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$.

1) a) *Montrer que* $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$ *et* $\beta(A) \subset \beta(B)$

   b) *Montrer que si A est ouvert, on a* $A \subset \alpha(A)$ *et si A est fermé, on a* $\beta(A) \subset A$.

   c) *En déduire que pour toute partie A de E,* $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ *et* $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

2) *Montrer que si U et V sont deux ouverts tels que* $U \cap V = \varnothing$*, alors on a aussi* $\alpha(U) \cap \alpha(V) = \varnothing$.

Solution

1) $a)$ Ona $A \subset B$ implique que $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ ou encore $\mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{B}}$ et $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{B}}$, donc $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.

$b)$ On a $A \subset \overline{A}$ implique que $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$, et comme A est un ouvert alors $A = \mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$, donc $A \subset \alpha(A)$.

De même, on a $\mathring{A} \subset A$ implique que $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A} = A$ (A est fermé), donc $\beta(A) \subset A$.

$c)$ $\alpha(A) = \mathring{\overline{A}}$ est un ouvert, alors d'après $a)$ on a $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$. D'autre part, $\alpha(A) = \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A}$, donc $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ et encore $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subset \mathring{\overline{A}}$, d'où $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$.

De même, on a $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$ est un fermé, alors d'aprs̀ $b)$, $\beta(\beta(A)) \subset \beta(A)$. D'autre part, $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} = \beta(A)$, donc $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et encore $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$, d'où $\beta(A) \subset \beta(\beta(A))$.

2) Montrons que si U et V sont deux ouverts disjoints alors $\alpha(U)$ et $\alpha(V)$ sont disjoints.

Puisque U est un ouvert, d'après l'exercice 2.7.5, on a $U \cap \overline{V} \subset \overline{U \cap V} = \varnothing$, et comme $U \cap \overset{\circ}{\overline{V}} \subset U \cap \overline{V}$ alors $U \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \varnothing$. De même, on a $\overset{\circ}{\overline{V}} \cap \overline{U} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{V}} \cap U} = \varnothing$, et comme $\overset{\circ}{\overline{V}} \cap \overset{\circ}{\overline{U}} \subset \overset{\circ}{\overline{V}} \cap \overline{U}$, alors $\overset{\circ}{\overline{V}} \cap \overset{\circ}{\overline{U}} = \varnothing$, c-à-d $\alpha(U) \cap \alpha(V) = \varnothing$.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS CONTINUES ET HOMÉOMORPHISMES

3.1 Applications continues

Soient E, F et G trois espaces topologiques et f une application de E dans F.

Définition 3.1.1. *f est continue en un point $x_0 \in E$ si pour tout voisinage v de $f(x_0)$ il existe un voisinage u de x_0 tel que $f(u) \subset v$ ($\Leftrightarrow u \subset f^{-1}(v)$).*

On dit que f est continue sur E si elle est continue en tout pont de E.

Exemples 3.1.2. *a) Toute application constante de E dans F est continue sur E.*

b) $id_E : x \to x$ est continue.

c) Si E est discret, toute application $f : E \to F$ est continue.

d) Si F est grossière, toute application $f : E \to F$ est continue.

Théorème 3.1.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) f est continue sur E.

2) Pour toute partie $A \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3) L'image réciproque par f de tout fermé w de F est un fermé de E.

4) L'image réciproque par f de tout ouvert O de F est un ouvert de E.

Démonstration. $1) \Rightarrow 2)$. Soit $A \subset E$. Pour tout $x \in \overline{A}$ et tout $v \in \vartheta(f(x))$ on a $f^{-1}(v) \in \vartheta(x)$ (la continuité de f), et comme $x \in \overline{A}$ alors $f^{-1}(v) \cap A \neq \varnothing$, donc $v \cap f(A) \neq \varnothing$. Il vient que $f(x) \in \overline{f(A)}$ et par conséquent $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$2) \Rightarrow 3)$. Soit w un fermé de F, montrons que $A = f^{-1}(w)$ est un fermé de E. On a $f(A) = f(f^{-1}(w)) \subset w$; d'après 2) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset w$, donc $\overline{A} \subset A$, d'où A est fermé.

$3) \Rightarrow 4)$. Soit O un ouvert de F, on a $\complement_F^O$ est un fermé de F, donc $f^{-1}(\complement_F^O)$ est un fermé de E, donc $\complement_E^{f^{-1}(O)} = f^{-1}(\complement_F^O)$ est un fermé de E, d'où $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

$4) \Rightarrow 1)$. Soit $x_0 \in E$ et soit $v \in \vartheta(f(x_0))$, alors il existe un ouvert O de F tel que $f(x_0) \in O \subset v$. Il vient que $\{x_0\} \subset f^{-1}(O) \subset f^{-1}(v)$, or $f^{-1}(O)$ est un ouvert, donc $f^{-1}(v) \in \vartheta(x_0)$, d'où f est continue en x_0 et par conséquent f est continue sur E. $\square$

Proposition 3.1.4. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f est continue sur E et g est continue sur F alors $g \circ f$ est continue sur E.*

Démonstration. Soit $x \in E$. Montrons que $g \circ f : E \to G$ est continue en x. Pour cela, soit $v \in \vartheta(g \circ f(x))$, alors $g^{-1}(v) \in \vartheta(f(x))$ et $f^{-1}(g^{-1}(v)) = (g \circ f)^{-1}(v) \in \vartheta(x)$, d'où $g \circ f$ est continue. $\square$

3.2 Applications ouvertes, fermées et homéomorphismes

Définition 3.2.1. *a) On dit que f est ouverte si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

b) On dit que f est fermée si l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F.

Définition 3.2.2. *f est un homéomorphismes de E dans F si f est une bijection bi-continue, c-à-d telle que f et f^{-1} sont continues.*

On dit que E et F sont homéomorphe s'il existe un homéomorphisme de E dans F.

Proposition 3.2.3. *Soient E et F deux espaces topologiques. On suppose que F est séparé. Si pour tous $x,x' \in E$, avec $x \neq x'$, il existe une application continue f de E dans F vérifiant $f(x) \neq f(x')$, alors E est séparé.*

Démonstration. Soient $x \neq x'$ dans E et $f : E \to F$ continue telles que $f(x) \neq f(x')$. Soient $v \in \vartheta(f(x))$ et $v' \in \vartheta(f(x'))$ tels que $v \cap v' = \varnothing$. Comme f est continue, alors $f^{-1}(v) \in \vartheta(x)$, $f^{-1}(v') \in \vartheta(x')$ et on a $f^{-1}(v) \cap f^{-1}(v') = f^{-1}(v \cap v') = \varnothing$. □

Corollaire 3.2.4. *a) Soient E et F deux espaces topologiques avec F est séparé. S'il existe une injection continue de E dans F, alors E est séparé.*

b) Tout espace homéomorphe à un espace séparé est séparé.

3.3 Comparaison de topologies

Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur E.

Définition 3.3.1. *On dit que τ_1 et τ_2 sont comparables si $\tau_1 \subset \tau_2$ ou $\tau_2 \subset \tau_1$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$, on dit que τ_1 et moins fine que τ_2 ou encore τ_2 et plus fine que τ_1, on note $\tau_1 \preceq \tau_2$.*

Exemple 3.3.2. *La topologie grossière est la moins fine de toutes les topologies sur E et la topologie discrète est la plus fine de toutes les topologies sur E.*

Proposition 3.3.3. *τ_1 et moins fine que τ_2 si et seulement si $id_E : (E,\tau_2) \to (E,\tau_1)$ est continue.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} id_E \text{ est continue} &\Leftrightarrow \forall O \in \tau_1,\ id_E^{-1}(O) \in \tau_2 \\ &\Leftrightarrow \forall O \in \tau_1,\ O \in \tau_2 \\ &\Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.4. *Une application continue de E dans F reste continue si on remplace la topologie de E par une topologie plus fine ou la topologie de F par une topologie moins fine.*

3.4 Sous-espace topologique

Soient (E,τ) un espace topologique, A une partie de E et soit i l'injection canonique de A dans E, $i : A \to E$, $x \to x$. L'ensemble des topologies sur A qui rendent continue l'injection canonique i n'est pas vide, la topologie discrète lui appartient.

Définition 3.4.1. *On appelle* ***Topologie induite*** *par τ sur A la topologie T la moins fine parmis celles rendant continue l'injection canonique. (A,T) s'appelle sous-espace topologique (ou sous-espace) de E.*

Dans la suite de ce paragraphe A est supposé muni de la topologie induite.

Proposition 3.4.2. *Les ouverts dans A sont les traces sur A des ouverts de E, c-à-d*

$$T = \{O \cap A / \ O \in \tau\}.$$

Démonstration. T est une topologie sur A (immédiate).

Pour tout $O \in \tau$, on a $i^{-1}(O) = O \cap A \in T$, d'où $i : (A,T) \to (E,\tau)$ est continue.

Soit T' une topologie sur A telle que $i : (A,T') \to (E,\tau)$ soit continue. Soit $O \cap A \in T$ avec $O \in \tau$. Alors on a $O \cap A = i^{-1}(O) \in T'$, donc T' est plus fine que T. □

Proposition 3.4.3. *Les fermés de A sont les traces sur A des fermés de E.*

Démonstration. Soit F_A l'ensemble des fermés de A, on a alors $w \in F_A \Leftrightarrow \complement_A^w$ est un ouvert de $A \Leftrightarrow$ il existe O ouvert de E tel que $\complement_A^w = O \cap A \Leftrightarrow w = \complement_A^{O \cap A} = \complement_E^O \cap A$ ($\complement_E^O$ est un fermé de E). □

Proposition 3.4.4. *Soient (E,τ) un espace topologique, A et B deux parties de E telles que $B \subset A$. L'adhérence $\overline{B}^A$ de B par rapport à A est égale à la trace sur A de l'adhérence $\overline{B}^E$ de B par rapport à E.*

Démonstration. Soit $\{F_i / \ i \in I\}$ l'ensemble de tous les fermés de E contenant B, alors $\{F_i \cap A / \ i \in I\}$ est l'ensemble des fermés de A qui contiennent B, d'où

$$\overline{B}^A = \cap_{i \in I}(F_i \cap A) = (\cap_{i \in I} F_i) \cap A = \overline{B}^E \cap A.$$

□

Proposition 3.4.5. *Tout sous-espace topologique d'un espace topologique séparé est séparé.*

Démonstration. Soit A un sous-espace d'un espace E séparé. On a $i : A \to E$ l'injection canonique est continue, on applique donc le corollaire précédent (corollaire 3.2.4) □

3.5 Produit fini d'espaces topologiques

Soient (E_i, τ_i), $1 \leq i \leq n$, des espaces topologiques et $E = E_1 \times ... \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$ le produit Cartésien.

Définition 3.5.1. *On appelle **ouvert élémentaire** de E toute partie de E de la forme $P = \prod_{i=1}^n O_i$, où O_i est un ouvert quelconque de E_i.*

Remarque 3.5.2. *L'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire. En effet, si $P = \prod_{i=1}^n O_i$ et $P' = \prod_{i=1}^n O'_i$ alors, $P \cap P' = \prod_{i=1}^n O_i \cap O'_i$.*

Proposition 3.5.3. *L'ensemble des réunions d'ouverts élémentaires de E définit une topologie sur E dite **Topologie produit** sur E.*

Démonstration. Soit $\tau = \{$ des réunions d'ouverts élémentaires de $E\}$. Les propriétés (O_1) et (O_3) sont évidentes.

Pour (O_2) : Soient $A = \cup_{j\in J} P_j$ et $B = \cup_{k\in K} P'_k$, avec les P_j et les P_k sont des ouverts élémentaires de E. On a

$$A \cap B = (\cup_{j\in J} P_j) \cap (\cup_{k\in K} P'_k) = \cup_{(j,k)\in J\times K} P_j \cap P'_k.$$

Or, pour tout $(j,k) \in J \times K$, $P_j \cap P'_k$ est un ouvert élémentaire de E, donc $A \cap B \in \tau$. □

Théorème 3.5.4. *Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, alors l'ensemble des parties de E de la forme $\prod_{i=1}^n v_i$, où $v_i \in \vartheta(x_i)$ est un système fondamental de voisinages de x pour la topologie produit.*

Démonstration. Soit $v = \prod_{i=1}^n v_i$, avev $v_i \in \vartheta(x_i)$, alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe w_i ouvert de E_i tel que $x_i \in w_i \subset v_i$. Par suite, $x \in \prod_{i=1}^n w_i \subset v$, c-à-d v contient un ouvert élémentaire contenant x, donc v est un voisinage de x.

Inversement, soit $v \in \vartheta(x)$, il existe donc un ouvert O de E tel que $x \in O \subset v$. Or, O est une réunion d'ouverts élémentaires de E, il existe donc un ouvert élémentaire $P = \prod_{i=1}^n w_i$ tel que $x \in P \subset O \subset v$. Il suffit de prendre pour chaque $i = 1, ..., n$, $v_i = w_i \in \vartheta(x_i)$. □

Remarque 3.5.5. *Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, soit pr_i la projection de E sur E_i ($x \to x_i$), alors pr_i est continue.*

Proposition 3.5.6. *Soient F un espace topologique et f une application de F vers $E = \prod_{i=1}^n E_i$. Pour que f soit continue en un point $a \in F$ il faut et il suffit que les applications coordonnées $f_i : F \to E_i$, $x \to f_i(x)$ soient continues en a.*

Démonstration. $\Rightarrow$) Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $f_i = pr_i \circ f$ est continue en a comme composée de deux applications continues.

$\Leftarrow$) Soit v un voisinage de $f(a)$ dans E, alors v contient un ouvert élémentaire $P = \prod_{i=1}^n w_i$ contenant $f(a)$. Par suite, on a pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, w_i est un ouvert de E_i et contient $f_i(a)$, donc $f_i^{-1}(w_i)$ est un voisinage de a dans F, d'où $f^{-1}(P) = \cap_{i=1}^n f_i^{-1}(w_i)$ est un voisinage de a dans F. Par conséquent, $f^{-1}(v) \supset f^{-1}(P)$ est un voisinage de a dans F, ce qui montre que f est continue en a. □

Proposition 3.5.7. *Tout produit fini $E = \prod_{i=1}^n E_i$ d'espaces topologiques séparés et séparé.*

Démonstration. Soient x et x' deux éléments de E tels que $x \neq x'$, alors il existe $i \in \{1,...,n\}$ tel que $pr_i(x) \neq pr_i(x')$. Comme $pr_i : E \to E_i$, $x \to x_i$, est continue et E_i est séparé, alors E est séparé. □

3.6 Limites et continuité dans un espace topologique

Définition 3.6.1. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique E et $\ell \in E$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ (ou converge vers ℓ) si pour tout voisinage $v \in \vartheta(\ell)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in v$ pour tout $n \geq n_0$. On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$.*

Proposition 3.6.2. *Si E est un espace topologique séparé, alors la limite d'une suite si elle existe est unique.*

Démonstration. Soient $\ell \neq \ell'$ deux limites d'une suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Comme E est séparé, alors il existe deux voisinages $v \in \vartheta(\ell)$ et $v' \in \vartheta(\ell')$ tels que $v \cap v' = \varnothing$. On a $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$ implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in v$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} x_n$ implique qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $x_n \in v'$. Impossible. □

Théorème 3.6.3. *Soient E un espace topologique, A une partie de E et $x \in E$.*

1) *Pour que x soit adhérent à A, il suffit qu'il existe une suite de points de A qui converge vers x.*

2) *Si E est métrisable (ou plus généralement tout point de E admet une base dénombrable de voisinages) cette condition est nécessaire.*

Démonstration. 1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A convergeant vers x et soit $v \in \vartheta(x)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \in v$, c-à-d pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in v \cap A$, donc $v \cap A \neq \varnothing$ et $x \in \overline{A}$.

2) soit $x \in \overline{A}$ et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamental dénombrable de voisinages de x (on peut supposer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car sinon on prend $u_0 = v_0$ et $u_n = \cap_{i=0}^n v_i$). On a $v_n \cap A \neq \varnothing$. On considère pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in v_n \cap A$, ainsi on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de point de A qui converge vers x. En effet, si $v \in \vartheta(x)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} \subset v$ pour tout $n \geq n_0$, donc $x_n \in v$ pour tout $n \geq n_0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

□

Corollaire 3.6.4. *Dans un espace topologique métrisable E, si la limite de toute suite de points d'une partie $A \subset E$ appartient à A, alors A est fermé.*

Définition 3.6.5. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique E. On dit qu'un élément $\alpha \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout voisinage $v \in \vartheta(\alpha)$, on a $\{n \in \mathbb{N}/\ x_n \in v\}$ est infini.*

Remarque 3.6.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \overline{\{x_k/\ k \geq n\}}$. Alors, α est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\alpha \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$.*

Exemples 3.6.7. *a) Si $E = \mathbb{R}$ et $x_n = (-1)^n$, alors les valeurs d'adhérence sont -1 et 1.*

b) Si $E = \mathbb{R}$ et $x_n = n$, il n'y a pas de valeur d'adhérence.

c) La limite d'une suite convergente est une valeur d'adhérence, c'est la seule valeur d'adhérence si E est séparé.

Théorème 3.6.8. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique (E,d), alors $\alpha \in E$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si α est la limite d'une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. $\Rightarrow$) Si α est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut construire par récurrence une suite strictement croissante $(n_k)_k$ d'entiers telle que pour tout $k \geq 1$, $x_{n_k} \in B(\alpha, \frac{1}{k})$. En effet,

Pour $k = 1$, on a $\{x_n/\ n \geq 1\} \cap B(\alpha, 1) \neq \varnothing$. Soit $n_1 \geq 1$ telle que $x_{n_1} \in B(\alpha, 1)$.

Pour $k > 1$, on a $\{x_n/\ n \geq n_{k-1}\} \cap B(\alpha, \frac{1}{k}) \neq \varnothing$. Soit $n_k \geq n_{k-1}$ telle que $x_{n_k} \in B(\alpha, \frac{1}{k})$.

On obtient donc une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α.

$\Leftarrow$) (Il est valable pour tout espace topologique) Si α est limite d'une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, alors pour tout $v \in \vartheta(\alpha)$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $x_{n_k} \in v$. Il existe donc une infinité d'entiers n tels que $x_n \in v$, donc α est bient une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Définition 3.6.9. *Soient E et F deux espaces topologiques, $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application. Soit $\alpha \in \overline{A}$, on dit que $f(x)$ converge vers $\ell \in F$, quand x tend vers α par valeur dans A et on note $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x\in A}} f(x) = \ell$, si pour tout voisinage $v \in \vartheta(\ell)$, il existe un voisinage $u \in \vartheta(\alpha)$ dans E tel que $f(u \cap A) \subset v$.*

Remarque 3.6.10. *Si $\alpha \in A$, on a f est continue en α si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x\in A}} f(x) = f(\alpha)$.*

Proposition 3.6.11. *Soit A une partie d'un espace métrique (E,d), F un espace topologique et $f : A \to F$ une application. Soit $\alpha \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Pour que $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x\in A}} f(x) = \ell$ il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers α on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.*

Démonstration. $\Rightarrow$) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. On va montrer que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$. Pour cela, soit $v \in \vartheta(\ell)$, par hypothèse il existe $u \in \vartheta(\alpha)$ tel que $f(u\cap A) \subset v$. or, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in u$, donc $x_n \in u\cap A$ pour tout $n \geq n_0$, c-à-d $f(x_n) \in f(u\cap A) \subset v$ pour tout $n \geq n_0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ (vraie dans tout espace topologique).

$\Leftarrow$) On veut montrer que, pour tout voisinage $v \in \vartheta(\ell)$, il existe $u \in \vartheta(\alpha)$ tel que $f(u\cap A) \subset v$. Pour cela, on suppose qu'il existe $v \in \vartheta(\ell)$ tel que pour tout $u \in \vartheta(\alpha)$, $f(u\cap A)$ n'est pas inclus dans v, donc en particulier pour $u = B(\alpha, \frac{1}{n})$, on a $f(B(\alpha, \frac{1}{n})\cap A)$ n'est pas inclus dans v pour tout $n \geq 1$, ce qui veut dire que $f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ. Contradiction. $\square$

Corollaire 3.6.12. *Pour qu'une application f soit continue sur un espace métrique (E,d) il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ qui converge vers $\alpha \in E$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la remarque et la proposition précédentes. $\square$

3.7 Exercices

Exercice 3.7.1. *On considère un ensemble $E = \{a,b,c\}$ à trois éléments distincts. Pour in formation, l'ensemble E peut être muni de 29 topologies distinctes.*

Construire sur E deux topologies τ et τ', qui sont toutes deux distinctes de la topologie discrète et de la topologie grossière, et qui sont ajustées de façon à ce qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre (E,τ) et (E,τ').

Solution

On peut prendre $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, E\}$ et $\tau' = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, E\}$. Comme τ contient 4 ouverts tandis que τ' en contient 5, les espaces topologiques (E,τ) et (E,τ') ne peuvent pas être homéomorphes.

Exercice 3.7.2. *Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application. Pour tout $x_0 \in E$, soient $S(x_0)$ et $S(f(x_0))$ deux bases de voisinages de x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalents :*

1) f est continue en x_0.

2) Pour tout $v' \in S(f(x_0))$ il existe $u' \in S(x_0)$ tel que $f(u') \subset v'$.

3) Pour tout $v' \in S(f(x_0))$, $f^{-1}(v') \in \vartheta(x_0)$.

Solution

1) $\Rightarrow$ 2). Soit $v' \in S(f(x_0)) \subset \vartheta(f(x_0))$, comme f est continue en x_0, il existe $u \in \vartheta(x_0)$ tel que $f(u) \subset v'$, et puisque u est un voisinage de x_0 il existe $u' \in S(x_0)$ tel que $u' \subset u$. On a alors $f(u') \subset f(u) \subset v'$.

2) $\Rightarrow$ 3). Soit $v' \in S(f(x_0))$, d'après 2) il existe $u' \in S(x_0)$ tel que $f(u') \subset v'$ ou encore $u' \subset f^{-1}(v')$, d'où $f^{-1}(v') \in \vartheta(x_0)$ ($f^{-1}(v')$ n'est pas nécessairement dans $S(x_0)$).

3) $\Rightarrow$ 1). Soit v un voisinage de $f(x_0)$, alors il existe $v' \in S(f(x_0))$ tel que $v' \subset v$, et d'après 3) on a $u = f^{-1}(v') \in \vartheta(x_0)$, donc $f(u) = f(f^{-1}(v') \subset v' \subset v$.

Exercice 3.7.3. *Soit A un sous-espace topologique d'un espace topologique E. Montrer que les voisinages d'un point $x \in A$ sont les traces sur A des voisinages de x dans E.*

Solution

Soient $\vartheta_A(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans A et $\vartheta(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans E. Soit $v \in \vartheta_A(x)$, alors il existe O un ouvert de E tel que $x \in w = O \cap A \subset v$. Considérons $u = v \cup O$ qui appartient à $\vartheta(x)$, alors on a $u \cap A = v$.

Réciproquement, soit $v = u \cap A$ avec $u \in \vartheta(x)$. Alors il existe un ouvert O de E tel que $x \in O \subset u$, donc $v = u \cap A \supset O \cap A$, d'où $v \in \vartheta_A(x)$.

Exercice 3.7.4. *Soient E et F deux espace topologiques, avec F est séparé, f et g deux applications continues de E dans F.*

1) Montrer que $G = \{x \in E / \ f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E.

2) Déduire que s'il existe une partie A dense dans E telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, alors $f \equiv g$.

Solution

1) Montrer que G est un fermé revient à montrer que $\complement_E^G$ est ouvert. On va donc montrer que $\complement_E^G$ est voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in \complement_E^G$, alors $f(x) \neq g(x)$. Comme F est sépaé, ils existent deux ouverts $u \in \vartheta(f(x))$ et $v \in \vartheta(g(x))$ tels que $u \cap v = \varnothing$. De plus, $f^{-1}(u)$ et $g^{-1}(v)$ sont des ouverts, car f et g sont continues, et $x \in f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v)$. Montrons que $O = f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v) \subset \complement_E^G$. Soit $a \in O$, alors $f(a) \in u$ et $g(a) \in v$. Or $u \cap v = \varnothing$, donc $f(a) \neq g(a)$, ce qui prouve que $a \in \complement_E^G$. Il en résulte que $x \in O \subset \complement_E^G$. Il vient donc que $\complement_E^G$ est un ouvert et G fermé.

2) $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$ implique que $A \subset G$, par suite $\overline{A} \subset \overline{G} = G$. Comme $\overline{A} = E$, alors $E \subset G$, donc $f \equiv g$.

Exercice 3.7.5. *Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est continue.

2) Pour toute partie B de F, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$.

3) Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Solution

1) $\Rightarrow$ 2) On a $\overset{\circ}{B} \subset B$ implique que $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)$, et puisque que f est continue sur E, alors $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ est un ouvert, il vient donc que $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(\overset{\circ}{B})}} \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Supposons que $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$, alors $\complement_E^{\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}} \subset \complement_E^{f^{-1}(\overset{\circ}{B})}$, ce qui implique que $\overline{\complement_E^{f^{-1}(B)}} \subset f^{-1}(\complement_E^{\overset{\circ}{B}})$, ce qui implique encore que $\overline{f^{-1}(\complement_E^{B})} \subset f^{-1}(\overline{\complement_E^{B}})$. Ainsi, en posant $B' = \complement_E^{B}$, on obtient $\overline{f^{-1}(B')} \subset f^{-1}(\overline{B'})$.

3) $\Rightarrow$ 1) Montrons que f est continue. Pour cela, soit w un fermé de F, d'après 3), on a $\overline{f^{-1}(w)} \subset f^{-1}(\overline{w}) = f^{-1}(w)$, donc $f^{-1}(w) = \overline{f^{-1}(w)}$ c-à-d $f^{-1}(w)$ est frmé et f est continue.

Exercice 3.7.6. *Soit E un ensemble non vide et soient d et d' deux distances sur E.*

1) *Montrer que d et d' sont métriquement équivalentes si et seulement si l'application identité $id_E : (E,d) \to (E,d')$ est bilipschitzienne (id_E et id_E^{-1} sont lipschitziennes).*

2) *Montrer que d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité $id_E : (E,d) \to (E,d')$ est un homéomorphisme.*

Solution

1) L'application $id_E : (E,d) \to (E,d')$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'une constante $k > 0$ tel que $d' \leq kd$. De même son application inverse $id_E^{-1} : (E,d') \to (E,d)$ est lipschitzienne équivaut à l'existence d'une constante $\ell > 0$ tel que $d \leq \ell d'$. Par conséquent, $id_E : (E,d) \to (E,d')$ est bilipschitzienne si et seulement s'il existe $k, \ell > 0$ tels que $\frac{1}{\ell} d \leq d' \leq kd$.

2) L'application $id_E : (E,d) \to (E,d')$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E,d') est un ouvert de (E,d), ce qui revient à dire que $\tau_{d'} \subset \tau_d$. De même on a $id_E^{-1} : (E,d') \to (E,d)$ est continue si et seulement si $\tau_d \subset \tau_{d'}$. Par conséquent, id_E est un homéomorphisme si et seulement si $\tau_d = \tau_{d'}$, c-à-d d et d' sont topologiquement équivalentes.

Exercice 3.7.7. *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E.*

1) *Montrer que pour tout $x \in A$, $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$ et que $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.*

2) *Montrer que l'application $x \to d(x,A)$ de E dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue (on pourra montrer qu'elle est lipschitzienne).*

Solution

1) Dans un espace métrique, $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0$. Il en résulte immédiatement que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Montrons que $d(x,A) = d(x,\overline{A})$. On a $A \subset \overline{A}$, donc $d(x,A) \geq d(x,\overline{A})$. Reste à montrer que $d(x,\overline{A}) \geq d(x,A)$ ou encore pour tout $r > 0$, $d(x,\overline{A}) + r > d(x,A)$. Fixons un tel $r > 0$, et soit $y \in \overline{A}$ tel que $d(x,y) < d(x,\overline{A}) + \frac{r}{2}$. comme $y \in \overline{A}$, il existe $z \in A$ tel que $d(z,y) < \frac{r}{2}$. Par suite, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,\overline{A}) + r$. D'où le résultat en passant à l'inf.

2) Il suffit de montrer qu'elle est 1-lipschitzienne. On a pour tout $a \in A$ et $x, y \in E$, $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. En passant à l'inf à gauche, on obtient $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a)$ et en passant à l'inf à droite, on obtient $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$. En inversant les rôles de x et y, on obtient $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

Exercice 3.7.8. *Soit E un espace topologique. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *E est séparé.*

2) *Pour tout $x \in E$, l'intersection des voisinages fermés de x est égale à $\{x\}$.*

3) *La diagonale $\Delta = \{(x,x)/\ x \in E\}$ de $E \times E$ est fermé ($E \times E$ est supposé muni de la topologie produit).*

<u>Solution</u>

$1) \Rightarrow 2)$ Soit $A = \cap_{v \in \vartheta(x)} v$ (v fermé). On a $\{x\} \subset A$. Montrons que $A \subset \{x\}$, ce qui revient à montrer que $\complement_E^{\{x\}} \subset \complement_E^A$.

Soit $x' \in \complement_E^{\{x\}}$, donc $x \neq x'$ et par suite il existe deux voisinages ouverts $u \in \vartheta(x)$ et $u' \in \vartheta(x')$ tels que $u \cap u' = \varnothing$, c-à-d $x \in u \subset \complement_E^{u'}$, donc $\complement_E^{u'}$ est un voisinage fermé de x qui ne contient pas $x' \Rightarrow x' \notin A$, d'où $x' \in \complement_E^A$.

$2) \Rightarrow 3)$ Montrons que $\complement_{E\times E}^{\Delta}$ est ouvert. Soit $(x,x') \in \complement_{E\times E}^{\Delta}$, alors $x \neq x'$. D'après 2), $x' \notin A = \cap_{v \in \vartheta(x)} v$ (v fermé). Il existe donc un voisinage fermé v de x tel que $x' \notin v \Rightarrow x' \in \complement_E^v$, d'où $v \times \complement_E^v$ est un voisinage de (x,x') et $v \times \complement_E^v \subset \complement_{E\times E}^{\Delta}$.

$3) \Rightarrow 1)$ Soit $x \neq x'$, donc $(x,x') \notin \Delta \Rightarrow (x,x') \in \complement_{E\times E}^{\Delta}$ qui est un ouvert, il existe donc un ouvert $O \times O'$ de $E \times E$ tel que $(x,x') \in O \times O' \subset \complement_{E\times E}^{\Delta}$, c-à-d $O \cap O' = \varnothing$, donc E est séparé.

Exercice 3.7.9. *Un espace topologique est dit irréductible si deux ouverts non vides ont toujours un point commun. Soit E un espace topologique et $A \subset E$. Montrer qu'il y a équivalence entre*

$a)$ *A est irréductible (pour la topologie induite).*

$b)$ *Pour toute famille finie $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de E tel que $A \subset \cup_{i\in I} F_i$, il existe $i \in I$ tel que $A \subset F_i$.*

$c)$ *Si U et V sont deux ouverts de E rencontrant A alors $U \cap V$ rencontre A.*

$d)$ *$\overline{A}$ est irréductible.*

Solution

$a) \Rightarrow b)$ Supposons que A est irréductible. Soient F_1 et F_2 deux fermés de E tels que $A \subset F_1 \cup F_2$.

- Si $A \cap F_1 = \varnothing$ ou $A \cap F_2 = \varnothing$, c'est fini.

- Si $A \cap F_1 \neq \varnothing$ et $A \cap F_2 \neq \varnothing$, alors $A \cap \complement_E^{F_1} \neq \varnothing$ et $A \cap \complement_E^{F_2} \neq \varnothing$. On a $A \cap \complement_E^{F_1}$ et $A \cap \complement_E^{F_2}$ sont deux ouverts de A et comme A est irréductible, alors $A \cap \complement_E^{F_1} \cap \complement_E^{F_2} \neq \varnothing$, par suite $A \cap \complement_E^{F_1 \cup F_2} \neq \varnothing$. Impossible car $A \subset F_1 \cup F_2$.

$b) \Rightarrow c)$ Soient U et V deux ouverts tels que $A \cap U \neq \varnothing$ et $A \cap V \neq \varnothing$. Supposons que $U \cap V \cap A = \varnothing$, donc $A \subset \complement_E^{U \cap V} = \complement_E^U \cup \complement_E^V$. D'après l'hypothèse, $A \subset \complement_E^U$ ou $A \subset \complement_E^V$, donc $A \cap V = \varnothing$ ou $A \cap U = \varnothing$, absurde.

$c) \Rightarrow d)$ Soient $U \cap \overline{A} \neq \varnothing$ et $V \cap \overline{A} \neq \varnothing$ deux ouverts de $\overline{A}$, avec U et V sont deux ouverts de E. On a $U \cap \overline{A} \neq \varnothing \Rightarrow U \cap A \neq \varnothing$, car sinon, on a $U \cap \overline{A} \subset \overline{U \cap A} = \varnothing$ (voir l'exercice 2.7.5).

De même, $V \cap \overline{A} \neq \varnothing \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing$. D'après $c)$, $U \cap V \cap A \neq \varnothing$, donc $U \cap V \cap \overline{A} \neq \varnothing$.

$d) \Rightarrow a)$ Soient U et V deux ouverts de E tels que $U \cap A \neq \varnothing$ et $V \cap A \neq \varnothing$, donc $U \cap \overline{A} \neq \varnothing$ et $V \cap \overline{A} \neq \varnothing$. D'après $d)$, $U \cap V \cap \overline{A} \neq \varnothing$, donc $U \cap V \cap A \neq \varnothing$.

Exercice 3.7.10. *Soit E un ensemble et d une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que*

(α) $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

(β) $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = d(y,x).$

(γ) $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E,\ d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z)).$

1) *Montrer que l'application d est une distance sur E. Une telle distance est appelée distance ultramétrique.*

2) *Soient x,y,z trois points de E tels que $d(x,y) \neq d(y,z)$. Montrer que $d(x,z) = \sup(d(x,y), d(y,z))$.*

3) *Soient $x \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est un ensemble ouvert et que pour tout $y \in \overline{B}(x,r)$, la boule fermée $\overline{B}(y,r)$ est égale à $\overline{B}(x,r)$.*

4) *Soient $x \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x,r)$ est un ensemble fermé et que pour tout $y \in B(x,r)$, la boule ouverte $B(y,r)$ est égale à $B(x,r)$.*

Solution

1) On va montrer que d vérifie l'inégalité triangulaire. Comme d prend des valeurs positives, il est clair que

$$\forall x,y,z \in E,\ d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z)) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

2) Puisque $d(x,y) \neq d(y,z)$, on suppose $d(x,y) < d(y,z)$. D'après la propriété (γ), $d(x,z) \leq d(y,z)$ et $d(y,z) \leq \sup(d(y,x), d(x,z))$. Mais comme $d(y,x) < d(y,z)$, alors

la deuxième inégalité est forcément $d(y,z) \leq d(x,z)$, ce qui joint à la première donne : $d(x,z) = d(y,z) = \sup(d(x,y), d(y,z))$.

3) Si y est un élément de $\overline{B}(x,r)$ et z un élément de E tel que $d(y,z) < \frac{r}{2}$, on a $d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z))$, donc $z \in \overline{B}(x,r)$. Ceci prouve que la boule ouverte $B(y, \frac{r}{2}) \subset \overline{B}(x,r)$ et par suite $\overline{B}(x,r)$ est voisinage de chacun de ses points, donc c'est un ouvert de E.

Soit maintenant $y \in \overline{B}(x,r)$. Si $z \in \overline{B}(x,r)$, on a $d(y,z) \leq \sup(d(y,x), d(x,z)) \leq r$, donc $z \in \overline{B}(x,r)$ et $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,r)$.

Inversement, soit $u \in \overline{B}(y,r)$. On a $d(x,u) \leq \sup(d(x,y), d(y,u)) \leq r$, donc $u \in \overline{B}(x,r)$ et $\overline{B}(y,r) \subset \overline{B}(x,r)$. Par conséquent, $\overline{B}(x,r) = \overline{B}(y,r)$.

4) On va montrer que $B(x,r)$ contient tous ses points d'accumulation. Soient $(a_n)_n$ une suite convergente d'éléments de $B(x,r)$ et a la limite de cette suite. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x,a_n) < r$. Comme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(a,a_{n_0}) < \frac{r}{2}$. On a alors, $d(x,a) \leq \sup(d(x,a_{n_0}), d(a_{n_0},a)) < r$, ce qui prouve que a est un élément de $B(x,r)$ qui est donc une partie fermée de E.

Une démonstration analogue à celle de la question 3) montre que $B(x,r) = B(y,r)$.

CHAPITRE 4

ESPACES TOPOLOGIQUES COMPACTS, CONNEXES

4.1 Espaces compacts

4.1.1 Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 4.1.1.
- *Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$* ***recouvre*** *E (ou constitue* ***un recouvrement*** *de E) si $\cup_{i\in I}A_i = E$.*

- *Si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement d'un ensemble E, une sous-famille $(A_i)_{i\in J}$ $(J \subset I)$ de la famille $(A_i)_{i\in I}$, qui est elle même un recouvrement de E s'appelle un* ***sous-recouvrement*** *de E du recouvrement $(A_i)_{i\in I}$.*

- *Un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E est* ***fini*** *si l'ensemble d'indices I est fini.*

- *Lorsque (E,τ) est un espace topologique, un recouvrement de E constitué d'ouverts de E s'appelle un* ***recouvrement ouvert*** *de E.*

Définition 4.1.2. *Soit E un espace topologique. On dit que E satisfait la propriété de* ***Borel-Lebesgue*** *si*

« De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini».

Autrement dit :
$\forall (O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $\cup_{i\in I}O_i = E$, $\exists J \subset I$, avec J fini, tel que $\cup_{i\in J}O_i = E$.

Définition 4.1.3. *Un espace topologique (E,τ) est dit* ***compact*** *si :*

1) *E est séparé.*

2) *E vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.*

Exemples 4.1.4.

a) *Si E est fini et muni de la topologie discrète, alors E est compact. En effet, E est bien séparé et si $E = \cup_{i\in I}O_i$, alors pour tout $x \in E$, il existe $i_x \in I$ tel que $x \in O_{i_x} \Rightarrow E = \cup_{x\in E}O_{i_x}$ qui est un recouvrement fini.*

b) *Si E est infini et discret, alors E n'est pas compact, car du recouvrement de E par la famille d'ouverts $(\{x\})_{x\in E}$ on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini.*

c) *$\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle n'est pas compact, car du recouvrement constitué de $(]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini (sinon $\mathbb{R}$ serait borné).*

Proposition 4.1.5. *Un espace topologique E est compact si et seulement si*

- *E est séparé.*
- *De toute famille de fermés de E dont l'intersection est vide on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide. Autrement dit :*

  $\forall (F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E qui est telle que $\cap_{i\in I} F_i = \varnothing$, $\exists J \subset I$ avec J fini tel que $\cap_{i\in J} F_i = \varnothing$

Démonstration. Immédiate (par passage aux complémentaires dans E). □

Définition 4.1.6. *Une partie A d'un espace topologique E est une partie compacte de E si le sous-espace topologique A de E est compact. On dit que A est compacte dans E ou que c'est un compact de E.*

On dit qu'une partie A de E est relativement compacte si $\overline{A}$ est compact.

Proposition 4.1.7. *Soit E un espace topologique séparé. Pour qu'une partie A de E soit compacte dans E il faut et il suffit que, pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $A \subset \cup_{i\in I} O_i$, il existe $J \subset I$, avec J fini, tel que $A \subset \cup_{i\in J} O_i$.*

Démonstration. E est séparé, donc A est séparé.

$\Rightarrow$) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $A \subset \cup_{i\in I} O_i$, alors on a $A = A \cap \cup_{i\in I} O_i = \cup_{i\in I}(A \cap O_i)$. Comme A est compacte, il existe $J \subset I$, avec J fini, tel que $A = \cup_{i\in J}(A \cap O_i) = A \cap \cup_{i\in J} O_i$, donc $A \subset \cup_{i\in J} O_i$.

$\Leftarrow$) Soit $(W_i)_{i\in I} = (O_i \cap A)_{i\in I}$ un recouvrement de A par une famille d'ouverts de A, c-à-d $A = \cup_{i\in I}(O_i \cap A)$, donc $A \subset \cup_{i\in I} O_i$. Par l'hypothèse, il existe $J \subset I$ (J fini) tel que $A \subset \cup_{i\in J} O_i$, ce qui montre que $A = \cup_{i\in J}(A \cap O_i) = \cup_{i\in J} W_i$, d'où A est compacte. □

Remarque 4.1.8. *Si E est un espace topologique et $B \subset A \subset E$, avec A et B sont deux parties de E, alors B est compact dans A si et seulement si B et compact dans E. En effet, les topologies de E et de A induisent la même topologie sur B.*

4.1.2 Propriéités des espaces topologiques compacts

Définition 4.1.9. *Soit E un espace topologique. On dit que deux parties A et B de E sont topologiquement disjoints, s'il existe $v_A \in \vartheta(A)$ et $v_B \in \vartheta(B)$ deux voisinages disjoints de A et B tels que $v_A \cap v_B = \varnothing$.*

Exemple 4.1.10. *Dans un espace topologique séparé, si $x \neq y$ alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont topologiquement disjoints.*

Lemme 4.1.11. *Soient E un espace topologique séparé et K un compact de E. Pour tout $k' \notin K$, on a $\{k'\}$ et K sont topologiquement disjoints.*

Démonstration. E étant séparé, soit $k \in K$, alors $k \neq k'$, il existe donc deux voisinages $u_k \in \vartheta(k)$ et $u'_k \in \vartheta(k')$ tels que $u_k \cap u'_k = \varnothing$. Comme K est compact et $K \subset \cup_{k \in K} u_k$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset \cup_{i=1}^{n} u_{k_i} = v_K$ (c'est un voisinage de K) et on prend $v_{k'} = \cap_{i=1}^{n} u'_{k_i}$ (c'est un voisinage de k'). On a donc $v_K \cap v_{k'} = \varnothing$. □

Théorème 4.1.12. *1) Toute partie **compacte** K d'un espace topologique séparé E est **fermée** dans E.*

*2) Toute partie **fermée** F d'un espace compact est **compacte**.*

Démonstration. 1) Montrons que K est un fermé de E, cela revient à montrer que $\complement_E^K$ est un ouvert de E. Soit $k' \in \complement_E^K$, c-à-d $k' \notin K$, alors d'après le lemme précédent, il existe deux voisinages $v_{k'} \in \vartheta(k')$ et $v_K \in \vartheta(K)$ de k' et K tels que $v_{k'} \cap v_K = \varnothing$. Par suite, on a $v_{k'} \cap K = \varnothing \Rightarrow k' \in v_{k'} \subset \complement_E^K$, donc $\complement_E^K$ est voisinage de chacun de ses points, il vient donc que $\complement_E^K$ est un ouvert et K est fermé.

2) Montrons que F est compacte. Comme E est compact, alors F est séparé.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de F, qui sont aussi des fermés de E (car F est fermé), telle que $\cap_{i \in I} F_i = \varnothing$. Or, E est compact, il existe donc $J \subset I$, J fini, tel que $\cap_{i \in J} F_i = \varnothing$, d'où le résultat. □

Attention ! Il n'est pas vraie que tout fermé d'un espace séparé est compact.

Théorème 4.1.13. *(de Borel-Lebesgue) Tout intervalle fermé et borné $[a,b]$ ($a < b$) de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration. $\mathbb{R}$ est séparé. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ qui est telle que $[a,b] \subset \cup_{i \in I} O_i$.

Considérons lensemble $F = \{x \in [a,b] / \exists J_x \text{ fini } \subset I \text{ vérifiant } [a,x] \subset \cup_{i \in J_x} O_i\}$. On a $F \neq \varnothing$ (car $a \in F$) et F est majoré par b, donc F possède une borne supérieure $c = \sup F$, avec $c \in [a,b]$, par suite ils existent $i_c \in I$ et $\varepsilon > 0$ tels que $c \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset O_{i_c}$ (car O_{i_c} est ouvert). Or, d'après la définition de la borne supérieure, pour notre $\varepsilon > 0$, il existe $x \in F$ tel que $x \in]c-\varepsilon, c]$. Il vient donc que $[a,x] \subset \cup_{i \in J_x} O_i$ et $]x, c+\frac{\varepsilon}{2}] \subset]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset O_{i_c}$, donc $[a, c+\frac{\varepsilon}{2}] \subset \cup_{i \in J} O_i$, avec $J = J_x \cup \{i_c\}$, et par suite $[a,b] \cap [a, c+\frac{\varepsilon}{2}] \subset F \subset [a,c]$, ceci implique que $[a, \inf(b, c+\frac{\varepsilon}{2}] \subset [a,c]$, qui donne $b = c$, donc $b \in F$. D'où, il existe J_b fini $\subset I$ tel que $[a,b] \subset \cup_{i \in J_b} O_i$. □

Proposition 4.1.14. *Pour qu'une partie K de $\mathbb{R}$ soit compacte de $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que K soit fermé et borné.*

Démonstration. $\Rightarrow$) Si K est compacte dans $\mathbb{R}$, alors elle est fermée (car $\mathbb{R}$ est séparé). Reste à montrer que K est bornée. On a $K \subset \cup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n[$, et comme K est compacte, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset \cup_{i=1}^{p}]-n_i, n_i[=]-q, q[$, donc K est bornée, avec $q = \sup\{n_i / 1 \leq i \leq p\}$.

$\Leftarrow$) Puisque K est bornée, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $K \subset [a,b]$. De plus, puisque K est fermée dans $\mathbb{R}$, alors K est un fermé de $[a,b]$. Or, $[a,b]$ est compact, donc K est un compact de $[a,b]$, d'où K est un compact de $\mathbb{R}$. □

4.2 Compacité et continuité

Théorème 4.2.1. *Soit $f : E \to F$ une application continue d'un espace topologique* <u>*compact*</u> *E dans un espace topologique* <u>*séparé*</u> *F. Alors $f(E)$ est une partie compacte de F.*

Démonstration. Comme F est séparé, alors $f(E)$ est séparé. Il suffit de montrer donc que de tout recouvrement généralisé de $f(E)$ par une famille d'ouverts de F on peut extraire un sous-recouvrement généralisé fini.

Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de F telle que $f(E) \subset \cup_{i\in I} O_i$, alors on a $E \subset f^{-1}(\cup_{i\in I} O_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$, par suite $E = \cup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$. Or, $f^{-1}(O_i)$, $i \in I$, sont des ouverts de E qui est compact, il vient donc qu'il existe $J \subset I$, J est fini, tel que $E = \cup_{i\in J} f^{-1}(O_i)$ ce qui implique que $f(E) = f(\cup_{i\in J} f^{-1}(O_i)) = \cup_{i\in J} f(f^{-1}(O_i)) \subset \cup_{i\in J} O_i$. □

Corollaire 4.2.2. *a) Tout espace homéomorphe à un espace topologique compact est compact (on dit que la compacité est une propriété topologique).*

b) Toute bijection continue f d'un espace topologique compact E dans un espace topologique séparé F est un homéomorphisme.

Démonstration. a) est immédiat.

b) Il suffit de montrer que f est fermé. Soit A une partie fermée de E (qui est compact), alors A est compacte dans E, par suite $f(A)$ est compacte dans F (car f est continue). Or, F est séparé, donc $f(A)$ est fermée et f^{-1} est continue. □

Théorème 4.2.3. *Toute application continue f d'un espace topologique compact E dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. On a $f : E \to \mathbb{R}$, avec E est compact et $\mathbb{R}$ est séparé, alors $f(E)$ est un compact de $\mathbb{R}$, c'est donc un fermé et borné <u>de</u> $\mathbb{R}$. Soient $m = \inf_{x\in E} f(x)$ et $M = \sup_{x\in E} f(x)$. Comme $f(E)$ est fermée et $m, M \in \overline{f(E)}$, alors $m, M \in f(E)$. □

Lemme 4.2.4. *Soient E et F deux espace topologique et $a \in E$. Alors $\{a\} \times F$ et F sont homéomorphes.*

Démonstration. Considérons l'application $i_a : F \to \{a\} \times F$, $i_a(x) = (a, x)$. On a i_a est bijective et continue car ses composantes le sont. De plus, l'injection $i : \{a\} \times F \to E \times F$ et la projection $pr : E \times F \to F$ sont continues et $i_a^{-1} : \{a\} \times F \to F$ vérifie $i_a^{-1} = pr \circ i$, donc continue. □

Théorème 4.2.5. ***(de Tychonoff)*** *Tout produit fini d'espaces topologiques compacts et compact.*

Démonstration. Il suffit de montrer le théorème pour le produit de deux espaces. Soit $E = E_1 \times E_2$ le produit de deux espaces compacts E_1 et E_2.

- E est séparé (proposition 3.5.7).

- Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Pour tout $m = (x,y) \in E$, il existe $i_m \in I$ tel que $m \in O_{i_m}$ et il existe deux voisinages ouverts $V_m \in \vartheta(x)$ et $W_m \in \vartheta(y)$ de x et y tels que $m = (x,y) \in V_m \times W_m \subset O_{i_m}$.

Soit $U_m = V_m \times W_m$ et soit $x \in E_1$, le sous-espace $E_x = \{x\} \times E_2$ de $E_1 \times E_2$ est homéomorphe à E_2 (lemme précédent), il est donc compact et $E_x \subset \cup_{m\in E_x} U_m$, il vient donc qu'il existe $J_x \subset E_x$ tel que J_x est fini et $E_x \subset \cup_{m\in J_x} U_m$. Soit $V_x = \cap_{m\in J_x} V_m$, c'est un voisinage ouvert de x et on a $V_x \times E_2 \subset V_x \times \cup_{m\in J_x} W_m \subset \cup_{m\in J_x} U_m \subset \cup_{m\in J_x} O_{i_m}$.

Or, $E_1 \subset \cup_{x\in E_1} V_x$ et comme E_1 est compact, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $E_1 \subset \cup_{r=1}^{p} V_{x_r}$, donc $E = E_1 \times E_2 \subset \cup_{r=1}^{p} V_{x_r} \times E_2 \subset \cup_{r=1}^{p} \cup_{m\in J_{x_r}} O_{i_m}$.

Soit $J = \cup_{r=1}^{p} J_{x_r}$, on a J est fini et $E = E_1 \times E_2 \subset \cup_{m\in J} O_{i_m}$, d'où $E = E_1 \times E_2$ est compact. □

Corollaire 4.2.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont exactement ses parties fermées et bornées.*

Démonstration. $\Rightarrow$) Supposons que $A = [a,b] \times [c,d]$ est compacte. Soit $z_n = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de A, alors il existe une sous suite (x_{n_k}) de (x_n) convergeant vers $\ell \in [a,b]$, et il existe une sous suite $(y_{n_{k_i}})$ de (y_{n_k}) convergeant vers $\ell' \in [c,d]$. Par suite, on a (z_n) admet une sous suite $(z_{n_{k_i}})$ qui converge vers $(\ell, \ell') \in A$.

$\Leftarrow$) Soit K une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$, donc il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que $K \subset \overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \max\limits_{1\le i\le n} |a_i - x_i| \le r\} = \prod_{i=1}^{n} [a_i - r, a_i + r]$. Comme, pour tout $i = 1,\dots,n$, $[a_i - r, a_i + r]$ est un compact de $\mathbb{R}$, alors K est compact comme fermé dans un compact. □

4.3 Espaces métriques compacts, complets

4.3.1 Espaces métriques compacts

Soit (E,d) un espace métrique.

Lemme 4.3.1. *Si toute suite de points de l'espace métrique (E,d) admet au moins une valeur d'adhérence, alors pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de E on a :*

$$\exists r > 0,\ \forall x \in E,\ \exists i \in I \text{ tel que } B(x,r) \subset O_i.$$

Démonstration. Supposons le contraire : Pour tout $r > 0$, il existe $x \in E$ tel que, pour tout $i \in I$, $B(x,r)$ n'est pas contenue dans O_i. Donc en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que, pour tout $i \in I$, $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est pas contenue dans O_i.

Par hypothèse, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet un point d'adhérence $\alpha \in E$, donc il existe $j \in I$ tel que $\alpha \in O_j$ et par suite, il existe $\ell > 0$ tel que $B(\alpha, \ell) \subset O_j$. Or, α est la limite d'une sous-suite $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc il existe $i_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(\alpha, x_{n_i}) < \frac{\ell}{2}$, pour tout $i \geq i_1$. De plus, il existe $i_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_i} < \frac{\ell}{2}$, pour tout $i \geq i_2$. Il vient que, pour tout $i \geq \max(i_1, i_2)$, $B(x_{n_i}, \frac{1}{n_i}) \subset B(\alpha, \ell) \subset O_j$. En effet, si $x \in B(x_{n_i}, \frac{1}{n_i})$, alors $d(x_{n_i}, x) < \frac{1}{n_i} < \frac{\ell}{2}$, par suite $d(\alpha, x) \leq d(\alpha, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \ell$. Contradiction. □

Théorème 4.3.2. ***(de Bolzano-Weierstrass)*** *Soit (E,d) un espace métrique. Alors E est compact si et seulement si toute suite infinie de points de E admet au moins une valeur d'adhérence.*

Démonstration. $\Rightarrow$) (vrai dans tout espace topologique). Soit E un espace compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \{x_k / \ k \geq n\}$.

On sait que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n = \{$ des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$, il s'agit donc de montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n \neq \varnothing$.

Supposons que $\cap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n = \varnothing$, puisque E est compact et $(\overline{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties fermées non vides de E, alors il existe des entiers $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$ tels que $\cap_{i=1}^{p}\overline{A}_{n_i} = \varnothing$, ce qui donne $\overline{A}_{n_p} = \varnothing$. Absurde.

$\Leftarrow$) (E,d) étant séparé, il suffit de prouver que tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de E admet un sous-recouvrement fini. D'après le lemme précedent (lemme 4.4.6), il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $B(x,r)$ est contenue dans au moins un O_i, il suffit donc de montrer qu'on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement $(B(x,r))_{x\in E}$.

Raisonnons par l'absurde : Soit $x_1 \in E$, alors $B_1 = B(x_1, r) \neq E$, donc il existe $x_2 \in E$ et $x_2 \notin B_1$ $(x_2 \in E - B_1)$. Soit $B_2 = B(x_2, r)$, alors $B_1 \cup B_2 \neq E$, donc il existe $x_3 \in \complement_E^{B_1\cup B_2}$ et de proche en proche on va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $x_n \notin \cup_{i=1}^{n-1} B_i$. On a alors pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \neq q$, $d(x_p, x_q) \geq r$ (car, si $p > q$, $x_q \notin B(x_p, r)$). Il en résulte que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de valeur d'adhérence. Absurde. En effet, si α valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors $I = \{n \in \mathbb{N} / \ x_n \in B(\alpha, \frac{r}{2})\}$ est infini. Soient $p, q \in I$, $p \neq q$, donc $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, \alpha) + d(\alpha, x_q) < r$, ce qui contredit la construction de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. □

Proposition 4.3.3. *Tout espace métrique compact (E,d) est séparable.*

Démonstration. On suppose que (E,d) est compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(B(x, \frac{1}{n}))_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E et on peut extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc une partie fini $A_n \subset E$ telle que $E = \cup_{x\in A_n} B(x, \frac{1}{n})$. Soit $A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, alors A est dénombrable. Montrons que A est dense dans E. Pour cela, soient $x_0 \in E$, $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ avec $\frac{1}{n} \leq r$.

On a $x_0 \in E = \cup_{x\in A_n} B(x, \frac{1}{n})$, alors il existe $x \in A_n$ tel que $x_0 \in B(x, \frac{1}{n})$, donc $x \in B(x_0, \frac{1}{n}) \subset B(x_0, r)$ et par suite, $x \in B(x_0, r) \cap A$, d'où $B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$ et A est dense dans E. □

Théorème 4.3.4. ***(de Heine)*** *Toute application continue f d'un espace métrique compact (E,d) dans un espace métrique (F,δ) est uniformément continue.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, il existe $x_n \in E$ et $x'_n \in E$ tels que $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$.

Comme (E,d) est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une valeur d'adhérence α ou encore, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α. par suite, $d(x'_{n_k}, \alpha) \leq d(x'_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \alpha) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, \alpha)$, et comme $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \alpha$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} x'_{n_k} = \alpha$. Or, f est continue en α, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(x'_{n_k}) = f(\alpha)$. Par suite, il existe n_{k_0} assez grand tel que $\delta(f(x_{n_{k_0}}), f(x'_{n_{k_0}})) < \varepsilon$, ce qui est absurde. □

4.3.2 Espaces métriques complets

Définition 4.3.5. *Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de points de E est de Cauchy dans E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Autrement dit :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0), d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Remarque 4.3.6. *a) La propriété précédente est équivalente à*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}), d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

b) Toute suite de Cauchy est bornée, cela résulte nécessairement du fait que pour $n \geq n_0$, $x_n \in \overline{B}(x_{n_0}, \varepsilon)$ et $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$ sont en nombre fini.

c) Soit $S_n = \{x_n, \ldots, x_{n+p}, \ldots\}$. On a $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(S_n) = 0$, où $\delta(S_n)$ est le diamètre de S_n.

d) Toute suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque est fausse. Prendre $E =]0,1]$ muni de la distance usuelle, la suite $(\frac{1}{n})$ est de Cauchy dans E mais ne converge pas dans E.

Proposition 4.3.7. *Dans un espace métrique (E,d), pour qu'une suite de Cauchy soit convergente il faut et il suffit qu'elle admette une valeur d'adhérence et une seule.*

Démonstration. $\Rightarrow$) est évident.

$\Leftarrow$) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geq n_0$ on ait $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence α, il existe $m_0 \geq n_0$ tel que $d(x_{m_0}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$. Il vient que pour tout $n \geq n_0$, $d(x_n, \alpha) \leq d(x_n, x_{m_0}) + d(x_{m_0}, \alpha) < \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. □

Définition 4.3.8. *On dit qu'un espace métrique (E,d) est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy dans (E,d) est convergente dans (E,d).*

Exemples 4.3.9. *a) $\mathbb{R}$ est complet. En effet, soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors $(x_n)_n$ est bornée, donc ses points sont tous dans un intervalle compact $[a,b]$.*

Par suite, $(x_n)_n$ *admet une valeur d'adhérence* $\alpha \in [a,b]$*. Il en résulte, d'après la proposition 4.3.7, que* $(x_n)_n$ *est convergente.*

b) *E muni de la (topologie) distance discrète est complet, car toute suite de Cauchy est stationnaire, donc convergente.*

c) *Le sous-espace* $]0,1]$ *de* $\mathbb{R}$ *n'est pas complet, considérer la suite* $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème 4.3.10. 1) *Tout espace métrique compact* (E,d) *est complet.*

2) *Tout sous-espace métrique* ***fermé*** *A d'un espace métrique complet E est* ***complet****.*

3) *Tout sous-espace métrique* ***complet*** *d'un espace métrique E (E complet ou non) est* ***fermé****.*

Démonstration. 1) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Comme E est compact, alors $(x_n)_n$ admet une valeur d'adhérence dans E, elle est donc convergente d'après la proposition 4.3.7, donc E est complet.

2) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans A, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers un point $\alpha \in E$. Comme A est fermé on a $\alpha \in A$, il en résulte que $(x_n)_n$ converge vers α dans A, donc A est complet.

3) Soit α la limite dans E d'une suite $(x_n)_n$ de points de A qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers $\alpha' \in A$, par suite $(x_n)_n$ converge vers α' dans E qui est séparé, et l'unicité de la limite donne $\alpha = \alpha'$. □

Corollaire 4.3.11. *Les sous-espaces métriques complets d'un espace métrique complet E sont les sous-espaces métriques fermés de E.*

Remarque 4.3.12. *Le sous-espace métrique* $\mathbb{Q}$ *de* $\mathbb{R}$ *n'est pas complet, car* $\mathbb{Q}$ *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$.

Définition 4.3.13. *Soient* (E,d) *un espace métrique et* $f : E \to E$ *une application. On dit que f est une contraction s'il existe une constante k,* $0 < k < 1$*, telle que pour tous* $x,y \in E$, $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x,y)$.

Remarque 4.3.14. *Toute contraction f d'un espace métrique E est uniformément continue, donc continue.*

Théorème 4.3.15. *Toute contraction f d'un espace métrique complet E admet un point fixe unique.*

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_n = f(x_{n-1})$. On a pour tout $n \geq 1$, $d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n,x_{n-1})$, il vient donc que $d(x_{n+1},x_n) \leq k^n d(x_1,x_0)$. Par suite, pour tous $n,p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+p},x_n) \leq \sum_{i=1}^{p} d(x_{n+i},x_{n+i-1}) &\leq \sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1} d(x_1,x_0) \\ &= k^n \frac{1-k^p}{1-k} d(x_1,x_0) < k^n \frac{d(x_1,x_0)}{1-k}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+p}, x_n) < k^n \frac{d(x_1,x_0)}{1-k} < \varepsilon$, il en résulte que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E (qui est complet), donc il existe $\alpha \in E$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_{n-1} = \alpha$. Comme f est une contraction (donc continue), alors on a $f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$, d'où α est un point fixe pour f.

Soit α' un point fixe de f tel que $\alpha \neq \alpha'$, donc on a $d(\alpha,\alpha') = d(f(\alpha), f(\alpha')) \leq kd(\alpha,\alpha') < d(\alpha,\alpha')$. Impossible, d'où l'unicité du point fixe. □

Remarque 4.3.16. *a) Le théorème est faux si (E,d) n'est pas un espace complet. Prendre $E =]0,1[$ et $f(x) = \frac{x}{2}$, on a f est une contraction, mais son point fixe est $0 \notin E$.*

b) Le théorème est faux si $k \geq 1$. Prendre :

(i) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x+1$ (on a $k = 1$), mais f n'a pas de point fixe.

(ii) $E = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$ (on a $k = 1$) et il y a une infinité de points fixes.

4.4 Espaces connexes

4.4.1 Définitions et propriétés

E désigne un espace topologique et $\{0,1\}$ sera muni de la topologie induite.

Définition 4.4.1. *1) On dit que E est **connexe**, s'il n'existe pas de partition de E formée de deux ouverts de E.*

2) Une partie $A \subset E$ est connexe si le sous-espace topologique A de E est connexe.

3) Une partie $D \subset E$ est un domaine si D est ouverte et connexe.

Remarque 4.4.2. *Si $B \subset A \subset E$, alors B est une partie connexe de A si et seulement si B est une partie connexe de E.*

Exemples 4.4.3. *- $\varnothing$ et connexe ; $\{x\}$ est connexe ;*

- E muni de la topologie grossière est connexe ;

- Tout espace topologique discret possédant au moins deux points n'est pas connexe.

Proposition 4.4.4. *Les propriétés suivantes son équivalentes.*

1) E est connexe.

2) Il n'existe pas de partition de E formée de deux fermés.

3) Les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et E.

4) Toute application continue de E dans $\{0,1\}$ *est constante.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) Supposons qu'il existe F_1 et F_2 deux fermées de E telles que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $E = F_1 \cup F_2$, donc $\complement_E^{F_1}$ et $\complement_E^{F_2}$ sont deux ouvertes qui forment une partition de E, absurde.

2) $\Rightarrow$ 3) S'il existe une partie $A \neq \varnothing$, $A \neq E$ et A est à la fois ouverte et fermée, alors A et $\complement_E^A$ (qui sont deux fermées) forment une partition de E, absurde.

3) $\Rightarrow$ 4) Soit f une application continue non constante de E dans $\{0,1\}$, on a $\{0\}$ est à la fois ouvert et fermé de $\{0,1\}$, donc $f^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$ et $f^{-1}(\{0\}) \neq E$ et c'est ouvert et fermé à la fois de E, ce qui est absurde.

4) $\Rightarrow$ 1) Supposons que E n'est pas connexe, donc il existe deux ouverts non vides et disjoints O_1 et O_2 tels que $O_1 \cup O_2 = E$. Considérons l'application $f : E \to \{0,1\}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in O_1 \\ 1 & \text{si } x \in O_2 \end{cases} \qquad (\forall x \in E).$$

Cette application f est continue sur E puisque l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ est un ouvert de E (en effet $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(\{0\}) = O_1$, $f^{-1}(\{1\}) = O_2$ et $f^{-1}(\{0,1\}) = E$ sont des ouverts de E), mais f n'est pas constante. □

Définition 4.4.5. *Une application f d'un espace topologique E vers un espace topologique F est localement constante si et seulement si pour tout* $x \in E$*, il existe un voisinage de x sur lequel f prend la même valeur* $f(x)$*.*

Lemme 4.4.6. *Soient E et* E' *deux espaces topologiques avec* E' *est discret. Alors toute application continue* $f : E \to E'$ *est localement constante.*

Démonstration. Soient $x \in E$ et $x' = f(x)$. Puisque E' est discret alors $\{x'\}$ est un voisinage de x' dans E'. La continuité de f implique que $v = f^{-1}(\{x'\})$ est un voisinage de x dans E et on a pour tout $y \in v$, $f(y) = x'$. □

Définition 4.4.7. *Une partie A de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si pour tous* $a,b \in A$ *tels que* $a \leq b$*, on a* $[a,b] \subset A$*.*

Théorème 4.4.8. *Les parties connexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles de* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. Soit A une partie connexe de $\mathbb{R}$, si A n'est pas intervalle il existerait $(a,b) \subset A \times A$ tel que $[a,b]$ n'est pas inclus dans A, par suite il existerait $c \in]a,b[$ tel que $c \notin A$, donc $]-\infty, c[\cap A$ et $]c, +\infty[\cap A$ est une partition de A formée de deux ouverts de A, ce qui est absurde.

Réciproquement, soit $A = [\alpha, \beta]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\alpha = \beta$, alors A réduit à un point donc connexe. Si $\alpha < \beta$, soit φ une application continue de A vers $\{0,1\}$. On va montrer que φ est constante. Pour cela, soient $a,b \in A$ tels que $a < b$ et considérons $B = \{x \in [a,b] / \ \varphi(x) = \varphi(a)\}$. $B \neq \varnothing$ (car $a \in B$) et majorée par b, soit $c = \sup B$. On a

$B = \varphi^{-1}(\{\varphi(a)\})$ est un fermé de E, or $c = \sup B \in \overline{B} = B$, et d'après le lemme précédent (lemme 4.4.6), $\varphi : E \to \{0,1\}$ est localement constante, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, $\varphi(x) = \varphi(c) = \varphi(a)$, il vient que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\cap [a,b] \subset B \subset [a,c]$, ceci donne $b = c$ et $b \in B$, donc $\varphi(b) = \varphi(a)$, par conséquent φ est constante. □

Remarque 4.4.9. - *$\mathbb{R}$ est connexe.*

- *$\mathbb{Q}$ n'est pas connexe, car tout intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ contient un irrationnel donc $[a,b]$ n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}$.*
- *$\complement_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ n'est pas connexe.*

Théorème 4.4.10. *Soit $f : E \to F$ une application continue d'un espace topologique connexe E dans un espace topologique F. Alors $f(E)$ est une partie connexe de F. Brièvement dit : L'image d'un connexe par une application continue est connexe.*

Démonstration. Soient $A = f(E)$ et $\varphi : A \to \{0,1\}$ une application continue. On a $\varphi \circ f$ est continue, donc $\varphi \circ f$ est constante sur E. Par suite, si $a_1, a_2 \in f(E)$ alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $a_1 = f(x_1)$ et $a_2 = f(x_2)$, donc $\varphi(a_1) = \varphi \circ f(x_1) = \varphi \circ f(x_2) = \varphi(a_2)$, d'où φ est constante et $A = f(E)$ est connexe. □

Corollaire 4.4.11. *a) Tout espace homéomorphe à un espace connexe est connexe.*

b) L'image d'un espace connexe E par une application continue $f : E \to \mathbb{R}$ est un intervalle.

Proposition 4.4.12. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique E. Si les A_i sont deux à deux non disjoints, alors $A = \cup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $\varphi : A \to \{0,1\}$ une application continue. Pour tout $i \in I$, l'application $\varphi/A_i : A_i \to \{0,1\}$ est continue sur A_i, or A_i est connexe, donc φ prend une valeur constante $\lambda_i \in \{0,1\}$ dans A_i.

Soient $i, j \in I$, alors il existe $a \in A_i \cap A_j \neq \varnothing$, donc $\lambda_i = f(a) = \lambda_j$, d'où φ est constante dans A. □

Corollaire 4.4.13. *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes d'un espace topologique E telle que $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, alors $A = \cup_{i \in I} A_i$ est connexe.*

Lemme 4.4.14. *Soit $\varphi : E \to F$ une application continue d'un espace topologique E dans un espace topologique discret F. Si φ est constante dans une partie A dense sur E, alors elle est constante dans E.*

Démonstration. Soit x'_0 la seule valeur prise par φ dans A, alors $\varphi^{-1}(\{x'_0\})$ est un fermé de E qui contient A, donc contient aussi $\overline{A} = E$, d'où φ est constante dans E. □

Proposition 4.4.15. *Soient E un espace topologique et $A \subset E$ une partie connexe. Alors toute partie B de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. Soit $\varphi : B \to \{0,1\}$ une application continue, alors $\varphi/A : A \to \{0,1\}$ est continue (A est connexe), donc φ est constante dans A. Il suffit, d'après le lemme précédent (lemme 4.4.14), de montrer que A est dense dans B, ce qui est vraie car $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B = B$. $\square$

Remarque 4.4.16. *L'adhérence d'une partie connexe d'un espace topologique E est connexe.*

4.4.2 Composantes connexes

Définition 4.4.17. *On dit que deux points x et y d'un espace topologique E sont connectés dans E, s'il existe une partie connexe de E qui les contient.*

Proposition 4.4.18. *La relation "x et y sont connectés dans E" (qu'on note $x \equiv y$) est une relation d'équivalence sur E.*

Démonstration. - Réflixivité : Pour tout $x \in E$, $x \equiv x$ car x et x appartiennent à $\{x\}$.

- Symétrie : évidente.

Transitivité : Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \equiv y$ et $y \equiv z$, alors il existe deux parties connexes A et B de E telles que $x, y \in A$ et $y, z \in B$. On a donc $x, z \in A \cup B$ qui est connexe, car $y \in A \cap B \neq \varnothing$. $\square$

Notation : On notera $C(x)$ la classe d'équivalence de $x \in E$.

Proposition 4.4.19. *Soient E un espace topologique et $x_0 \in E$, alors $C(x_0)$ est la plus grande partie connexe de E qui contient $\{x_0\}$.*

Démonstration. Soit $(A_i)_{i \in I}$ la famille des parties connexes de E qui contiennent $\{x_0\}$ et soit $A = \cup_{i \in I} A_i$. On a :

- A est connexe (car $\{x_0\} \subset \cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$) et comme $x_0 \in A$, alors tous les points de A sont connectés à x_0. Ainsi, $A \subset C(x_0)$.

- Soit $x \in C(x_0)$, alors x appartient à une partie connexe contenant x_0, donc il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$, d'où $C(x_0) \subset A$. Ainsi, $C(x_0) = A$ qui est bien la plus grande partie connexe de E contenant $\{x_0\}$. $\square$

Définition 4.4.20. *Soient E un espace topologique et $x \in E$.*

1) *La composante connexe de $x \in E$ est la plus grande partie connexe de E contenant $\{x\}$, c-à-d $C(x)$.*

2) *Les composantes connexes de E sont les composantes connexes des points de E.*

Remarque 4.4.21. a) *Les composantes connexes d'un espace topologique E constituent une partition de E formées des parties connexes.*

b) *E est connexe si et seulement si E n'a qu'une seule composante connexe.*

Proposition 4.4.22. *Les composantes connexes d'un espace topologique E sont fermées dans E.*

Démonstration. Soit A une composante connexe dans E et soit $x \in A$. On a $\overline{A}$ est une partie connexe de E contenant $\{x\}$, ce qui entraine que $\overline{A} \subset A = C(x)$, donc A est fermée. □

4.4.3 Espaces connexes par arcs

Définition 4.4.23. *On appelle **arc** (ou chemin) dans un espace topologique E toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$. On dit que $\gamma(0)$ est l'origine de l'arc, $\gamma(1)$ son extrimité et $\Gamma' = \gamma([0,1])$ son image. On dit aussi que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont les extrimités de γ.*

Remarque 4.4.24. *L'image Γ' deγ est une partie connexe de E (car, c'est l'image du connexe $[0,1]$ par γ continue).*

Définition 4.4.25. *On dit qu'un espace topologique E est connexe par arcs si pour tous $x,y \in E$, il existe un arc $\gamma : [0,1] \to E$ d'origine x et d'extrimité y.*

Théorème 4.4.26. *Tout espace topologique E connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit $x_0 \in E$, pour tout $x \in E$ il existe un arc $\gamma : [0,1] \to E$ tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x$. Donc, x_0 et x appartiennent à l'image Γ' de γ (qui est connexe), par suite x_0 et x sont connectés dans E, c-à-d $x \in C(x_0)$, d'où E possède une seule composante connexe et E est connexe. □

Remarque 4.4.27. *Il existe des espaces topologiques connexes qui ne sont pas connexes par arcs. (Voir l'exercice 4.5.9)*

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1. *Soit E un espace topologique séparé.*

1) Montrer que la réunion de toute famille finie $(K_j)_{j\in J}$ de compactes de E est compacte.

2) Montrer que l'intersection de toute famille $(K_i)_{i\in I}$ de compactes de E est compacte.

3) a) Montrer que, si K et K' sont deux compacts disjoints de E, alors K et K' sont topologiquement disjoints.

b) En déduire que, si E est compact, alors deux parties disjointes et fermées F_1 et F_2 dans E sont topologiquement disjointes.

4) Montrer que, si $(x_n)_n$ est une suite d'élément de E convergeant vers $a \in E$, alors $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact.

Solution

1) Soit $F = \cup_{j\in J}K_j$ et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $F \subset \cup_{i\in I}O_i$, alors pour tout $j \in J$, $K_j \subset \cup_{i\in I}O_i$, et comme K_j est compact, il existe $I_j \subset I$, I_j fini, tel que $K_j \subset \cup_{i\in I_j}O_i$. Soit $I' = \cup_{j\in J}I_j$, alors $I' \subset I$, I' est fini et $F \subset \cup_{i\in I'}O_i$.

2) Pour tout $i \in I$, K_i est fermée dans E, donc $F' = \cap_{i\in I}K_i$ est fermée dans E. Fixons $i_0 \in I$, alors $F' \subset K_{i_0}$ et par suite, F' est fermée de K_{i_0}, il vient que F' est compacte dans K_{i_0}, donc F' est compacte dans E.

3) $a)$ Supposons que K et K' sont deux compacts disjoits tels que $K \cap K' = \varnothing$, alors pour tout $k' \in K'$ on a $k' \notin K$. D'après le cours (Lemme 4.1.11), il existe deux voisinages ouverts $v_{k'} \in \vartheta(k')$ et $u_{k'} \in \vartheta(K)$ de k' et K tels que $v_{k'} \cap u_{k'} = \varnothing$. Or, K' est compact et $K' \subset \cup_{k'\in K'}v_{k'}$, il existe donc $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $K' \subset \cup_{i=1}^{p} v_{k'_i} = O_{K'}$ (c'est un voisinage de K') et soit $O_K = \cap_{i=p}^{p} u_{k'_i}$ (c'est un voisinage de K) et on a $O_K \cap O_{K'} = \varnothing$.

$b)$ Si F_1 et F_2 sont deux parties fermées dans E (compact), alors elles sont compactes et on applique $a)$.

4) On a A est séparé, car E est séparé.

Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $A \subset \cup_{i\in I}O_i$. Montrons qu'il existe $J \subset I$, J fini, tel que $A \subset \cup_{i\in J}O_i$. puisque $a \in A$, alors il existe $j_0 \in I$ tel que $a \in O_{j_0}$ et par suite O_{j_0} est un voisinage de a. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in O_{j_0}$. De plus, pour tout $0 \leq k \leq n_0 - 1$, il existe $i_k \in I$ tel que $x_k \in O_{i_k}$. On a donc, $A \subset O_{j_0} \cup (\cup_{k=0}^{n_0-1} O_{i_k})$.

Exercice 4.5.2. *Montrer que dans un espace topologique compact, tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.*

Solution

Il suffit de montrer que, tout pont a de E admet un système fondamental de voisinages fermés.

Soit $(v_i)_{i\in I}$ la famille des voisinages fermés de a et soit w un voisinage ouvert de a. Supposons que w ne contient aucun voisinage fermé de a. On a $F = \complement_E^w$ est fermée dans E et puisque, pour tout $i \in I$, v_i n'est pas inclus dans w, alors $v_i \cap F \neq \varnothing$. Il vient donc que pour tout $J \subset I$, avec J est fini, $\cap_{i\in J}(v_i \cap F) = (\cap_{i\in J}v_i) \cap F \neq \varnothing$. Par suite, d'près la Proposition 4.1.5, $\cap_{i\in I}(v_i \cap F) \neq \varnothing$, donc $(\cap_{i\in I}v_i) \cap F \neq \varnothing$. Or, $a \in w$ et $a \notin F$, il existe donc $b \neq a$ tel que $b \in \cap_{i\in I}v_i$, absurde car E est séparé et $\cap_{i\in I}v_i = \{a\}$ (Exercice 3.7.8)

Exercice 4.5.3. *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application uniformément continue. Montrer que, si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E, alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans F.*

Solution

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x,y \in E$, $d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Or, $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n,m \geq n_0$, on a $d(x_n,x_m) < \eta$. On en déduit que pour tous $n,m \geq n_0$, $\delta(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon$, donc $(f(x_n))_n$ est de Cauchy.

Exercice 4.5.4. *Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E.*

1) Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$, où $\delta(F_n)$ est le diamètre de F_n, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est non vide et qu'il réduit à un point.

2) Le résultat de 1) est-il vrai si :

a) (E,d) n'est pas complet ?

b) $\delta(F_n)$ ne tend pas vers 0 ?

Solution

1) Soient, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in F_n$ (F_n est non vide). Comme $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $x_{n+p}\in F_{n+p}\subset F_n$, donc $d(x_{n+p},x_n)\leq\delta(F_n)$, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$, alors la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet, il vient que $(x_n)_n$ est convergente vers un point $a\in E$ vérifiant $a\in F=\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n$. En effet, soit $p\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq p$, $x_n\in F_p$, comme F_p est fermé, alors $a\in F_p$, donc $a\in F$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\delta(F)\leq\delta(F_n)$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$, alors $\delta(F)=0$, donc $F=\{a\}$.

2) $a)$ C'est faux. Prendre $E=]0,1]$ et $F_n=]0,\frac{1}{n+1}]$, on a $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés von vides de E et $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$, mais $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\varnothing$.

$b)$ C'est faux. Prendre $E=\mathbb{R}$ et $F_n=[n,+\infty[$, on a $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n=\varnothing$.

Exercice 4.5.5. *Soient (E,d) un espace métrique compact, $f:E\to E$ une application continue et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés de E. Montrer que*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}f(F_n)=f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n).$$

Solution

On a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n\subset F_n, \forall n\in\mathbb{N}$, donc $f(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n)\subset f(F_n), \forall n\in\mathbb{N}$, d'où $f(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n)\subset\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}f(F_n)$.

Inversement, soit $y\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}f(F_n)$, donc $y\in f(F_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Par suite, il existe $x_n\in F_n$ tel que $y=f(x_n)$. Il vient que $(x_n)_n$ est une suite d'élément de E qui est compact, donc il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers un point $x\in E$.

Comme $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $k\geq p$, $x_{n_k}\in F_p$ qui est fermé, donc $x\in F_p$ et par suite, $x\in\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}F_p$. Puisque f est continue, alors $f(x_{n_k})$ converge vers $f(x)$, d'où $y=f(x)\in f(\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}F_p)$. On obtient donc le résultat.

Exercice 4.5.6. *Soit (E,d) un espace métrique. On suppose qu'il existe un réel $r>0$ tel que, toutes les boules frmées de rayon r sont compactes dans E. Montrer que (E,d) est complet.*

Solution

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n,m \geq n_\varepsilon$, $d(x_n,x_m) < \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = r$ on a : $\forall n \geq n_r$, $d(x_n,x_{n_r}) < r \Rightarrow \forall n \geq n_r$, $x_n \in \overline{B}(x_{n_r},r) \Rightarrow (x_n)_{n\geq n_r} \subset \overline{B}(x_{n_r},r)$ qui est compacte, donc $(x_n)_{n\geq n_r}$ admet une valeur d'adhérence. Or $(x_n)_n$ est de Cauchy, elle converge donc vers cette valeur. Donc (E,d) est complet

Exercice 4.5.7. *Soient (E,d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g = f^n$ soit une contraction.*

1) *Montrer que f admet un point fixe unique a qui est aussi un point fixe de g.*

2) *Montrer que, si f est continue en a, alors $\lim\limits_{m\to+\infty} f^m(x) = a$, $\forall x \in E$.*

Solution

1) Comme g est contractante, alors il existe $a \in E$ tel que $g(a) = a$, c-à-d $f(g(a)) = f(a)$. Ainsi, $g(f(a)) = f^n(f(a)) = f(f^n(a)) = f(g(a)) = f(a)$, donc $f(a)$ est aussi un point fixe de g, d'où $f(a) = a$.

On suppose qu'il existe $b \in E$ tel que $f(b) = b$, alors $b = f(b) = f(f(b)) = ... = f^n(b) = g(b)$, c-à-d b est un point fixe de g, d'où $b = a$.

2) D'après le cours, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} g^p(x) = a, \forall x \in E$. Soit $m = np+r$, avec $0 \leq r \leq n-1$, on a donc $\lim\limits_{p\to+\infty} f^{np}(x) = a$. Puisque f est continue, alors $\lim\limits_{p\to+\infty} f^{np+1}(x) = f(a) = a$, ..., $\lim\limits_{p\to+\infty} f^{np+(n-1)}(x) = a$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} f^m(x) = a$.

Exercice 4.5.8. *Montrer que tout produit fini d'espaces topologiques connexes est connexe.*

Solution

Il suffit de montrer que le produit de deux espaces connexes est connexe. Soit $E = E_1 \times E_2$ le produit de deux espaces connexes E_1 et E_2.

Soit $f = E_1 \times E_2 \to \{0,1\}$ une application continue et soient $a = (a_1,a_2), b = (b_1,b_2) \in E_1 \times E_2$ et $c = (b_1,a_2)$, alors on a $a,c \in E_1 \times \{a_2\}$ qui est connexe, car il est homéomorphe à E_1, par suite $f : E_1 \times \{a_2\} \to \{0,1\}$ qui est continue est constante sur $E_1 \times \{a_2\}$, ce qui donne $f(a) = f(c)$. De même on obtient $f(c) = f(b)$, ce qui montre que $f(a) = f(b)$ et que f est constante, d'où $E = E_1 \times E_2$ est connexe.

Exercice 4.5.9. *L'objectif de l'exercice est de donner un exemple (classique) d'un espace topologique connexe qui n'est pas connexe par arcs.*

Soient $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 < x \leq 1\}$ et $F = \overline{A} \subset \mathbb{R}^2$.

1) *Montrer que $F = A \cup \{(0,y)/\ -1 \leq y \leq 1\}$.*

2 *Montrer que F est connexe.*

3) *Montrer que F n'est pas connexe par arcs.*

Solution

1) Soit $(x,y) \in F = \overline{A}$, alors il existe une suite $((x_n,y_n))_n$ de A qui converge vers (x,y). Si $x > 0$, alors $y_n = \sin(\frac{1}{x_n})$ converge vers $\sin(\frac{1}{x})$ (par continuité de sin), d'où $(x,y) \in A$.

Dans le cas $x = 0$, on a $y_n = \sin(\frac{1}{x_n})$, donc $y_n \in [-1,1]$. Par conséquent, à la limite on a $y \in [-1,1]$, ainsi $(x,y) \in \{0\} \times [-1,1]$, d'où $\overline{A} = F \subset A \cup \{(0,y)/\ -1 \leq y \leq 1\}$.

Réciproquement, soit $(x,y) \in A \cup \{(0,y)/\ -1 \leq y \leq 1\}$. Montrons qu'il existe une suite $((x_n,y_n))_n$ de A qui converge vers (x,y).

- Si $x > 0$, une telle suite existe trivialement (il suffit de prendre la suite constante égale à (x,y)).

- Supposons que $x = 0$ et $y \in [-1,1]$. Soit $z \geq 1$ tel que $\sin(z) = y$. Soit alors $x_n = \frac{1}{z+2\pi n}$, on aura $\sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(z) = y$. Par conséquent, la suite $((x_n, \sin(\frac{1}{x_n})))_n$ est une suite de A qui converge vers $(0,y)$, d'où $A \cup \{(0,y)/\ -1 \leq y \leq 1\} \subset F$.

2) Considérons l'application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x, \sin(\frac{1}{x}))$. On a $f(]0,1]) = A$, donc A est connexe comme image du connexe $]0,1]$ par f.

3) Par l'absurde, supposons que F est connexe par arcs. Il existe donc un arc $\gamma : [0,1] \to F$ continue tel que $\gamma(0) = (1, \sin(1))$ et $\gamma(1) = (0,0)$. Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $T_0 = \{t \in [0,1]/\ x(t) > 0\}$. On a $T_0 \neq \varnothing$ puisque $0 \in T_0$, on considère alors $t_0 = \sup T_0$.

Suppson que $x(t_0) > 0$, alors par continuité de x on aurait $x > 0$ sur un voisinage de t_0, ce qui en contredit la définition. Par conséquent, $x(t_0) = 0$ et par continuité de x, on a $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = 0$. Ainsi, il existe une suite $(\tau_n)_n$ qui converge en croissant vers t_0 telle que la suite $(x(\tau_n))_n$ converge en décroissant vers 0.

Notons $\gamma(t_0) = (0, y_0)$ et soit $y \in [-1,1] \setminus \{y_0\}$. Soit $z > 0$ tel que $\sin(z) = y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $x_n = \frac{1}{z+2\pi k_n} < x(\tau_n)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à x, il existe $t_n \in [\tau_n, t_0]$ tel que $x(t_n) = x_n$. On a alors $\gamma(t_n) = (x_n, \sin(z + 2\pi k_n)) = (x_n, y)$. On obtient donc, la suite $(t_n)_n$ converge vers t_0 et $\gamma(t_n)$ converge vers $(0,y) \neq \gamma(t_0)$. Contradiction.

CHAPITRE 5

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Pour ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et la notation $|.|$ représente la valeur absolue ou le module selon les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Norme sur un espace vectoriel

5.1.1 Défintion et propriétés

Définition 5.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0_E$.

(ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

(iii) $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé (e.v.n).

Remarque 5.1.2. *a) Dans la propriété (i), l'équivalence peut être remplacée par l'implication directe $(\Rightarrow)$, car l'implication inverse peut s'obtenir de (ii) avec* $\lambda = 0$.

b) Si $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ est une application vérifiant seulement (ii) et (iii), on dit que $\|.\|$ est une semi-norme sur E.

c) L'inégalité de (iii) est connue sous le nom de l'inégalité triangulaire.

Proposition 5.1.3. *Dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, les propriétés suivantes sont vraies :*

a) $\forall x, y \in E,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

b) L'application $x \to \|x\|$ est uniformément continue sur E, l'application $(x, y) \to x+y$ est uniformément continue sur $E \times E$ et l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$.

c) Pour tout $a \in E$, l'application $x \to x + a$ est un homéomorphisme de E.

Démonstration. $a)$ On a pour tous $x, y \in E$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \text{ et } \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|.$$

b) D'après *a*), l'application $x \to \|x\|$ est lipschitzienne.
Pour l'application $(x,y) \to x+y$, on a

$$\|x+y-(x'+y')\| \leq \|x-x'\|+\|y-y'\|, \ \forall x,x',y,y' \in E.$$

Pour l'application $(\lambda,x) \to \lambda x$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)+\lambda_0(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0\| \\ &\leq |\lambda-\lambda_0|\|x-x_0\|+|\lambda_0|\|x-x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\|x_0\|. \end{aligned}$$

c) $x \to x+a$ est bijective, de plus on a $\|x+a-(y+a)\| = \|x-y\|$, donc continue. De même l'application réciproque $x \to x-a$ est continue. □

Remarque 5.1.4. *Soit $(E,\|.\|)$ un e.v.n. L'application $d(x,y) = \|x-y\|$ est une distance sur E invariant par translation (c-à-d $\forall a,x,y \in E,\ d(x+a,y+a) = d(x,y)$). On dit que d est la distance associée à la norme $\|.\|$.*

Si E est complet pour cette distance, on dit que E est un ***espace de Banach****.*

Définition 5.1.5. *On dit que deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes si leurs distances associées sont équivalentes.*

Proposition 5.1.6. *Dans un espace vectoriel E, deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement s'ils existent $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leq \alpha\|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.*

Démonstration. $\Leftarrow$) Soit d_1 et d_1 deux distances associées aux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ respectivement. Supposons qu'ils existent $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que, $\|x\|_1 \leq \alpha\|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$, on a donc $\frac{1}{\alpha}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$, ce qui implique que $\frac{1}{\alpha}d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1$.

$\Rightarrow$) Supposons que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes. Considérons $\overline{B}_1(0,1) = \{x \in E/\ \|x\|_1 \leq 1\}$, c'est un voisinage de 0 dans $(E,\|.\|_1)$, c'est donc aussi voisinage de 0 dans $(E,\|.\|_2)$. Par suite, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}_2(0,r) \subset \overline{B}_1(0,1)$, ainsi pour tout $y \in E$, $\|y\|_2 \leq r \Rightarrow \|y\|_1 \leq 1$.

Soit $x \in E$, avec $x \neq 0$, et soit $y = r\frac{x}{\|x\|_2}$, alors on a $\|y\|_2 = r\frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} = r \Rightarrow \|y\|_1 \leq 1$ c-à-d $r\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq 1$, donc $\|x\|_1 \leq \frac{1}{r}\|x\|_2$. on prend $\alpha = \frac{1}{r}$.

Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée. Même démonstration pour β. □

Corollaire 5.1.7. *Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur l'espace vectoriel E.*

a) Toute suite de Cauchy pour $\|.\|_1$ est de Cauchy pour $\|.\|_2$.

b) Si $(E,\|.\|_1)$ est complet, alors $(E,\|.\|_2)$ est aussi complet.

c) Si A est une partie bornée dans $(E,\|.\|_1)$, elle est aussi bornée dans $(E,\|.\|_2)$.

Définition 5.1.8. *Soient $(E,\|.\|)$ un e.v.n et F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de la norme de E à F est une norme sur F, qui induit sur F la distance induite par la distance de E.*

5.1.2 Produit fini d'espaces normés

Soient $E_1, ..., E_n$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et tout $x_i \in E_i$, on note $\|x_i\|_{E_i}$ la norme dans E_i. Sur l'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$, on peut définir la norme

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{E_i} = \max(\|x_1\|_{E_1}, ..., \|x_n\|_{E_n}),\ x = (x_1, ..., x_n) \in E.$$

Cette norme induit sur E la distance

$$d(x,y) = \|x-y\| = \max(\|x_1 - y_1\|_{E_1}, ..., \|x_n - y_n\|_{E_n}),\ \text{où } y = (y_1, ..., y_n) \in E,$$

c'est la distance produit, qui définit la topologie produit.

5.2 Espaces normés de dimensions fines

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E, $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées d'un point $x \in E$ et $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Proposition 5.2.1. $(E, \|.\|_\infty)$ *est isomorphe à* $\mathbb{K}^n$ *muni de sa norme usuelle.*

Démonstration. Considérer l'application $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$, $x \to (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$. □

Corollaire 5.2.2. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n de dimension finie. Alors,*

a) Les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.

b) La sphère unitée $S(0,1)$ *est compacte dans* $(E, \|.\|)$.

Démonstration. *a*) L'application $\varphi : (E, \|.\|) \to \mathbb{K}^n$, $x \to \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un homéomorphisme, donc pour toute partie $A \subset E$ on a A est compacte $\Leftrightarrow$ $\varphi(A)$ est compacte dans $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(A)$ est fermée et bornée dans $\mathbb{K}^n$. Par suite, $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ est un fermé de E, elle est bornée car φ^{-1} est une isométrie $(\delta(\varphi(A)) = \delta\left(\varphi^{-1}(\varphi(A))\right))$.

b) $S(0,1)$ est bornée, de plus on a $S(0,1) = \{x \in E /\ \|x\| = 1\} = \|.\|^{-1}\{1\}$. Or, $\|.\|$ est continue, donc $S(0,1)$ est fermée, d'où elle est compacte. □

Théorème 5.2.3. *Sur un espace vectoriel de dimension finie E, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Montrons que toutes les normes sont équivalentes à la norme $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Soient N une norme quelconque sur E et $x \in E$. On a donc, $N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \alpha \|x\|_\infty$, avec $\alpha = \sum_{i=1}^n N(e_i)$.

D'autre part, l'application $N : (E, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}^+$ est continue (c'est même uniformément continue) et la sphère $S(0,1)$ est compacte, soit donc $m = \inf_{x \in S(0,1)} N(x) = N(x_0)$, avec $x_0 \in S(0,1)$ (l'inf est atteint dans un compact). On a $m = N(x_0) > 0$, car N est une norme et $x_0 \neq 0$ puisque $\|x_0\|_\infty = 1$. Par suite, pour tout $x \in S(0,1)$, $N(x) \geq m > 0$. Soit $y \in E$.

Si $y \neq 0_E$, on pose $x = \frac{y}{\|y\|_\infty}$. Donc, $\|x\|_\infty = 1 \Rightarrow N(x) = \frac{N(y)}{\|y\|_\infty} \geq m \Rightarrow \|y\|_\infty \leq \frac{1}{m}N(y)$. On prend $\beta = \frac{1}{m}$.

Si $y = 0_E$, l'inégalité est vérifiée. □

Proposition 5.2.4. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ est compacte.*

Démonstration. $\Rightarrow$) D'après le corollaire 5.2.2, on a $\overline{B}(0,1)$ est fermée et bornée, donc elle est compacte.

$\Leftarrow$) Supposons que $\overline{B}(0,1)$ est une partie compacte de E et montrons que E est de dimension finie.

On a $\overline{B}(0,1) \subset \bigcup\limits_{x \in \overline{B}(0,1)} B(x, \frac{1}{2})$, donc il existe un nombre fini de points $x_1, ..., x_n$ de $\overline{B}(0,1)$ tels que $\overline{B}(0,1) \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{1}{2})$.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{x_1, ..., x_n\}$. Montrons que $E = F$. Supposons qu'il existe $x \in E \setminus F$. Comme F est fermé, alors $\alpha = d(x,F) > 0$. Ainsi, Par la définition de $d(x,F)$, il existe $y \in F$ tel que $\alpha \leq \|x-y\| < \alpha + \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha$. Posons $z = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. On a $z \in \overline{B}(0,1)$, donc il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $z \in B(x_{i_0}, \frac{1}{2})$, c-à-d $\|z - x_{i_0}\| < \frac{1}{2}$. Par suite, on a $x = y + \|x-y\|z = y + \|x-y\|x_{i_0} + \|x-y\|(z - x_{i_0})$, avec $y + \|x-y\|x_{i_0} \in F$. Il vient que $\|x - (y + \|x-y\|x_{i_0})\| = \|x-y\|\|z - x_{i_0}\|$, ce qui donne $\alpha \leq \|x-y\|\|z-x_{i_0}\| < \frac{3}{4}\alpha$, c-à-d $\alpha < \frac{3}{4}\alpha$. Impossible. Donc $E = F$ et $\dim E$ est finie. □

5.3 Continuité des applications linéaires

Théorème 5.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *f est continue sur E ;*

2) *f est continue en un certain point de E (en prticulier au point 0) ;*

3) *f est bornée sur la boule unité $\overline{B}(0,1)$;*

4) *f est bornée sur toute boule de centre 0 (donc sur toute partie bornée) ;*

5) *f est lipschitzienne ($\Rightarrow$ qu'il existe une constante $k > 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$) ;*

6) *f est uniformément continue.*

Démonstration. 5) $\Rightarrow$ 6), 6) $\Rightarrow$ 1), 1) $\Rightarrow$ 2) sont immédiates.

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1$. Alors, $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|\eta x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\| \leq \frac{1}{\eta}$.

3) $\Rightarrow$ 5) Supposons qu'il existe une constante M telle que $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq M$. Alors, $\|f(y) - f(x)\| = \|f(y-x)\| \leq M\|y-x\|$ (si $y \neq x$, prendre $\frac{y-x}{\|y-x\|}$).

3) $\Rightarrow$ 4) Soit M une constante telle que $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq M$. Alors pour tout réel R, $\|x\| \leq R \Rightarrow f(x) \leq MR$. □

Définition 5.3.2. *La norme d'une application linéaire continue $f : E \to F$, notée $\|f\|$, est sa constante de Lipschitz, c'est à dire le plus petit réel $k \geq 0$ tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

Autrement dit :

$$\|f\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in E, \|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F.$$

Définition 5.3.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v.n. $\mathscr{L}(E,F)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires et continue, et l'application $f \to \|f\| = \sup\limits_{x\in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$ est la norme usuelle de $\mathscr{L}(E,F)$.*

Proposition 5.3.4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v.n et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :*

1) $\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq \|f\| \; \|x\|_E$.

2) Si $M \in \mathbb{R}^+$ vérifie $\|f(x)\|_F \leq M \; \|x\|_E$ ($\forall x \in E$), alors $\|f\| \leq M$.

Démonstration. 1) Comme f est linéaire, alors $f(0) = 0$, donc l'inégalité est vraie. Si $x \neq 0$, alors

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{y\in E, y\neq 0} \frac{\|f(y)\|}{\|y\|} = \|f\|,$$

ce qui donne $\|f(x)\| \leq \|f\| \; \|x\|$.

2) Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M \; \|x\|$, alors pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq M$, d'où $\sup_{x\in E, x\neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|f\| \leq M$. □

Théorème 5.3.5. *Si F est complet, alors l'e.v.n. $\mathscr{L}(E,F)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E,F)$, alors : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n,m \geq n_0$ on a $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Il vient que $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$, $\forall x \in E$. Ceci montre que $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet, donc elle est convergente. Soit $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Par suite, on a $f \in \mathscr{L}(E,F)$. En effet,

$f(\alpha x+\beta y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha x+\beta y) = \alpha \lim_{n\to+\infty} f_n(x)+\beta \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$, ce qui prouve que f est linéaire. D'autre part, puisque pour tout $x\in E$ et tous $n,m\geq n_0$ on a $\|f_n(x)-f_m(x)\|\leq \|f_n-f_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$, alors en faisant tendre $m\to+\infty$, on obtient $\|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon\|x\|$. Donc pour tout $n\geq n_0$, f_n-f est continue, d'où $f=f_n-(f_n-f)$ est continue. Enfin, puisque $\|f_n(x)-f(x)\|\leq\varepsilon\|x\|$, alors $\|f_n-f\|\leq\varepsilon$ pour tout $n\geq n_0$, ce qui montre que $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathscr{L}(E,F)$. □

Theorem 5.3.6. *Soit* $(E,\|.\|_E)$ *et* $(F,\|.\|_F)$ *deux e.v.n. Si* $\dim E$ *est fini, alors toutes les applications linéaires de* E *vers* F *sont continues.*

Démonstration. Sur E, toutes les normes sont équivalentes. Soit $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E et $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ un élément de E. On pose $\|x\|_E = \max_{1\leq i\leq n}|x_i| = \|x\|_\infty$. On a,

$$\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^n x_if(e_i)\| \leq \|x\|_\infty\sum_{i=1}^n\|f(e_i)\|.$$

D'où, pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|_F\leq k\|x\|_\infty$. □

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. *Soit* (E,d) *un espace vectoriel muni d'une distance vérifiant :*

(i) Pour tous $x,y\in E$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$, $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|d(x,y)$.

(ii) Pour tous $x,y,z\in E$, $d(x+z,y+z)=d(x,y)$.

Montrer que d provient d'une norme, c'est-à-dire qu'il existe une norme N sur E telle que pour tous $x,y\in E$, $d(x,y)=N(x-y)$.

Solution

Si une telle norme existe, elle est nécessairement définie par :

$$N(x)=N(x-0)=d(x,0).$$

Montrons donc que $N: E\to\mathbb{R}^+$, $N(x)=d(x,0)$ est une norme sur E telle que pour tous $x,y\in E$,

$$d(x,y)=N(x-y).\quad (*)$$

Tout d'abord, l'égalité $(*)$ est vérifiée car pour tous $x,y\in E$, en utilisant (ii) on obtient :

$$N(x-y)=d(x-y,0)=d(x-y+y,y)=d(x,y).$$

Il reste seulement à vérifier que N est une norme.

- Pour tout $x\in E$, on a $N(x)=d(x,0)\geq 0$ et $N(x)=0\Leftrightarrow d(x,0)=0\Leftrightarrow x=0$.

- Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = d(\lambda x, 0) = d(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda| d(x,0) = |\lambda| N(x)$.
- Soient $x, y \in E$. En utilisant l'inégalité triangulaire pour d, on a

$$\begin{array}{rcl} N(x+y)d(x+y,0) & \leq & d(x+y,y)+d(y,0) \\ & = & d(x,0)+d(y,0) \\ & = & N(x)+N(y). \end{array}$$

Ce qui prouve le résultat. N est donc bien une norme qui a les propriéteés demandées.

Exercice 5.4.2. *Montrer qu'une partie non vide A d'un e.v.n $(E, \|.\|)$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :*

$$\forall x \in A, \ \ \|x\| \leq M.$$

Solution

$\Rightarrow$) Supposons que A est bornée, alors son diamètre $\delta(A) < +\infty$. En fixant $x_0 \in A$, on a pour tout $x \in A$

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \leq \delta(A) + \|x_0\|.$$

On prend $M = \delta(A) + \|x_0\|$.

$\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$, alors on a pour tout $x \in A$, $x \in \overline{B}(0_E, M)$, donc $A \subset \overline{B}(0_E, M)$, d'où A est bornée.

Exercice 5.4.3. *Soient A et B deux parties non vides d'un e.v.n E.*

1) Montrer que si A ou B est ouverte, alors $A+B$ est ouverte.

2) Montrer que si A et B sont connexes, alors $A+B$ est connexe.

3) Montrer que si A et B sont compactes, alors $A+B$ est compacte.

4) Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors $A+B$ est fermée.

5) Donner un exemple de deux fermées A et B telles que $A+B$ n'est pas fermée.

Solution

1) Si A est un ouvert, alors pour tout $b \in B$, $A+b$ est ouvert. En effet, l'application $f : A \to A+b$ est un homéomorphisme, donc $f(A) = A+b$ est un ouvert. D'où $A+B = \bigcup\limits_{b \in B} A+b$ est un ouvert.

Autre méthode : On a $a+b \in A+B$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$. Comme A est ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $a + B(0,r) \subset A$. Par suite, $a + B(0,r) + b \subset A+B$, donc $A+B$ est ouvert.

2) Si A et B sont connexes, alors $A \times B$ est connexe (voir exercice 4.5.8). De plus, l'application $\varphi : A \times B \to A+B$, $(a,b) \to a+b$ est continue, donc $\varphi(A \times B) = A+B$ est connexe.

3) Si A et B sont compactes, alors $A\times B$ est compacte (théorème de Tychnoff), donc $\varphi(A\times B)=A+B$ est compacte.

4) Supposons que A est compacte et B est fermée. Soit (z_n) une suite déléments de $A+B$ telle que $z_n\to z$. Montrons que $z\in A+B$.

On a $z_n\in A+B$, alors il existe $a_n\in A$ et $b_n\in B$ tels que $z_n=a_n+b_n$. Puisque A est compacte, il existe une sous suite (a_{n_k}) de (a_n) qui converge vers $a\in A$. Il vient que $b_{n_k}=z_{n_k}-a_{n_k}$ converge vers $b\in B$ (car B est fermée). Donc, $z_{n_k}=b_{n_k}+a_{n_k}$ converge vers $a+b\in A+B$. Par conséquent, $\lim_n z_n=\lim_k z_{n_k}=z=a+b\in A+B$.

5) Dans l'e.v.n $\mathbb{R}$, on considère $A=\mathbb{N}^*$ et $B=\{\frac{1}{n}-n,\ n>1\}$. Vérifions que A et B sont des fermés et que $0\in\overline{A+B}$, mais $0\notin A+B$.

On a $\complement_{\mathbb{R}}^{A}=]-\infty,1[\cup\bigcup_{n\geq 1}]n,n+1[$ qui est ouvert, donc A est fermé. De même, $\complement_{\mathbb{R}}^{B}=\bigcup_{n\geq 1}]\frac{1}{n+1}-(n+1),\frac{1}{n}-n[\cup]-1,+\infty[$ qui est ouvert, bonc B est fermé.

Si $0\in A+B$, alors il existe $m\in A$ et $n>1$ tel que $m+\frac{1}{n}-n=0$, ce qui implique $\frac{1}{n}=n-m\in\mathbb{Z}$, impossible, donc $0\notin A+B$. Mais $0\in\overline{A+B}$, car $\frac{1}{n}=(\frac{1}{n}-n)+n\in A+B$ et $\frac{1}{n}\to 0$.

Exercice 5.4.4. *On considère le système d'équations suivant :*

$$(S)\quad\begin{cases}x=\frac{1}{4}\sin(x+y)\\ y=1+\frac{2}{3}\arctan(x-y)\end{cases}.$$

Montrer que (S) admet une unique solution.

Solution

Considérons la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{4}\sin(x+y),\ 1+\frac{2}{3}\arctan(x-y)\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Il est clair que f est continue. En appliquant le théorème des accroissement finis, on obtient

$$\begin{aligned}\|f(x,y)-f(x',y')\| &= d(f(x,y),f(x',y'))\\ &= \frac{1}{4}\big|\sin(x+y)-\sin(x'+y')\big|+\frac{2}{3}\big|\arctan(x-y)-\arctan(x'-y')\big|\\ &\leq \frac{1}{4}\big|x+y-x'-y'\big|+\frac{2}{3}\big|x-y-x'+y'\big|\\ &\leq \frac{11}{12}\big|x-x'\big|+\frac{11}{12}\big|y-y'\big|\\ &= \frac{11}{12}d((x,y),(x',y'))=\frac{11}{12}\|(x,y)-(x',y')\|.\end{aligned}$$

Donc f est une contraction, par suite elle admet un point fixe unique $f(x,y) = (x,y)$. Ce point fixe ne sera rien qu'une solution du système (S).

Exercice 5.4.5. *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $\overline{B}(0,1)$ la boule unité fermée de E. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E vérifiant $F \neq E$. On pose*

$$d(x,F) = \inf\{\|x-y\|,\ y \in F\}.$$

1) Soient $x \in E$, $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, établir les trois propriétés suivantes :

$$(i)\ d(x,F) \leq \|x\|, \quad (ii)\ d(\lambda x,F) = |\lambda| d(x,F), \quad (iii)\ d(x-y,F) = d(x,F).$$

2) Soient $x \in E$ et $x' \in E$. Montrer que

$$(iv)\ d(x+x',F) \leq d(x,F) + d(x',F).$$

3) Soit $x \in \overline{B}(0,1)$ tel que $\alpha = d(x,F) > 0$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in F\ /\ \alpha \leq \|x-y\| < \alpha(1+\varepsilon).$$

4) Soit $x \in \overline{B}(0,1)$ tel que $\alpha d(x,F) > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $x^* \in \overline{B}(0,1)$ tel $d(x^*,F) = (1+\varepsilon)^{-1} < 1$.

5) Déduire de ce qui précède l'égalité $\sup\{d(x,F),\ x \in \overline{B}(0,1)\} = 1$.

6) Démontrer à l'aide de ce qui précède le théorème du cours qui permet d'affirmer que si la boule $\overline{B}(0,1)$ est compacte, alors le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est de dimension finie.

Solution

1) (i) Tout sous-espace vectoriel contient 0, on a donc,

$$d(x,F) = \inf\{\|x-y\|,\ y \in F\} \leq \|x-0\| = \|x\|.$$

(ii) Pour $\lambda = 0$, en appliquant (i), on obtient

$$d(0x,F) = d(0,F) \leq \|0\| = 0 = |0| d(x,F).$$

Pour $\lambda \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
d(\lambda x,F) &= \inf\{\|\lambda x - y\|,\ y \in F\} = \inf\{|\lambda| \|x - \lambda^{-1} y\|,\ y \in F\} \\
&= |\lambda| \inf\{\|x - \lambda^{-1} y\|,\ y \in F\} = |\lambda| \inf\{\|x-y\|,\ y \in F\} \\
&= |\lambda| d(x,F).
\end{aligned}$$

(iii) Comme $y \in F$ et puisque $\{y+z,\ z \in F\} = F$, on a

$$\begin{aligned} d(x-y,F) &= \inf\{\|x-y-z\|,\ z \in F\} = \inf\{\|x-(y+z)\|,\ z \in F\} \\ &= \inf\{\|x-z\|,\ z \in F\} = d(x,F). \end{aligned}$$

2) Par définition, on peut trouver deux suites $(y_n)_n \subset F$ et $(y'_n)_n \subset F$ telles que

$$d(x,F) = \lim_{n\to+\infty} d(x,y_n) \ \text{ et } \ d(x',F) = \lim_{n\to+\infty} d(x,y'_n).$$

Comme $y_n + y'_n \in F$, on peut écrire

$$d(x+x',F) \leq \|x+x'-(y_n+y'_n)\| \leq \|x-y_n\| + \|x'-y'_n\|.$$

L'inégalité (iv) s'obtient en passant à la limite quand $n \to +\infty$.

3) Par la définition de $d(x,F)$, on a

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists y \in F\ /\ \|x-y\| < d(x,F) + \varepsilon'.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\alpha > 0\varepsilon > 0$, car $\alpha > 0$. On peut donc appliquer ce qui précède avec $\varepsilon' = \alpha\varepsilon$ pour obtenir

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in F\ /\ \|x-y\| < \alpha(1+\varepsilon).$$

D'autre part, puisque $y \in F$, on a par définition $\alpha = d(x,F) \leq \|x-y\|$.

4) Avec ε comme en 3), le choix $x^* = \alpha^{-1}(1+\varepsilon)^{-1}(x-y)$ convient. En effet, l'inégalité de droite de la question 3) garantit $x^* \in \overline{B}(0,1)$. D'autre part, en appliquant (ii) et (iii), on obtient

$$d(x^*,F) = \alpha^{-1}(1+\varepsilon)^{-1} d(x-y,F) = \alpha^{-1}(1+\varepsilon)^{-1} d(x,F) = (1+\varepsilon)^{-1} < 1.$$

5) Pour $x \in \overline{B}(0,1)$, la condition $d(x,F) = 0$ implique l'existence d'une suite $(x_n)_n \subset F$ qui converge vers x. Comme F est fermé, cela implique $x \in F$. Ainsi, si pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$ on a $d(x,F) = 0$, c'est que $\overline{B}(0,1) \subset F$. Comme $E = \cup\{\overline{B}(0,n),\ n \in \mathbb{N}\}$, cela conduit à $E \subset F$, c-à-d $E = F$. contradiction.

On peut donc trouver $x \in \overline{B}(0,1)$ avec $d(x,F) > 0$. En appliquant la question 4) pour les choix $\varepsilon = (1+n)^{-1}$, on obtient une suite $(x^*_n)_n \in \overline{B}(0,1)$ vérifiant :

$$\sup\{d(x,F),\ x \in \overline{B}(0,1)\} \geq \lim_{n\to+\infty} d(x^*_n,F) = \lim_{n\to+\infty} (2+n)(1+n)^{-1} = 1.$$

Or, d'après (i) de la question 1), on a

$$\forall x \in \overline{B}(0,1),\ d(x,F) \leq \|x\| \leq 1.$$

6) Supposons que $\overline{B}(0,1)$ soit compacte. Fixons $\varepsilon > 0$, alors du recouvrement ouvert $\overline{B}(0,1) \subset \cup\{B(x,\varepsilon),\ x \in \overline{B}(0,1)\}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$\overline{B}(0,1) \subset \cup\{B(x_i,\varepsilon),\ x_i \in \overline{B}(0,1),\ i \in I\}\ I = \{1,...,n\}.$$

On considère le sous-espace F de E engendré par $\{x_1,...,x_n\}$. Comme F est de dimension fini, il est fermé. Par construction, $\overline{B}(0,1) \subset F + \varepsilon B(0,1)$.

Pour le choix de $\varepsilon = \frac{1}{2}$, cela implique

$$\sup\{d(x,F),\ x \in \overline{B}(0,1)\} \leq \frac{1}{2}.$$

Pour $F \neq E$, ceci est en contradiction avec les conclusions de la question 5). Donc $F = E$ et $\dim E = n < +\infty$.