UNIVERSITÉ MOULAY-ISMAÏL

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ERRACHIDIA

COURS
RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET FORMES QUADRATIQUES
(Algèbre 2)

par

Pr. Abdellatif SADRATI

Filière : Tronc commun MIP

Année 2019-2020

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE ET CHANGEMENT DE BASES

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimensions n et p respectivement, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $C = \{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ une base de F. Les images par f des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ se décomposent sur la base $\{e'_1, e'_2, ...e'_p\}$:

$$
\begin{aligned}
&f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p \\
&f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p \\
&. \\
&. \\
&. \\
&f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p
\end{aligned}
$$

Définition 1.1.1. *On appelle matrice de f dans les bases $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $C = \{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ la matrice notée $M_{CB}(f)$ appartenant à $\mathbb{M}_{pn}(\mathbb{k})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ dans la base $\{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$.*

$$
M_{CB}(f) = M_C(f(B)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}
$$

Remarque 1.1.2. - *Attention à l'ordre dans l'écriture $M_{CB}(f)$!*

- *La jème colonne de la matrice est formée des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base C.*

- *Cette matrice a n colonnes et p lignes : $M_{CB}(f) \in \mathbb{M}_{pn}(\mathbb{K})$.*

- *Il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de E et F.*

- *Si $E = F$ et $B = C$, on note $M_{BB}(f) = M_B(f)$.*

Exemple 1.1.3. *1) Soit θ l'application nulle de E dans F et θ_{pn} la matrice nulle de $\mathbb{M}_{pn}(\mathbb{K})$, alors $M_{CB}(\theta) = \theta_{pn}$.*

2) Soit E de dimension n finie et $Id_E : E \longrightarrow E$ l'application qui à x associe x. On considère une base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E. On a

$$M_B(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & 0 & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Matrice unité de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $P_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui à (x,y) associe $(x,0)$. considérons la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. On a $P_1(e_1) = (1,0) = e_1$, $P_1(e_2) = (0,0)$ et $M_{BB}(P_1) = M_B(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = \{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à (x,y,z) associe $(x-y, z-y)$. On a $M_{CB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) *Soit* $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ *l'application linéaire qui à* $P(X)$ *associe* $P'(X)$. *On a*

$$M_{CB}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

B et C étant les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}_4[X]$ *et* $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 1.1.4. *Soient* f *et* g *deux éléments de* $L(E,F)$ *et* λ *un élément de* $\mathbb{K}$*, alors*

(i) $M_{CB}(f+g) = M_{CB}(f) + M_{CB}(g)$.

(ii) $M_{CB}(\lambda f) = \lambda M_{CB}(f)$

Théorème 1.1.5. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension* n *et* p *respectivement.* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *et* $C = \{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ *des bases de* E *et* F*. Alors l'application* $M : L(E,F) \longrightarrow \mathbb{M}_{pn}(\mathbb{k})$ *qui à* f *associe* $M_{CB}(f)$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier* $\dim L(E,F) = np$.

Démonstration. Il est facile de vérifier la linéarité de M.
Soient $f \in \ker M$, donc $M_{CB}(f) = 0$. Par suite, $f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = 0$. D'où $f = 0$ et M est injective. Elle est aussi surjective, car si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On construit f en posant :

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p$$
$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p.$$

Pour $x \in E, x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ avec $x_i \in \mathbb{K}$.
On pose $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n)$. On vérifie que l'application f est linéaire et $M_{CB}(f) = A$. □

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in L(E, F), g \in L(F, G)$. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $C = \{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ et $D = \{e''_1, e''_2, ..., e''_m\}$ les bases respectives de E, F, G.

Proposition 1.1.6. *Avec les notations précédentes on a*

$$M_{DB}(g \circ f) = M_{DC}(g).M_{CB}(f).$$

1.2 Matrice de l'inverse d'une application linéaire

Corollaire 1.2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension et de bases respectives B et C. $f \in L(E, F)$ est bijective si et seulement si $M_{CB}(f)$ est inversible. De plus,*

$$M_{BC}(f^{-1}) = (M_{CB}(f))^{-1}.$$

Démonstration. Comme $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$, alors $M_B(f^{-1} \circ f) = I$ et $M_C(f \circ f^{-1}) = I$ et par suite $M_{BC}(f^{-1}).M_{CB}(f) = M_{CB}(f).M_{BC}(f^{-1}) = I$, c'est-à-dire $M_{BC}(f^{-1}) = (M_{CB}(f))^{-1}$. □

Remarque 1.2.2. *Dans le cas particulier où $E = F$ et $B = C$, on obtient, pour toute* *application linéaire bijective*

$$M_B(f^{-1}) = (M_B(f))^{-1}.$$

1.3 Matrice de passage d'une base à une autre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$. Soient $(P_{1j}, P_{2j}, ..., P_{nj})$ les coordonnées du vecteurs e'_j dans la base B, c'est-à-dire $\forall j \in 1, 2, ..., n$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i = P_{1j} e_1 + P_{2j} e_2 + ... + P_{nj} e_n$.

Définition 1.3.1. *On appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice $P_{BB'} = M_B(B') = M_B(e'_1, e'_2, ...e'_n)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base B' exprimées dans la base B.*

Exemple 1.3.2. *Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et de la base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, où $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2 - e_3$ et $e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3$. La matrice de passage de la base B à la base B' est*

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.3.3. *On a clairement $P_{BB} = P_{B'B'} = I_n$.*

Lemme 1.3.4. *Si B et B' sont deux bases de E, alors*

$$P_{BB'} = M_{BB'}(Id_E).$$

Attention ! Ici la matrice de l'endomorphisme Id_E n'est pas l'unité car la représentation matricielle de l'identité est formée en choisissant une base à l'arrivée qui n'est a priori la même au départ.

Proposition 1.3.5. *Si B et B' sont deux bases de E, alors la matrice de passage de B à* *la base B' est inversible et son inverse est la matrice de passage de B' à B :*

$$(P_{BB'})^{-1} = P_{B'B}.$$

Exemple 1.3.6. *Reprenons les notations de l'exemple précédent :*

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \quad et \;\; P_{BB'} = M_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour former la matrice de passage inverse $(P_{BB'})^{-1}$, il suffit d'exprimer les vecteurs de la base B en fonction de ceux de la base B'. A l'aide du système précédent on obtient :

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 \\ e_2 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_3 = 2e'_1 + e'_3 \end{cases} \quad et\ donc \;\; P_{B'B} = (P_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Nouvelles composantes de vecteur

Théorème 1.4.1. *Soient B et B' deux bases de E. Soient x un élément de E, X_B et $X'_{B'}$ les matrices colonnes des coordonnées de x dans les bases B et B' . Alors*

$$X_B = P_{BB'} X'_{B'}$$

Attention à l'ordre ! on a les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

1.5 Nouvelle représentation d'une application linéaire.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soit F un espace vectoriel de dimension m sur $\mathbb{K}$, C et C' deux bases de F et Q la matrice de passage de C à C'.

Théorème 1.5.1. *Si f est une application linéaire de E dans F représentée par la matrice A dans les bases B et C et par A' dans les bases B' et C', on a la relation*

$$A' = Q^{-1}AP$$

Remarque 1.5.2. *On peut retrouver la formule du théorème précédent à l'aide du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
(E,B) & \xrightarrow{f} & (F,C) \\
\Big\downarrow Id_E & & \Big\downarrow Id_F \\
(E,B') & \xrightarrow{f} & (F,c')
\end{array}$$

on a

$$\begin{aligned}
Id_F \circ f = f \circ Id_E &\Leftrightarrow M_{C'}(Id_F(C)).A = A'.M_{B'}(Id_E(B)) \\
&\Leftrightarrow P_{C'C}.A = A'P_{B'B} \\
&\Leftrightarrow Q^{-1}A = A'P^{-1} \\
&\Leftrightarrow Q^{-1}AP = A'.
\end{aligned}$$

Remarque 1.5.3. *Dans le cas particulier où f est un endomorphisme de E, si A (resp. A') est la matrice représentant f dans la base B (resp. B'), alors $A' = P^{-1}AP$.*

1.6 Matrices semblables

Définition 1.6.1. *On dit que deux matrices carrées A et A' d'ordre n sont semblables s'il existe P matrice carrée d'ordre n inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.*

D'après la remarque précédente, si f est un endomorphisme de E, et si B et B' sont deux bases de E, alors $M_B(f)$ et $M_{B'}(f)$ sont deux matrices semblables. Donnons maintenant une forme de réciproque :

Proposition 1.6.2. *Soient f un endomorphisme de E, B une base de E et A la matrice* *de f dans la base B. Si A' est une matrice semblable à A, il existe une base B' de E telle que A' soit la matrice de f dans la base B'.*

1.7 Exercices

Exercice 1

On considère $B = \{(1,1,-1),(0,1,1),(1,0,3)\}$.

1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs u et v dans la base B.

$$a)u = (2,3,7), \quad v = (1,0,5).$$
$$b)u = (0,0,-6), \quad v = (4,4,9).$$

3) Calculer la matrice de passage P de la base canonique B_0 à la base B.

4) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^3$; expliciter la relation entre les coordonnées de X dans les deux bases B et B_0.

Exercice 2

Calculer la matrice de passage de la base B à la base B' :

1) $B = \{(-1,0),(0,3)\}, \quad B' = \{(1,1),(2,1)\}$.

2) $B = \{(1,-1),(1,0)\}, \quad B' = \{(3,1),(5,-6)\}$.

3) $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}, \quad B' = \{(1,1,1),(2,1,1),(0,1,0)\}$.

4) $B = \{1,X,X^2\}, \quad B' = \{X-X^2,-1,-1-3X+X^2\}$.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1,e_2,e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3,\ b = 2e_1 - e_2 + e_3,\ c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Expliciter $f(x,y,z)$ en fonction de x, y et z.

2) Montrer que $B' = \{a,b,c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer la matrice de passage P de B à B'. Calculer P^{-1}.

4) Déterminer la matrice R de f dans la base B' en calculant $f(a), f(b)$ et $f(c)$.

5) Exprimer la matrice R en fonction des matrices P, P^{-1} et A.

6) Calculer R^4.

7) En déduire les valeurs de A^{4n}, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (x - 2y, 3x + y)$.
Soient $B = \{(1,2),(1,1)\}$, et $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$.

1) Calculer la matrice M de f dans la base B.

2) Calculer la matrice de passage de B à B'.

3) Calculer l'inverse P^{-1} et en déduire la matrice N de f dans la base B' par la formule de changement de base.

4) Recalculer N directement et vérifier vos calcul.

Exercice 5

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ une application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$u(P) = P + (1 - X)P' + 2P''.$$

On pose $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ où $P_1 = 1 - X,\ P_2 = 1,\ P_3 = 1 + 2X - X^2$.

1) Montrer que u est une application linéaire.

2) Expliciter $u(a+bX+cX^2)$ en fonction de a, b et c.

3) Déterminer la matrice A de u par rapport à la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

4) Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5) Donner la matrice A' de u dans la base B' en calculant $u(P_1), u(P_2)$ et $u(P_3)$.

6) Calculer les matrices de passage P et Q entre les base B et B'.

7) Déterminer A' par la formule de changement de base.

Exercice 6

Soient $B_0 = \{e_1, e_2\}$, $C_0 = \{f_1, f_2, f_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et soit

$$\begin{aligned} U \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) \longrightarrow (3x+4y, -x+y, 2x-2y) \end{aligned}$$

1) Écrire la matrice A de U dans les bases B_0 et C_0.

2) Soient $e'_1 = 3e_1 + e_2$, $e'_2 = -2e_1 + 5e_2$ et $B' = \{e'_1, e'_2\}$.
Écrire les matrices de passage de B_0 à B' et de B' à B_0.

3) Écrire les matrices de passage de C_0 à $C' = \{f'_1, f'_2, f'_3\}$ et de C' à C_0, où :

$$f'_1 = -f_1 + f_3,\ f'_2 = 2f_1 - f_2 + 2f_3 \text{ et } f'_3 = f_1 - f_2 + f_3.$$

4) Déterminer $M_{C_0B'}(U)$, $M_{C'B_0}(U)$ et $M_{C'B'}(U)$.

CHAPITRE 2

DÉTERMINANTS D'UNE MATRICE CARRÉE ET SYSTÈMES DE CRAMER

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1 Formes n-linéaires alternées

Définition 2.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $f : E \times E \times \ldots \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chaque variable, c'est-à-dire si :*

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_{i-1},\alpha y_i+\beta z_i,x_{i+1},\ldots,x_n) &= \alpha f(x_1,\ldots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\ldots,x_n) \\ &+ \beta f(x_1,\ldots,x_{i-1},z_i,x_{i+1},\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Elle est symétrique si elle est invariante par permutation des vecteurs et antisymétrique ou alternée si l'interversion de deux vecteurs change le signe, c'est-à-dire si

$$\forall x_1,\ldots,x_n \in E, \forall i < j, f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = -f(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n).$$

Remarque 2.1.2. *On déduit immédiatement que si f est alternée, alors $f(x,x,\ldots,x) = 0$ et puis plus généralement que si x_i est une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ alors $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$.*

Exemples 2.1.3.

1) *Le produit scalaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et symétrique.*

2) *L'application de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $((a,b),(c,d)) \longrightarrow ad - bc$ est bilinéaire alternée.*

2.2 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général a_{ij}. On note A_{ij} la sous matrice de A d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant à A sa $i$ème ligne et sa $j$ème colonne.

Définition 2.2.1. *On appelle déterminant de A et on note* $\det(A)$ *l'élément de* $\mathbb{R}$ *défini par une des formules de récurrence suivantes :*

- *Si $n = 1$, on pose* $\det(a_{11}) = a_{11}$.

- *Si $n > 1$, on pose (développement par rapport à la kème colonne)*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$$

ou (développement par rapport à la kème ligne)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

- *Le nombre* $\det(A_{ij})$ *est un* ***mineur*** *d'ordre $n-1$ de la matrice A.*

- *Le nombre $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est le* ***cofacteur*** *de A relatif au coefficient a_{ij}.*

Remarque 2.2.2. *On admet que toutes ces formules de récurrence donnent le même résultat.*

Exemples 2.2.3. *1) Si $n = 2$,* $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

2) Si $n = 3$,

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (\textit{développement suivant la 3ème colonne}) \\ &= (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3) Si Θ est la matrice nulle de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\Theta) = 0$.

4) Si I_n est la matrice identité de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(I_n) = 1$.

Remarques 2.2.4. *1) Si une colonne quelconque d'une matrice carrée A est nulle, le déterminant de A est nul $(det(A) = 0)$.*

2) Si $A = (a_{ij})$ est une matrice dont tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls, alors

$$det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

3) Si $A = (a_{ij})$ est une matrice dont tous les coefficients sous la diagonale sont nuls $(a_{ij} = 0$ si $i > j)$, alors

$$det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

4) Notant c_i les colonnes d'une matrice A on a

$$det(A) = det(c_1, ..., c_i, ..., c_n) = det(c_1, ..., c_i + \lambda c_j, ..., c_n),$$

avec $i \neq j$. C'est-à-dire qu'on ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne un multiple d'une autre colonne.

5) En particulier, si deux colonnes sont égales le déterminant est nul.

*6) **Calcul par blocs :** Quand la matrice A est donnée par blocs, on peut parfois calculer son déterminant en fonction des blocs de A :*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \det(B)\det(D).$$

Le corollaire suivant est fondamental.

Corollaire 2.2.5. *Soit A une matrice dont les colonnes sont $c_1, c_2, ..., c_n$.*

$$det(A) = det(c_1, ..., c_i, ..., c_j, ..., c_n) = -det(c_1, ..., c_j, ..., c_i, ..., c_n).$$

Autrement dit, en échangeant deux colonnes on change le signe du déterminant.

Théorème 2.2.6 (admis). *L'application de* $(\mathbb{R}^n)^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à un n-uplet* $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *associe le scalaire* $\det(c_1, c_2, ..., c_n)$ *est une forme n-linéaire alternée.*

Toute forme n-linéaire alternée de $(\mathbb{R}^n)^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est proportionnelle à cette application.*

La démonstration de cette énoncé est trop technique pour être donné ici.

Proposition 2.2.7.

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Il n'est pas inutile de répéter ici que le déterminant n'est pas linéaire ! On a en général

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

On peut prendre par exemple le cas des matrices carrées :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.2.8. *Si A et B sont deux matrices semblables, alors*

$$\det(A) = \det(B).$$

Définition 2.2.9. *Soient* $u_1, u_2, ..., u_n$ *des vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel E de dimension n. On appelle déterminant de* $(u_1, u_2, ..., u_n)$ *dans une base B et on note* $\det_B(u_1, u_2, ..., u_n)$ *le déterminant de la matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs* $u_1, u_2, ..., u_n$*.*

Nous pouvons ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme.

Théorème 2.2.10. *Soit E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Alors le scalaire* $\det_B(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ *ne dépend pas de la base*

$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *choisie. On l'appelle déterminant de l'endomorphisme* f *et on note* $\det(f)$.

Démonstration. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ deux bases de E. On note M et N les matrices de l'endomorphisme f dans ces deux bases et P la matrice de passage de B à B'. Alors on a $N = P^{-1}MP$ et d'après la proposition précédente $\det(M) = \det(N)$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 2.2.11. $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = \det({}^tA)$.

Remarque 2.2.12. *Une conséquence du dernier résultat, est que par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes. Ainsi, le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes, si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul, on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes...*

2.3 Inverse d'une matrice

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.3.1. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*.Alors*

$$A \text{ est inversible } \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

L'ensemble des matrices carrées (n,n) inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est noté $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$).

En fait il y a une formule pour la matrice inverse : Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

Nous lui associons la matrice C des cofacteurs, appelée **Comatrice**, et notée **com(A)** :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & . & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.3.2. *Soit A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^{t}C$$

Exemple 2.3.3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Le calcul donne que* $\det(A) = 2$. *La comatrice* $C = com(A)$ *s'obtient en calculant* 9 *déterminants* $(2,2)$ *(sans oublier les signes* $+/-$*). On trouve :*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^{t}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Applications des déterminants : Système de Cramer

Le théorème suivant appelé **règle de Cramer**, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que l'inconnues.

Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle

$$AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & . & . & a_{2n} \\ . & & & . & . & . & . & & . \\ . & & & . & . & . & . & & . \\ . & & & . & . & . & . & & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la $j$ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système, dans le cas où $\det(A) \neq 0$, en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 2.4.1. *Soit $AX = B$ un système de n équations à n inconnues. Supposons que*

$\det(A) \neq 0$. *Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, ...,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Démonstration. Nous avons supposé que $\det(A) \neq 0$. Donc A est inversible. Par suite, $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^tC$ où C est la comatrice de A. Donc $X = \frac{1}{\det(A)}{}^tCB$. En développant,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & . & . & . & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & . & . & . & c_{n2} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ c_{1n} & c_{2n} & . & . & . & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + ... + c_{n1}b_n \\ c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + ... + c_{n2}b_n \\ . \\ . \\ . \\ c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + ... + c_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

□

C'est-à-dire,

$$x_1 = \frac{c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + ... + c_{n1}b_n}{\det(A)}, ..., x_i = \frac{c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n}{\det(A)}, ..., x_n = \frac{c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + ... + c_{nn}b_n}{\det(A)}.$$

Mais $c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n$ est le développement en cofacteurs de $\det(A_i)$ par rapport à sa $i$ème colonne. Donc,

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},\ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Exemple 2.4.2. *Résolvons le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 + -2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \textit{ et } B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = 44,\ \det(A_1) = -40,\ \det(A_2) = 72 \textit{ et } \det(A_3) = 152.$$

La solution est alors,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11},$$
$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$
$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

2.5 Exercices

Exercice 7

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & 6 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

2)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3)

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix}, \; C_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ m & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Discuter en fonction du paramètre m l'inversibilité de A_m.

2) Déterminer l'inverse de A_m dans le cas où $m = 2$.

Exercice 9

Soit le système

$$(S) = \begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y+z=5 \\ -5x+y+2z=1 \end{cases}$$

1) Déterminer la matrice M_S et donner l'écriture matricielle de (S).

2) Montrer que (S) est de Cramer.

3) Donner la solution de (S) et en déduire M_S^{-1}.

Exercice 10

1) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

2) Pour quelles valeurs du paramètre réel a le système suivant n'est-il pas de Cramer ?

$$(S) = \begin{cases} x+y+z=3 \\ a^2x+(a-2)^2y+(2a-1)^2z=11-8a \\ a^4x+(a-2)^4y+(2a-1)^4z=83-80a \end{cases}$$

3) Résoudre le système pour les valeurs de a trouvées en 2).

Exercice 11

On considère le système

$$(S) = \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=-4b \\ x+by+az=3 \end{cases}$$

où a et b sont deux paramètres réels.

1) Déterminer pour quelles valeurs de a et b le système (S) est de Cramer.

2) Résoudre (S) dans le cas où $a=2$ et $b=-1$.

CHAPITRE 3

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISME : DIAGONALISATION ET TRIGONALISATION

Pour décrire un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, on cherche une base de E dans laquelle la matrice de f soit la plus simple. Pour diverses raisons, on voudrait que cette matrice soit diagonale, c'est-à-dire que les coefficients en dehors de la diagonale soient nuls.

Tout le long du chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Diagonalisation

3.1.1 Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E.

Définition 3.1.1. *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x$; x est alors appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.*

Remarque 3.1.2. *Tous les multiples non nuls d'un vecteur propre de f sont encore des vecteurs propres de f pour la même valeur propre. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f s'appelle **spectre** de f et est noté $sp(f)$.*

Exemple 3.1.3. *Si f est une homothétie d'un espace vectoriel E, $f = a.Id_E$, alors tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à la valeur propre a.*

Exemple 3.1.4. *L'exemple que nous donnons ici concerne un espace vectoriel réel de dimension infinie. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables. L'application $u : E \longrightarrow E$ qui à une fonction associe sa dérivée est un endomorphisme de E. Alors pour tout réel λ, la fonction $f_\lambda(t) = \exp(\lambda t)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, car $f_\lambda \neq 0$ et $u(f_\lambda) = f'_\lambda = \lambda f_\lambda$.*

Dans le théorème suivant nous caractérisons de façons plus précise les valeurs propres d'un endomorphisme.

Théorème 3.1.5. *Soit $f \in L(E)$ et λ un scalaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *λ est valeur propre de f ;*

(ii) *L'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire son noyau vérifie*

$$\ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E/(f - \lambda Id_E)(x) = 0\} \neq \{0\};$$

(iii) $\det(f - \lambda Id_E) = 0$ *;*

(iv) $\det(M - \lambda I_n) = 0$*, où M est la matrice de f dans n'importe quelle base de E.*

Démonstration. Pour que λ soit valeur propre de f il faut et il suffit qu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x$, c'est-à-dire que l'on ait $(f - \lambda Id_E)(x) = 0$, ou encore que le noyau $\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$. Ceci entraine l'équivalence de (i) et (ii). Pour que l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ de l'espace vectoriel de dimension n finie E ne soit pas injectif il faut et il suffit qu'il ne soit pas bijectif, c'est-à-dire que son déterminant soit nul, d'où l'équivalence de (ii) et (iii). Enfin par définition du déterminant d'un endomorphisme, (iii) et (iv) sont équivalentes. □

3.1.2 Polynôme caractéristique

Définition 3.1.6. *Le **polynôme caractéristique** de $f \in L(E)$ est défini par*

$$C_f(X) = \det(f - XId_E).$$

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $C_f(X) \in \mathbb{K}[X]$. De plus, si M est la matrice de f dans une base quelconque B de E, alors

$$C_f(X) = \det(M - XI_n).$$

Théorème 3.1.7. *Les valeurs propres d'un endomorphisme f sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont exactement les racines de son polynôme caractéristique qui sont dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{K} \text{ est valeur propre de } f &\iff f - \lambda Id_E \text{ est non injectif} \\
&\iff \det(f - \lambda Id_E) = 0 \\
&\iff C_f(\lambda) = 0 \\
&\iff \lambda \text{ est une racine de } C_f \text{ dans } \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

□

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit X une indéterminé, alors on peut écrire :

$$M - XI_n = \begin{pmatrix} m_{11} - X & m_{12} & . \; . \; . & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - X & . \; . \; . & m_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ m_{n1} & m_{n2} & . \; . \; . & m_{nn} - X \end{pmatrix}$$

Proposition 3.1.8. *Le polynôme caractéristique d'une matrice (ou d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) est un polynôme de degré n.*

Comme un polynôme de degré n a au plus n racines on obtient :

Corollaire 3.1.9. *En dimension n un endomorphisme (ou une matrice d'ordre n) a au plus n valeurs propres distinctes.*

Exemple 3.1.10. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire. Alors $A - XI_n$ est aussi une matrice triangulaire et le polynôme caractéristique (déterminant d'une matrice tri-*

angulaire) est donc le produit des coefficients diagonaux, c'est-à-dire

$$C_A(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X)...(a_{nn} - X).$$

Les valeurs propres de A sont donc les coefficients diagonaux de A. En particulier ce résultat est vrai pour une matrice diagonale.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de f est l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique de f.

3.1.3 Sous-espace propre

Ce qui précède montre que l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ auquel on ajoute le vecteur nul est exactement $\ker(f - \lambda Id_E)$.

Définition 3.1.11. *Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f. On appelle* ***sous-espace propre*** *associé à λ, le sous-espace vectoriel de E défini par $E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E)$.*

Remarque 3.1.12. *C'est en cherchant le noyau de l'application $f - \lambda Id_E$ que l'on détermine les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.*

Exemple 3.1.13. *Le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est*

$$C_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1.$$

Les valeurs propres sont ± 1. Les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres se *déterminent alors de la manière suivante :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow (M-1.I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y.$$

Donc E_1 est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1} \Longleftrightarrow (M+1.I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=-y.$$

Donc E_{-1} est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 3.1.14. *Soit $f \in L(E)$ et λ une valeur propre de f. Alors la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre λ. En particulier, si λ est une valeur propre simple (multiplicité égale à* 1*) alors* $\dim E_\lambda = 1$.

3.1.4 Critères de diagonalisation

Définition 3.1.15. *On dit qu'un polynôme $P(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ s'il est décomposable en un produit de facteurs du premier degré à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire s'il peut s'écrire sous la forme :*

$$P(X) = a\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i),\ a, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Remarque 3.1.16. *Si le polynôme caractéristique $C_f(X)$ d'un endomorphisme f est scindé dans $\mathbb{K}$, alors on peut l'écrire sous la forme :*

$$C_f(X) = (-1)^n\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{m_i},$$

où $r, 1 \leq r \leq n$, représente le nombre de valeurs propres distinctes, les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ sont les *différentes valeurs propres et les* $(m_i)_{1\leq i\leq r}$ *sont leurs ordres de multiplicité respectifs. On a de plus* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$.

Définition 3.1.17. *On dit que* $f \in L(E)$ *est diagonalisable s'il existe une base de* E *constituée de vecteurs propres.*

Remarque 3.1.18. *Dans une telle base la matrice de* f *s'écrit*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.1.19. *Soit* f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie,* C_f *son polynôme caractéristique,* $\lambda_1,...,\lambda_r$ *une liste sans répétition de toutes ses valeurs propres et* $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id_E)$ $(1 \leq i \leq r)$ *ses sous-espaces propres associés. Les énoncés suivants sont alors équivalents :*

(i) f *est diagonalisable ;*

(ii) C_f *est scindé, mettons :* $C_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i}$, *et la multiplicité de chaque racine* λ_i *de* C_f *est égale à la dimension du sous-espace propre associé à* λ_i *;* $\dim E_{\lambda_i} = m_i,\ 1 \leq i \leq r$;

(iii) $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + ... + \dim E_{\lambda_r}$;

(iv) E *est la somme directe des sous-espaces propres de* f *:*

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}\ (E = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_r} \text{ et } E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}, i \neq j).$$

3.1.5 Méthode de diagonalisation-Exemple

Afin de diagonaliser un endomorphisme f, on peut procéder comme suit :

1) Calcule et scindage de C_f : $C_f(X) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{m_i}$. si C_f n'est pas scindé, alors f n'est pas diagonalisable.

2) Pour chaque racine λ_i de C_f, détermination d'une base $\{u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in_i}\}$ du sous-espace propre $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id_E)$.

- Si l'une de ces bases vérifie : $n_i = \dim E_{\lambda_i} < m_i$, alors f n'est pas diagonalisable.
- Sinon, on a $n_i = \dim E_{\lambda_i} = m_i$ pour tout i et l'on obtient une base de E en les juxtaposant. La matrice de passage à cette nouvelle base et la matrice diagonale représentant f dans cette dernière s'en déduisent immédiatement :

$$P = \begin{pmatrix} u_{11} & . & . & u_{1n_1} & . & . & u_{r1} & . & . & u_{rn_r} \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & . & & . & & . & 0 \\ 0 & . & & & & & & & \\ & & . & . & & & & & . \\ . & & . & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & . & . & & & . \\ . & & & & . & . & & & \\ & & & & & & \lambda_r & . & . \\ . & & & & & & . & . & \\ & & & & & & & . & 0 \\ 0 & & . & & . & & . & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Exemple 3.1.20. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $C_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, donc f n'est pas diagonalisable.

Considérons maintenant l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ représenté par la matrice A : On a cette fois $C_g(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ et g a deux valeurs propres simples : i et

$-i$. Les deux sous-espaces propres correspondants E_i, E_{-i} sont donc de dimension 1 et g est diagonalisable. Déterminons une base de E_i.

Les vecteurs de $E_i = \ker(g - iId_{\mathbb{C}^2})$ sont les vecteurs $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$(A - iI_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -iz_1 + z_2 = 0 \\ -z_1 - iz_2 = 0 \end{cases} .$$

Autrement dit tels que $z_2 = iz_1$. On peut donc choisir comme base de E_i le vecteur $u_1 = (1, i)$. On trouve de même que E_{-i} est l'ensemble de vecteurs $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $z_2 = -iz_1$, et l'on peut donc choisir comme base de E_{-i} le vecteur $u_2 = (1, -i)$. La matrice de passage à la base $\{u_1, u_2\}$ et la matrice de g dans cette dernière sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

En conclusion, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$.

3.2 Trigonalisation

3.2.1 Endomorphisme trigonalisable

Définition 3.2.1. *Une matrice carrée A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire T, supérieure ou inférieure, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}TP$.*

Définition 3.2.2. *On dit que $f \in L(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure ou inférieure.*

Trigonaliser f signifie : Rechercher une telle base. Si f a dans la base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$

une matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors pour tout j : $f(u_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} u_i$.

Trigonaliser $f : E \longrightarrow E$ revient donc à chercher une base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de E telle que pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $f(u_j)$ appartient au sous-espace engendré par les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_j$:

$$f(u_j) \in \text{ vect}(u_1, u_2, ..., u_j).$$

En particulier, u_1 est nécessairement un vecteur propre de f.

Remarque 3.2.3. *Tout endomorphisme (ou matrice) diagonalisable est trigonalisable.*

Théorème 3.2.4. *$f \in L(E)$ est trigonalisable si et seulement si f est scindé.*

En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f est toujours trigonalisable.

3.2.2 Exemples de trigonalisation

Exemple 3.2.5. *On considère f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne : $C_f(X) = C_A(X) = (1-X)^3$. La matrice A admet donc une seule valeur propre $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon, *il existerait une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}.I_3.P$, alors $A = I_3$, or ce n'est pas le cas.*

On détermine maintenant le sous espace propre E_1 associé à cette valeur propre.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 = Ker(A - 1.I_3) \Leftrightarrow (A - 1I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
$$\iff x + y - z = 0$$
$$\iff x + y = z.$$

Donc,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, x + y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, 0, x) + (0, y, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Comme les deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libres, car le sous-déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, alors on peut choisir $\{u_1, u_2\}$ comme base de E_1.

On complète (u_1, u_2) par un vecteur u_3 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$. Ici, on peut par exemple choisir $u_3 = e_3$. Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$est libre car, $\det(u_1, u_2, u_3) = 1 \neq 0$. *On a donc les relations suivantes :*

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_3 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 - u_3 \\ e_2 = u_2 - u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases}.$$

Ainsi, $f(u_1) = u_1,\ f(u_2) = u_2$ *et*

$$\begin{array}{rcl} f(u_3) = f(e_3) & = & -2e_1 + e_2 \\ & = & -2(u_1 - u_3) + (u_2 - u_3) \\ & = & -2u_1 + u_2 + u_3. \end{array}$$

La matrice de f *dans la base* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *s'écrit alors :*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $T = P^{-1}AP$, *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 3.2.6. *On considère* f *l'endomorphisme de* $E = \mathbb{R}^4$ *dont la matrice dans la base canonique* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne $C_f(X) = C_A(X) = (1 - X)^4$. *Il y a donc une seule valeur propre* $\lambda = 1$ *d'ordre* 4. *On détermine maintenant le sous-espace propre* E_1

associé à cette valeur propre.

$$(A-1I_4)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-3y+3t=0\\-2x-7y+13t=0\\-3y+3t=0\\-x-4y+7t=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=3t\\y=t\end{cases}.$$

L'unique sous-espace propre E_1 est donc de dimension 2 ($<4=\dim\mathbb{R}^4$) donc f n'est pas diagonalisable, E_1 est engendré par les vecteurs u_1 et u_2 de coordonnées dans la base canonique

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}\ et\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

On complète (u_1,u_2) par (u_3,u_4) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Ici on peut par exemple choisir $u_3=e_1$ et $u_4=e_2$. On a donc les relations suivantes :

$$e_1=u_3, e_2=u_4, e_3=u_2, e_4=u_1-3u_3-u_4.$$

Ainsi :

$$f(u_3)=f(e_1)=e_1-2e_2-e_4=-u_1+4u_3-u_4$$
$$f(u_4)=f(e_2)=-3e_1-6e_2-3e_3-4e_4=-4u_1-3u_2+9u_3-2u_4.$$

La matrice de f dans la base $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ s'écrit alors

$$A'=\begin{pmatrix}1&0&-1&-4\\0&1&0&-3\\0&0&4&9\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}.$$

On considère la sous-matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

qui est la matrice de la projection de f *sur le sous-espace engendré par* (u_3 *et* u_4)*, dans la base canonique de ce sous-espace. On va maintenant trigonaliser cette matrice. Le polynôme caractéristique de cette matrice est*

$$C_{A_1}(X) = (1 - X)^2.$$

Cette matrice n'a qu'une seule valeur propre double qui est 1*. Le sous espace propre associé à cette valeur propre est déterminé par*

$$\begin{cases} 3x + 9y = 0 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = -3y.$$

Sa dimension est donc 1*, et il est engendré par* v_1 *de coordonnées dans la base canonique du sous-espace* $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$*. On le complète en une base du sous-espace avec un vecteur* v_2 *de coordonnées* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs correspondants dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$ *sont donc*

$$v_1' = -3u_3 + u_4 \text{ et } v_2' = u_4. \text{ Ainsi}$$

$$\begin{aligned} f(v_1') &= -u_1 - 3u_2 + v_1' \\ f(v_2') &= -4u_1 - 3u_2 - 3v_1' + v_2'. \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, v_1', v_2'\}$ s'écrit alors

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Polynômes d'endomorphismes-Polynôme minimal

3.3.1 Polynômes d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On définit les puissances de f par :

$$f^0 = Id_E, \;\; f^1 = f, \;\; f^2 = f \circ f, ..., \;\; f^{m+1} = f^m \circ f.$$

Plus généralement, si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_m X^m$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors on définit le polynôme d'endomorphisme $P(f)$ par :

$$P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_m f^m.$$

Si A est la matrice de f dans une base B de E, alors le polynôme de matrice $P(A)$ défini par :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_m A^m$$

est la matrice de $P(f)$ dans la base B.

Proposition 3.3.1. *Pour tout endomorphisme f de E, il existe un polynôme non nul $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$ (où 0 est l'endomorphisme nul de E).*

Démonstration. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, donc $L(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. Par conséquent, les $n^2 + 1$ endomorphismes $Id_E, f, f^2, ..., f^{n^2}$ sont liés. Donc il existe des coefficients $a_0, a_1, ..., a_{n^2}$ de $\mathbb{K}$ non tous nuls, tels que

$a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n^2} f^{n^2} = 0$. C'est-à-dire le polynôme non nul

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_{n^2} X^{n^2}$$

vérifie $Q(f) = 0$. $\square$

Définition 3.3.2. *On appelle polynôme annulateur de f tout polynôme $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$*

3.3.2 Polynôme minimal

Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe un unique polynôme unitaire $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$) de $\mathbb{K}[X]$ de degré minimal, vérifiant $m_f(f) = 0$ (resp. $m_A(A) = 0$), tel que tout polynôme annulateur de f (resp. de A) est multiple de $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$).

Théorème 3.3.3 (de Cayley-Hamilton). *Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le polynôme caractéristique $C_f(X)$ de f (resp. $C_A(X)$ de A) est un polynôme annulateur de f (resp. de A).*

Corollaire 3.3.4. *Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le polynôme minimal $m_f(X)$ divise $C_f(X)$ et $m_A(X)$ divise $C_A(X)$.*

Exemples 3.3.5. *1) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $C_f(X) = (2-X)(X-1)^2 = -(X-2)(X-1)^2$, il en résulte que $m_f(X) = (X-2)(X-1)$ ou $m_f(X) = (X-2)(X-1)^2$.*
Or, $(A-2I_3)(A-I_3) \neq 0$, alors $m_f(X) = (X-2)(X-1)^2$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $C_A(X) = (1-X)(2+X)^2 = -(X-1)(X+2)^2$.
Comme $(A-I_3)(A+2I_3) = 0$, alors $m_A(X) = (X-1)(X+2)$.

Théorème 3.3.6. *Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$). Alors f (resp. A) est diagonalisable si et seulement si les racines de $m_f(X)$ (resp. de $m_A(X)$) sont simples et appartiennent à $\mathbb{K}$.*

3.4 Exercices

Exercice 12

Calculer le polynôme minimal pour chacune des matrice suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Dans cet exercice on se propose de calculer A^n où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient C la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $M_C(f) = A$.

1) Montrer que -1 et 2 sont les seules valeurs propres de f.

2) Déterminer le sous-espace propre E_{-1} et en donner une base B_1.

3) Déterminer le sous-espace propre E_2 et en donner une base B_2.

4) Montrer qu'on réunissant B_1 et B_2 on obtient une base B de $\mathbb{R}^3$.

5) Déterminer la matrice D représentant f dans la base B.

6) Calculer la matrice de passage P de la base C à la base B, ainsi que son inverse P^{-1}.

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3, \;\; f(e_2) = 3e_1 - e_3, \;\; f(e_3) = -3e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

1) Donner la matrice A de f dans la base B. Calculer les valeurs propres de f et ses sous-espaces propres.

2) Montrer que f est diagonalisable.

3) Calculer A^n. Quel est l'image du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$ par l'application $f \circ f \circ f$.

4) On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \; (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrences :

$$(S) = \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

et $u_0 = v_0 = w_0 = 1$.

Déterminer $u_n, \; v_n$ et w_n en fonction de n.

CHAPITRE 4

FORMES BILINÉAIRES ET FORMES QUADRATIQUES

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

4.1 Formes bilinéaires

4.1.1 Formes linéaires

Définition 4.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.*

Proposition 4.1.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Une application f de E dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire si et seulement si il existe n scalaires $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$,*

$$f(x) = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n.$$

Ceci se vérifie facilement en remarquant que $a_i = f(e_i)$.

Exemple 4.1.3. *Si $E = \mathbb{K}_n[X]$, et si $a \in \mathbb{K}$ alors l'application $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ qui à $P(X)$ associe $P(a)$ est une forme linéaire sur E.*

Définition 4.1.4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle espace* ***dual*** *(ou simplement dual) de E l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, c'est-à-dire $L(E,K)$, et on le note E^*.*

Définition 4.1.5. *Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Pour tout $i = 1, 2, ..., n$ on définit une forme linéaire e_i^* sur E en posant*

$$\textit{pour } 1 \leq j \leq n,\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}.$$

δ_{ij} est appelé le ***symbole de Kroneker.***

Proposition 4.1.6. *Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. L'ensemble $B^* = \{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ défini comme ci-dessus est une base de E^* et est appelé* ***base duale*** *de B.*

4.1.2 Formes bilinéaires

Définition 4.1.7. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une forme bilinéaire sur $E \times F$ est une application φ de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$, telle que :*

- *Pour x fixé dans E, l'application $\varphi_x : y \longrightarrow \varphi(x,y)$ est une forme linéaire sur F.*
- *Pour y fixé dans F, l'application $\varphi_y : x \longrightarrow \varphi(x,y)$ est une forme linéaire sur E.*

Exemple 4.1.8. *Soit F l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ (autrement dit l'espace des formes linéaires sur E). L'application de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$ qui à (x, f) associe $f(x)$ est une forme bilinéaire.*

Dans la suite on va supposer que $E = F$. Dans ce cas, on parle de forme bilinéaire sur E.

Exemples 4.1.9. *1) Soit $E = \mathbb{K}$. Soit a un élément de $\mathbb{K}$ et φ l'application de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $\varphi(x,y) = axy$. C'est une forme bilinéaire.*

Réciproquement, toutes les formes bilinéaires sur $\mathbb{K}$ sont de ce type. En effet, soit φ une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}$. Alors, pour tout (x,y) de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\varphi(x,y) = x\varphi(1,y)$ (linéarité par rapport à la première variable). Or, $\varphi(1,y) = y\varphi(1,1)$ (linéarité par rapport à la deuxième variable). D'où : $\varphi(x,y) = xy\varphi(1,1)$. En posant $a = \varphi(1,1)$ qui est bien un scalaire, il vient $\varphi(x,y) = axy$.

2) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et ψ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par

$$\psi(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ (vérification immédiate).

4.1.3 Matrice d'une forme bilinéaire

Il est toujours possible d'associer à une application linéaire une matrice dans une base. Voyons ce qu'il en est pour une forme bilinéaire φ. Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et soient

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

deux éléments de E. On a

$$\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{1 \le i,j \le n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_j.$$

Ainsi, la forme bilinéaire φ est déterminée de façon unique par la matrice suivante dans la base B :

$$M_{\varphi,B} = M_B = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1 \le i,j \le n}$$

Si on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base B et M_B la matrice associée à φ dans la base B, c'est donc la matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, il vient :

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right).$$

En notant $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, cela donne :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}.$$

La matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & x_n \end{pmatrix} = {}^tX$. Le scalaire $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$ peut être interprété comme le produit

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & . & . & . & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat suivant :

Proposition 4.1.10. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et φ une forme bilinéaire sur E. Soit M_B la matrice associée à φ dans la base B.*

Si x et y sont deux éléments de E, X et Y les matrices colonnes dont les éléments sont les coordonnées de x et y respectivement dans la base B, alors on a $\varphi(x,y) = {}^tXM_BY$.

4.1.4 Changement de base

Bien évidemment la question qui se pose est celle de l'existence d'une formule liant les matrices associées à une forme bilinéaire dans deux bases différentes.

Soient B et B' deux bases de E. P la matrice de passage de B à B'. Soient x et y deux éléments de E de matrices-colonnes X, X' et Y, Y' dans B et B' respectivement. Les formes classiques de changement de base donnent les relations :

$$X = PX' \text{ et } Y = PY'.$$

Alors, si φ est une forme bilinéaire sur E et M_B sa matrice dans la base B on a

$$\varphi(x,y) = {}^tXM_BY = {}^t(PX')M_B(PY') = {}^tX'({}^tPM_BP)Y'.$$

La formule trouvée prouve que $M_{B'} = {}^tPM_BP$ est la matrice associée à φ dans la base B'.

On peut donc énoncer la formule de changement de base :

Proposition 4.1.11. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soient φ une forme bilinéaire sur E, M et M' les matrices associées à φ dans les bases B et B' respectivement. Alors :*

$$M' = {}^tPMP.$$

Remarque 4.1.12. *Attention à ne pas confondre avec la formule de changement de base pour une application linéaire $M' = P^{-1}MP$.*

Ce qui précède nous donne la caractérisation suivante d'une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension n :

Proposition 4.1.13. *Soit $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E. Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire sur E si et seulement si il existent des scalaires a_{ij}, pour $1 \leq i, j \leq n$, tels que pour tout*

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \text{ et } y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n,$$

$\varphi(x,y)$ s'écrit de la manière suivante :

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j.$$

Définition 4.1.14. *On dit que deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, M et M', sont congruentes, s'il existe une matrice inversible P telle que $M' = {}^tPMP$.*

Définition 4.1.15. *Soit $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.*

- *φ est définie si*
$$\forall x \in E,\ \ \varphi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$$
- *φ est dite positive lorsque*
$$\forall x \in E,\ \ \varphi(x,x) \geq 0;$$
- *φ est dite définie positive lorsque*
$$\forall x \in E\setminus\{0\},\ \ \varphi(x,x) > 0.$$

4.1.5 Formes bilinéaires symétriques

Définition 4.1.16. *On dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si*

$$\forall (x,y) \in E\times E,\ \ \varphi(x,y) = \varphi(y,x);$$

Elle est antisymétrique si $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$.

Remarquer que la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que d'un seul côté.

Exemple 4.1.17. *La relation $\varphi\left((x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\right) = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ définit une forme bilinéaire symétrique et définie positive (à vérifier).*

Proposition 4.1.18. *Pour qu'une forme bilinéaire soit symétrique il faut et il suffit que sa matrice dans une base donnée soit symétrique (c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$).*

Démonstration. Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. La matrice de la forme bilinéaire φ dans cette base est $\big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1\leq i,j\leq n}$.

Si cette matrice est symétrique on a pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$,

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(e_i, e_j)x_i y_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(e_j, e_i)y_j x_i = \varphi(y,x),$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire est symétrique. $\square$

4.2 Formes quadratiques

4.2.1 Généralités

Définition 4.2.1. *On dit qu'une application $Q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique sur l'espace vectoriel E s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur $E \times E$ vérifiant $Q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout x dans E. φ est appelée la forme bilinéaire associée à Q.*

Exemples 4.2.2. *1) Soient $E = \mathbb{K}$, a un élément de $\mathbb{K}$ et φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}$ définie par $\varphi(x,y) = axy$. Alors*

$$Q : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longrightarrow ax^2$$

est une forme quadratique associée à φ.

2) Soient $E = \mathbb{K}^2$ et ψ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}^2$ définie par $\psi((x,y),(x',y')) = xx' + yy'$. Alors

$$Q : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longrightarrow x^2 + y^2$$

est une forme quadratique associée à ψ.

Proposition 4.2.3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée à φ.*

i) Soient x un élément de E et λ un scalaire. Alors,

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

ii) Pour tout (x,y) appartenant à $E \times E$,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right].$$

Cette dernière formule est appelée ***formule de polarisation.***

Démonstration. i) Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$Q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x,x) = \lambda^2 Q(x).$$

ii) Soit $(x,y) \in E \times E$. Alors,

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) \\ &= \varphi(x, x+y) + \varphi(y, x+y) \\ &= \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y). \end{aligned}$$

Comme φ est symétrique cela donne

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= Q(x) + 2\varphi(x,y) + Q(y). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Le théorème suivant permet d'avoir une caractérisation des formes quadratiques plus utilisable.

Théorème 4.2.4. *Une application Q de E dans $\mathbb{K}$ est une forme quadratique sur E si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

1) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$.

2) L'application φ définie par :

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$$

est bilinéaire symétrique.

Si ces conditions sont satisfaites, Q est une formes quadratique associée à φ et la forme bilinéaire symétrique φ est souvent appelée ***forme polaire*** *associée à Q.*

Remarque 4.2.5. *Pour toute forme quadratique Q il existe une unique forme bilinéaire symétrique associée.*

Attention ! étant donné une forme quadratique Q, il existe en général une infinité de forme bilinéaires φ vérifiant $Q(x) = \varphi(x,x)$. Par exemple, si Q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $Q(x_1,x_2) = x_1x_2$ et si φ_λ est la forme bilinéaire définie par :

$$\varphi_\lambda\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \lambda x_1y_2 + (1-\lambda)x_2y_1,$$

alors on a $\varphi_\lambda(x,x) = Q(x)$, pour tout λ. Mais ces formes ne sont pas symétriques sauf pour $\lambda = \frac{1}{2}$, qui correspond à la forme bilinéaire associée.

Soient $B = \{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et Q une forme quadratique sur E. La matrice de Q dans cette base est exactement celle de sa forme bilinéaire associée φ. Si on note $M_B = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ cette matrice, et si de plus X est la matrice colonne dans B d'un vecteur x de E, alors

$$Q(x) = {}^tXM_BX = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j,$$

car φ étant symétrique on a $a_{ij} = \varphi(e_i,e_j) = \varphi(e_j,e_i) = a_{ji}$.

Une forme quadratique s'écrit donc comme un polynôme homogène de degré 2 (tous les monômes sont de degré 2).

Réciproquement. Soit le polynôme en $x_1,x_2,...,x_n$ homogène de degré 2 suivant :

$$P(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{1\le i,j\le n} b_{ij}x_ix_j.$$

On a
$$P(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (b_{ij}+b_{ji})x_ix_j.$$
Soient les scalaires a_{ij} définis pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ par
$$a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij}+b_{ji}).$$

Ils vérifient en particulier les relations :
$$\forall i \in \{1,2,...,n\}, \;\; a_{ii} = b_{ii}$$
$$\forall i \in \{1,2,...,n\}, \; \forall j \in \{1,2,...,n\}, \;\; a_{ij} = a_{ji}.$$

Alors, il vient que
$$P(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j = \varphi(x,y),$$
où φ est la forme bilinéaire symétrique de matrice $\left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

Corollaire 4.2.6. *Soit Q une forme quadratique sur E dont l'expression dans la base $B = \{e_1,e_2,...,e_n\}$ de E est pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$*
$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}x_ix_j$$
avec α_{ij} sont des scalaires vérifiant $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Alors la forme bilinéaire symétrique associée à Q, a pour expression pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$
$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_iy_i + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij}(x_iy_j + x_jy_i).$$

Ce résultat est constamment utilisé dans la pratique.

Exemple 4.2.7. *Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soit Q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie pour tout*

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *par* $Q(x) = x_1^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 - 3x_3x_4 + 2x_1x_4$.

Comme $Q(x)$ *est une expression polynômiale homogène de degré* 2 *par rapport aux coordonnées* x_i *de* x *dans la base canonique, c'est une forme quadratique et sa forme polaire est définie pour tout* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *et* $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ *de* $\mathbb{R}^4$ *par*

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 - 2x_3y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{3}{2}(x_3y_4 + x_4y_3) + x_1y_4 + x_4y_1.$$

La matrice associée à φ *(ou à* Q*) dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *est :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2.2 Rang et noyau d'une forme quadratique

Définitions 4.2.8. *1) Soit* Q *une forme quadratique de* E *et* B *une base de* E*,* $M_{Q,B}$ *la matrice de* Q *dans la base* B*. On appelle* ***rang*** *de* Q*, notée* rgQ*, le rang de la matrice* $M_{Q,B}$*.*

2) On appelle noyau de Q *le sous-espace vectoriel de* E *:*

$$\ker Q = \{x \in E; \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\},$$

où φ *est la forme bilinéaire de* Q*.*

Remarque 4.2.9. *Le rang de* Q *ne dépend pas de la base choisie et le noyau de* Q *est celui de sa matrice relativement à n'importe quelle base.*

4.2.3 Forme quadratique non dégénérée

Définitions 4.2.10. *Soit* $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme quadratique de forme polaire* φ*. On dit que*

1) Q est non dégénérée si φ est non dégénérée, c'est-à-dire

$$(\forall y \in E, \varphi(x,y) = 0) \Longrightarrow x = 0.$$

2) Q est positive si et seulement si φ est positive ; c'est-à-dire $\forall x \in E$, $Q(x) \geq 0$.

3) Q est définie positive si et seulement si φ est aussi définie positive ; c'est-à-dire $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $Q(x) > 0$.

La proposition suivante donne des conditions nécessaire et suffisantes pour qu'une forme quadratique soit non dégénérée.

Proposition 4.2.11. *Soit Q une forme quadratique de E. Considérons une base B de E. Les assertions suivantes sont équivalents :*

i) Q est non dégénérée ;

ii) $\ker Q = \{0\}$;

iii) La matrice de Q dans la base B est inversible.

4.2.4 Signature d'une forme quadratique

Théorème 4.2.12. *Soit Q une forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel réel E de dimension n. Il existe une base de E dans laquelle Q s'écrit :*

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

De plus p et $p' = r - p$ ne dépendent que de Q et non pas de la base choisie.

Définition 4.2.13. *Le couple (p, p'), qui est formé par le nombre de carrés précédés du signe + et le nombre de carrés précédés du signe - s'appelle la signature de la forme quadratique Q à coefficient réels et le rang de Q vaut $p + p'$.*

Corollaire 4.2.14. *Soit une forme quadratique Q à coefficients réels de signature $s = (p, p')$ dans un espace vectoriel de dimension n. On a les propriétés suivantes :*

- $p + p' = n \iff Q$ *est non dégénérée.*

- $p' = 0 \iff Q$ *est positive.*

- $p = 0 \iff Q$ *est négative.*

- $s = (n, 0) \iff Q$ *est définie positive.*

- $s = (0, n) \iff Q$ *est définie négative.*

4.2.5 Orthogonalité et base orthogonale

Définition 4.2.15. *Soit E un espace vectoriel et φ une forme bilinéaire sur E. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux (relativement à φ), si $\varphi(x, y) = 0$.*

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle orthogonal de F (relativement à φ), et on note $F^{\perp}$, l'ensemble des y de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de F.

Il est immédiat que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 4.2.16. *Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et φ une forme bilinéaire sur E, éventuellement non dégénérée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

(ii) $E = F + F^{\perp}$.

(iii) *La restriction de φ à F est non dégénérée.*

Définition 4.2.17. *Un vecteur x de E est dit **isotrope**, s'il est orthogonal à lui-même.*

Définition 4.2.18. *Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie n, et soit φ sa forme polaire. Une base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E est dite **orthogonale** pour Q quand $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$. Autrement dit, une base est orthogonale pour Q quand la matrice de Q dans cette base est diagonale.*

Théorème 4.2.19. *Toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie admet des bases orthogonales.*

4.2.6 Méthode de Gauss pour diagonaliser une forme quadratique

Il s'agit d'un algorithme permettant de trouver une décomposition d'une forme quadratique en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Les identités suivantes sont les outils essentiels de cet algorithme.

(I_1) $x^2+2xy=(x+y)^2-y^2$;

(I_2) $xy=\frac{1}{4}\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]$.

La preuve est basée sur une démonstration par récurrence sur la dimension n de E.

• Si $n=1$, il n'y a rien à dire.

• Si $n>1$. Supposons que toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-1$ admet une décomposition en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

• Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension n.

Si $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ est une base de E et x un élément de E, $Q(x)$ s'écrit :

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}x_ix_j.$$

Premier cas : il existe au moins un indice i pour lequel $a_{ii}\neq 0$. on dit usuellement qu'il existe un terme carré. Par exemple supposons $a_{11}\neq 0$.

Alors $Q(x)$ peut être ordonnée comme un polynôme du second degré en x_1. Cela donne $Q(x)=a_{11}x_1^2+x_1A(x_2,x_3,...,x_n)+C(x_2,x_3,...,x_n)$ où A est une expression polynômiale homogène de degré 1 par rapport à $(x_2,x_3,...,x_n)$, donc une forme linéaire en $(x_2,x_3,...,x_n)$ et C une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport à $(x_2,x_3,...,x_n)$, donc une forme quadratique en $(x_2,x_3,...,x_n)$.

En utilisant l'identité (I_1) il vient :

$$Q(x)=a_{11}\left[x_1+\frac{1}{2a_{11}}A(x_2,...,x_n)\right]^2-\frac{1}{4a_{11}}\left[A(x_2,...,x_n)\right]^2+C(x_2,...,x_n).$$

D'où,

$$Q(x) = a_{11}\left[x_1 + \frac{1}{2a_{11}}A(x_2,...,x_n)\right]^2 + \left[C(x_2,...,x_n) - \frac{1}{4a_{11}}\left[A(x_2,...,x_n)\right]^2\right].$$

L'expression $C(x_2,...,x_n) - \frac{1}{4a_{11}}\left[A(x_2,...,x_n)\right]^2$ est une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport à $(x_2,...,x_n)$, qui peut donc être considérée comme une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$. cela permet d'écrire

$$Q(x) = a_{11}\left[x_1 + \frac{1}{2a_{11}}A(x_2,...,x_n)\right]^2 + Q_1(x_2,...,x_n).$$

On termine en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q_1.

Second cas : il n'existe pas d'indice i pour lequel $a_{ii} \neq 0$.

Si Q est nulle c'est fini, sinon au moins un $a_{ij} \neq 0$ (avec $i \neq j$). On dit usuellement que $a_{ij}x_ix_j$ est un terme rectangle. Par exemple supposons $a_{12} \neq 0$.

Alors, $Q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1A(x_3,...,x_n) + x_2C(x_3,...,x_n) + D(x_3,...,x_n)$, où A et C sont des formes linéaires en $(x_3,...,x_n)$ et D une forme quadratique en $(x_3,...,x_n)$. Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{12}\left[x_1 + \frac{1}{a_{12}}C(x_3,...,x_n)\right]\left[x_2 + \frac{1}{a_{12}}A(x_3,...,x_n)\right] \\ &+ D(x_3,...,x_n) - \frac{1}{a_{12}}A(x_3,...,x_n)C(x_3,...,x_n). \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$Q(x) = a_{12}f_1(x_1,x_3,...,x_n)f_2(x_2,x_3,...,x_n) + Q_3(x_3,...,x_n),$$

où f_1 et f_2 sont des formes linéaires en $(x_1,x_3,...,x_n)$ et $(x_2,x_3,...,x_n)$ respectivement et Q_3 une forme quadratique en $(x_3,...,x_n)$.

En utilisant l'identité (I_2), il vient :

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{a_{12}}{4}\left[(f_1(x_1,x_3,\ldots,x_n)+f_2(x_2,x_3,\ldots,x_n))^2-(f_1(x_1,x_3,\ldots,x_n)-f_2(x_2,x_3,\ldots,x_n))^2\right] \\ &+ Q_3(x_3,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

On termine en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q_3.

Exemple 4.2.20. *Appliquons la méthode à la forme quadratique*

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_3+6x_3x_4.$$

Q contient un carré, on commence donc par appliquer le premier cas.

$$\begin{aligned} Q(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2+2x_1(-x_3+x_4)+x_3^2+x_4^2+4x_2x_3+6x_3x_4 \\ &= (x_1-x_3+x_4)^2-(-x_3+x_4)^2+x_3^2+x_4^2+4x_2x_3+6x_3x_4 \\ &= (x_1-x_3+x_4)^2+4x_2x_3+8x_3x_4. \end{aligned}$$

On obtient $Q_1(x_2,x_3,x_4)=4x_2x_3+8x_3x_4$, qui ne contient pas de carré. On applique donc la méthode du second cas.

$$\begin{aligned} Q_1(x_2,x_3,x_4) &= 4x_2x_3+8x_3x_4=4(x_2+2x_4)(x_3+0) \\ &= (x_2+x_3+2x_4)^2-(x_2-x_3+2x_4)^2+0, \end{aligned}$$

où la dernière forme quadratique est nulle. Le procédé est donc terminé et on obtient :

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_3+x_4)^2+(x_2+x_3+2x_4)^2-(x_2-x_3+2x_4)^2.$$

Si Q est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel la décomposition est achevée. Par contre si c'est une forme quadratique sur un espace vectoriel complexe on peut encore enlever les signes moins et on obtient :

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_3+x_4)^2+(x_2+x_3+2x_4)^2+(ix_2-ix_3+2ix_4)^2.$$

4.3 Exercices

Exercice 15

Les applications suivantes sont-elles bilinéaires ? symétriques ?

1) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1x_2 + y_1y_2$.

2) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$.

3) Sur $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,Q) = P'(1)Q(0) + P'(0)Q(1)$.

4) Sur $C([0,1],\mathbb{R})$, $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(1-t)dt$.

5) Sur $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M,N) = Tr(MN)$.

Exercice 16

Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base B_1 et sa matrice M_2 dans la base B_2. Calculer P, la matrice de passage de B_1 à B_2, et vérifier que $M_2 = {}^tPM_1P$.

1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = x_1y_2 + 3y_1x_2$,

$$B_1 = \{(1,0),(0,1)\} \text{ et } B_2 = \{(1,1),(1,2)\}.$$

2) $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = P(2)Q(1)$,

$$B_1 = \{1,X,X^2\} \text{ et } B_2 = \{1,X-1,X^2-3X+2\}.$$

3) $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx$,

$$B_1 = \{1,X,X^2\} \text{ et } B_2 = \{1,X-1,X^2-X\}.$$

Exercice 17

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$b\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

1) Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.

2) Déterminer la matrice M représentant b dans B.

3) b est-elle symétrique ? antisymétrique ?

4) Déterminer la partie symétrique, b_1, et la partie antisymétrique, b_2, de b.

5) Déterminer le rang de b.

Exercice 18

Soit b la forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentant dans la base canonique $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Quel est son rang ?

2) Déterminer la partie symétrique, b_1, et la partie antisymétrique, b_2, de b.

3) Pour tout $(u, v) \in E^2$, déterminer $b(u, v)$.

4) Justifier que la famille $B = \{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de E.

5) Déterminer de deux manières la matrice M' représentant b dans la base B.

Exercice 19

Considérons l'application $q : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $q(M) = \det(M)$.

1) Montrer que q est une forme quadratique.

2) Déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique B de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Déterminer la forme bilinéaire φ_q associée à q.

4) Décomposer q en somme de carrés indépendants suivant la méthode de Gauss.

5) En déduire le rang et la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?

6) Déterminer une base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit orthogonale pour q.

Exercice 20

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt.$$

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?

2) La forme quadratique q associée à φ est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.

3) Calculer la matrice de q dans la base canonique $B_0 = \{1, X, X^2\}$.

4) Déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?

5) Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit orthogonale pour q.

Exercice 21

Pour chacune des formes quadratiques suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, donner sa matrice dans la base canonique, sa forme polaire et utiliser la méthode de Gauss pour déterminer sa signature et en déduire une base orthogonale.

1) $q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$.

2) $q_2(x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.

3) $q_3(x) = 2x_1x_2$.

4) $q_4(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$.

5) $q_5(x) = 4x_1^2 - x_2^2$.

Exercices avec solutions : Algèbre 2–MIP

Exercice 1

On considère $B=\{(1,1,-1),(0,1,1),(1,0,3)\}$.

1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs u et v dans la base B.

$$a)u=(2,3,7),\quad v=(1,0,5).$$
$$b)u=(0,0,-6),\quad v=(4,4,9).$$

3) Calculer la matrice de passage P de la base canonique B_0 à la base B.

4) Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^3$; expliciter la relation entre les coordonnées de X dans les deux bases B et B_0.

Exercice 2

Calculer la matrice de passage de la base B à la base B' :

1) $B=\{(-1,0),(0,3)\},\quad B'=\{(1,1),(2,1)\}$.

2) $B=\{(1,-1),(1,0)\},\quad B'=\{(3,1),(5,-6)\}$.

3) $B=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\},\quad B'=\{(1,1,1),(2,1,1),(0,1,0)\}$.

4) $B=\{1,X,X^2\},\quad B'=\{X-X^2,-1,-1-3X+X^2\}$.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ est :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Soient $a=e_1-e_2+e_3,\ b=2e_1-e_2+e_3,\ c=e_1-2e_2+e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Expliciter $f(x,y,z)$ en fonction de x,y et z.

2) Montrer que $B' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer la matrice de passage P de B à B'. Calculer P^{-1}.

4) Déterminer la matrice R de f dans la base B' en calculant $f(a), f(b)$ et $f(c)$.

5) Exprimer la matrice R en fonction des matrices P, P^{-1} et A.

6) Calculer R^4.

7) En déduire les valeurs de A^{4n}, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = (x-2y, 3x+y)$.
Soient $B = \{(1,2),(1,1)\}$, et $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$.

1) Calculer la matrice M de f dans la base B.

2) Calculer la matrice de passage de B à B'.

3) Calculer l'inverse P^{-1} et en déduire la matrice N de f dans la base B' par la formule de changement de base.

4) Recalculer N directement et vérifier vos calcul.

Exercice 5

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ une application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par :

$$u(P) = P + (1-X)P' + 2P''.$$

On pose $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ où $P_1 = 1 - X$, $P_2 = 1$, $P_3 = 1 + 2X - X^2$.

1) Montrer que u est une application linéaire.

2) Expliciter $u(a + bX + cX^2)$ en fonction de a, b et c.

3) Déterminer la matrice A de u par rapport à la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

4) Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5) Donner la matrice A' de u dans la base B' en calculant $u(P_1), u(P_2)$ et $u(P_3)$.

6) Calculer les matrices de passage P et Q entre les base B et B'.

7) Déterminer A' par la formule de changement de base.

Exercice 6

Soient $B_0 = \{e_1, e_2\}$, $C_0 = \{f_1, f_2, f_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et soit

$$\begin{aligned} U \ : \ & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) \longrightarrow (3x+4y, -x+y, 2x-2y) \end{aligned}$$

1) Écrire la matrice A de U dans les bases B_0 et C_0.

2) Soient $e'_1 = 3e_1 + e_2$, $e'_2 = -2e_1 + 5e_2$ et $B' = \{e'_1, e'_2\}$.
Écrire les matrices de passage de B_0 à B' et de B' à B_0.

3) Écrire les matrices de passage de C_0 à $C' = \{f'_1, f'_2, f'_3\}$ et de C' à C_0, où :

$$f'_1 = -f_1 + f_3,\ f'_2 = 2f_1 - f_2 + 2f_3 \text{ et } f'_3 = f_1 - f_2 + f_3.$$

4) Déterminer $M_{C_0B'}(U)$, $M_{C'B_0}(U)$ et $M_{C'B'}(U)$.

Exercice 7

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & 6 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3)

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

On considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ m & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Discuter en fonction du paramètre m l'inversibilité de A_m.

2) Déterminer l'inverse de A_m dans le cas où $m = 2$.

Exercice 9

Soit le système

$$(S) = \begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y+z=5 \\ -5x+y+2z=1 \end{cases}$$

1) Déterminer la matrice M_S et donner l'écriture matricielle de (S).

2) Montrer que (S) est de Cramer.

3) Donner la solution de (S) et en déduire M_S^{-1}.

Exercice 10

1) Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$

2) Pour quelles valeurs du paramètre réel a le système suivant n'est-il pas de Cramer ?

$$(S) = \begin{cases} x+y-z=1 \\ a^2x+(a-2)^2y+(2a-1)^2z=11-8a \\ a^4x+(a-2)^4y+(2a-1)^4z=83-80a \end{cases}$$

3) Résoudre le système pour les valeurs de a trouvées en 2).

Exercice 11

On considère le système

$$(S) = \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=-4b \\ x+by+az=3 \end{cases}$$

où a et b sont deux paramètres réels.

1) Déterminer pour quelles valeurs de a et b le système (S) est de Cramer.

2) Résoudre (S) dans le cas où $a=2$ et $b=-1$.

Exercice 12

Calculer le polynôme minimal pour chacune des matrice suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Dans cet exercice on se propose de calculer A^n où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soient C la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $M_C(f) = A$.

1) Montrer que -1 et 2 sont les valeurs propres de f.

2) Déterminer le sous-espace propre E_{-1} et en donner une base B_1.

3) Déterminer le sous-espace propre E_2 et en donner une base B_2.

4) Montrer qu'on réunissant B_1 et B_2 on obtient une base B de $\mathbb{R}^3$.

5) Déterminer la matrice D représentant f dans la base B.

6) Calculer la matrice de passage P de la base C à la base B, ainsi que son inverse P^{-1}.

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3, \quad f(e_2) = 3e_1 - e_3, \quad f(e_3) = -3e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

1) Donner la matrice A de f dans la base B. Calculer les valeurs propres de f et ses sous-espaces propres.

2) Montrer que f est diagonalisable.

3) Calculer A^n. Quel est l'image du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$ par l'application $f \circ f \circ f$.

4) On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrences :

$$(S) = \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 3w_n \end{cases}$$

et $u_0 = v_0 = w_0 = 1$.

Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 15

Les applications suivantes sont-elles bilinéaires ? symétriques ?

1) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1x_2 + y_1y_2$.

2) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$.

3) Sur $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,Q) = P'(1)Q(0) + P'(0)Q(1)$.

4) Sur $C([0,1],\mathbb{R})$, $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(1-t)dt$.

5) Sur $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M,N) = Tr(MN)$.

Exercice 16

Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base B_1 et sa matrice M_2 dans la base B_2. Calculer P, la matrice de passage de B_1 à B_2, et vérifier que $M_2 = {}^tPM_1P$.

1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = x_1y_2 + 3y_1x_2$, $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ et $B_2 = \{(1,1),(1,2)\}$.

2) $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = P(2)Q(1)$, $B_1 = \{1, X, X^2\}$ et $B_2 = \{1, X-1, X^2 - 3X + 2\}$.

3) $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx$, $B_1 = \{1, X, X^2\}$ et $B_2 = \{1, X-1, X^2 - X\}$.

Exercice 17

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$b((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

1) Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.

2) Déterminer la matrice M représentant b dans B.

3) b est-elle symétrique ? antisymétrique ?

4) Déterminer la partie symétrique, b_1, et la partie antisymétrique, b_2, de b.

5) Déterminer le rang de b.

Exercice 18

Soit b la forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentant dans la base canonique $B_0 =$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Quel est son rang ?

2) Déterminer la partie symétrique, b_1, et la partie antisymétrique, b_2, de b.

3) Pour tout $(u, v) \in E^2$, déterminer $b(u, v)$.

4) Justifier que la famille $B = \{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$ est une base de E.

5) Déterminer de deux manières la matrice M' représentant b dans la base B.

Exercice 19

Considérons l'application $q : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $q(M) = \det(M)$.

1) Montrer que q est une forme quadratique.

2) Déterminer la matrice de q par rapport à la base canonique B de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Déterminer la forme bilinéaire φ_q associée à q.

4) Décomposer q en somme de carrés indépendants suivant la méthode de Gauss.

5) En déduire le rang et la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?

6) Déterminer une base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit orthogonale pour q.

Exercice 20

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt.$$

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?

2) La forme quadratique q associée à φ est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.

3) Calculer la matrice de q dans la base canonique $B_0 = \{1, X, X^2\}$.

4) Déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?

5) Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit orthogonale pour q.

Exercice 21

Pour chacune des formes quadratiques suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, donner sa matrice dans la base canonique, sa forme polaire et utiliser la méthode de Gauss pour déterminer sa signature et en déduire une base orthogonale.

1) $q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$.

2) $q_2(x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.

3) $q_3(x) = 2x_1x_2$.

4) $q_4(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$.

5) $q_5(x) = 4x_1^2 - x_2^2$.

Exercice 1

$B = \{ (1,1,-1), (0,1,1), (1,0,3) \}$

1) Montrons que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et B est formé par 3 vecteurs. Il suffit donc de montrer que le système B est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,3) = (0,0,0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 & L_1 \\ \alpha + \beta = 0 & L_2 \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0 & L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = -\alpha \\ -\alpha - \alpha - 3\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = -\alpha \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc B est libre et par conséquent, c'est une base de $\mathbb{R}^3$

2) On détermine les coordonnées de U et V dans la base B.

a/ $U = (2,3,7)$, $V = (1,0,5)$.

$$U = (2,3,7) = \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,3) = (\alpha+\gamma, \alpha+\beta, -\alpha+\beta+3\gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 2 - \alpha & L_1 \\ \beta = 3 - \alpha & L_2 \\ -\alpha + (3-\alpha) + 3(2-\alpha) = 7 & L_3 \end{cases}$$

$L_3 \Rightarrow -5\alpha + 9 = 7 \Rightarrow \alpha = 2/5$

$L_2 \Rightarrow \beta = \frac{13}{5}$ et $L_1 \Rightarrow \gamma = \frac{8}{5}$

$$\Rightarrow U = \frac{2}{5}(1,1,-1) + \frac{13}{5}(0,1,1) + \frac{8}{5}(1,0,3) \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 13/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}_B$$

On fait la même chose pour V, on a $V = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}_B$

b/ $U = (0,0,-6)$, $V = (4,4,9)$.

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$U = (0,0,-6) = \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -6/5 \\ \beta = 6/5 \\ \gamma = 6/5 \end{cases}$$

Donc $U = \underbrace{(0,0,6)}_{\text{base canonique}} = \left(-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)_{\mathcal{B}}$.

De même pour $V = (4,4,9)$.

$$(4,4,9) = \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,3)$$
$$= (\alpha+\gamma, \alpha+\beta, -\alpha+\beta+3\gamma)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 4 & L_1 \\ \alpha+\beta = 4 & L_2 \\ -\alpha+\beta+3\gamma = 9 & L_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 4 & L_1 \\ 2\alpha-3\gamma = -5 & L_2-L_3 \\ -\alpha+\beta+3\gamma = 9 & L_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 4 & L_1 \\ -5\gamma = -13 & L_2-2L_1 \\ -\alpha+\beta+3\gamma = 9 & L_3. \end{cases}$$

$L_2 \Rightarrow \gamma = \frac{13}{5}$. D'où $\alpha = \frac{7}{5}$ et $\beta = \frac{13}{5}$

$\Rightarrow V = \underbrace{(4,4,9)}_{\text{base canonique}} = \left(\frac{7}{5}, \frac{13}{5}, \frac{13}{5}\right)_{\mathcal{B}}$.

3) On calcule la matrice de passage de la base canonique B_0 à la base B. C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base B dans la base canonique $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

. Donc
$$P_{B_0 B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Soit $X \in \mathbb{R}^3$. On explicite la relation entre les coordonnées de X dans les deux bases B et B_0.

soit X_B la matrice-colonne des coordonnées de X dans la base B et X_{B_0} celle de X dans la base B_0. D'après le cours on a $X_{B_0} = P_{B_0 B} X_B$. $\left(\left(X_B = P_{BB'} X_{B'} \right)\right)$

si $X_{B_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $X_B = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + x_3' \\ x_2 = x_1' + x_2' \\ x_3 = -x_1' + x_2' + 3x_3' \end{cases}$$

<u>Exercice2</u>

On calcule la matrice de passage de la base B à la base B'.

1) $B = \{(-1,0) , (0,3)\}$ et $B' = \{(1,1), (2,1)\}$.

On exprime les vecteurs de B' dans B.

$(1,1) = \alpha(-1,0) + \beta(0,3)$ et $(2,1) = \alpha'(-1,0) + \beta'(0,3)$

$= (-\alpha , 3\beta)$ et $= (-\alpha', 3\beta')$

$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha = 1 \\ 3\beta = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} -\alpha' = 2 \\ 3\beta' = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1/3 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha' = -2 \\ \beta' = 1/3 \end{cases}$

$P_{BB'}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base B' dans la base B. Donc

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2) $B = \{(1,-1),(1,0)\}$ et $B' = \{(3,1),(5,-6)\}$.

$(3,1) = \alpha(1,-1) + \beta(1,0)$ et $(5,-6) = \alpha'(1,-1) + \beta'(1,0)$

$= (\alpha+\beta, -\alpha)$ et $= (\alpha'+\beta', -\alpha')$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 3 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha'+\beta' = 5 \\ -\alpha' = -6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha' = 6 \\ \beta' = -1 \end{cases}$

Donc $P_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ et $B' = \{(1,1,1),(2,1,1),(0,1,0)\}$

$(1,1,1) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$= (\alpha+\gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ \alpha+\beta = 1 \\ \beta+\gamma = 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1-\alpha \\ \beta = 1-\alpha \\ (1-\alpha)+(1-\alpha) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \end{cases} \Rightarrow (1,1,1)_{B'} = (1/2, 1/2, 1/2)_B$

$(2,1,1) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$= (\alpha+\gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 2 \\ \alpha+\beta = 1 \\ \beta+\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$

$(0,1,0) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$= (\alpha+\gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 1 \\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = -1/2 \end{cases}$

Donc $$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

4) $B = \{1, X, X^2\}$ et $B' = \{X - X^2, -1, -1-3X+X^2\}$.

$$X - X^2 = 0 \times \underset{\smile}{1} + 1 \times \underset{\smile}{X} + (-1) \times \underset{\smile}{X^2}$$

$$-1 = (-1) \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$$

$$-1 - 3X + X^2 = (-1) \times 1 + (-3) \times X + 1 \times X^2$$

(On exprime les vecteurs de la base B' dans la base β)

Donc $$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

1) On explicite $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

$$f(x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y + 4z \\ -x - 3y - 3z \\ 2y + 3z \end{pmatrix}$$

ou $f(x,y,z) = (x + 4y + 4z, -x - 3y - 3z, 2y + 3z)$.

2) Montrons que $B' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Il suffit de montrer que B' est libre car il contient 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha a + \beta b + \gamma c = (0,0,0)$

$$\alpha(e_1 - e_2 + e_3) + \beta(2e_1 - e_2 + e_3) + \gamma(2e_1 - 2e_2 + e_3) = (0,0,0)$$

$$(\alpha + 2\beta + 2\gamma)\, e_1 + (-\alpha - \beta - 2\gamma)\, e_2 + (\alpha + \beta + \gamma)\, e_3 = (0,0,0)$$

Comme $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base (la base canonique) alors $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre. $\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 & L_1 \\ -\alpha - \beta - 2\gamma = 0 & L_2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_3 \end{cases}$

$L_2 + L_3 \Rightarrow -\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & L_1 \\ -\alpha - \beta = 0 & L_2 \\ \alpha + \beta = 0 & L_3 \end{cases}$

$L_1 + L_2 \Rightarrow \beta = 0$. $L_3 \Rightarrow \alpha = 0$. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

D'où $B = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Déterminer la matrice de passage de B à B'.

$P_{BB'}$ c'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de la base B' dans la base B. Donc

$$P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule P^{-1}. Soient $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1. & L_1 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = y_2 & L_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 & L_3. \end{cases} \quad (S)$$

On cherche x_1, x_2, x_3 en fonction de y_1, y_2, y_3.

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 & L_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 & L_2 + L_1 \\ -x_2 - x_3 = -y_1 + y_3 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 & L_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 & L_2 \\ -x_3 = y_2 + y_3 & L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$L_1 \Rightarrow x_1 = y_1 - 2x_2 - 2x_3$$
$$= y_1 - 2(y_1 + y_2) - 2(-y_2 - y_3)$$
$$= -y_1 + 2y_3.$$

Donc
$$\begin{cases} x_1 = -y_1 + 0y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 + 0y_3 \\ x_3 = 0y_1 - y_2 - y_3. \end{cases}$$

D'où
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
. On vérifie que $PP^{-1} = I_3$

[Remarque. On va voir dans le chapitre 2 une méthode plus pratique pour calculer l'inverse d'une matrice.]

4) $f(a) = f(1,-1,1) = A \cdot \overset{a}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a.$

$f(b) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{b}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = c$

$f(c) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{c}{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -b.$

La matrice de f dans la base B' est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ dans la base B'.

On a trouvé
$$f(a) = a = 1 \cdot a + 0b + 0c$$
$$f(b) = c = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1c$$
$$f(c) = -b = 0 \cdot a + (-1)b + 0 \cdot c.$$

Donc $R = M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

5) D'après la formule de changement de base :

$$R = M_{B'}(f) = P^{-1} M_{B}(f) \cdot P = P^{-1} A \cdot P$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) On calcule R^4.

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R^4 = R^2 . R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I_3}}$$

7) On déduire les valeurs de A^{4n}, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$R = P^{-1} A P \Rightarrow A = P R P^{-1}.$$

$$A^{4n} = (A^4)^n = \left((P R P^{-1})^4 \right)^n = (P R \underbrace{P^{-1} P}_{I_3} R \underbrace{P^{-1} P}_{I_3} R \underbrace{P^{-1} P}_{I_3} R P^{-1})^n$$

$$= (P R^4 P^{-1})^n = (P I_3 P^{-1})^n$$

$$\Rightarrow A^{4n} = (P P^{-1})^n = (I_3)^n = I_3.$$

Exercice 4

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$f(x, y) = (x - 2y, 3x + y)$. Posons,

$B = \{ (1,2), (1,1) \}$ et $B' = \{ (1,1), (1,-1) \}$.

1) calculer la matrice de f dans la base B.

deux méthodes :

1ère méthode : On cherche les images par f des vecteurs de la base $\underline{\underline{B}}$ en les exprimant dans la base $\underline{\underline{B}}$

2ème méthode : On applique la formule de changement de base.

1ère méthode:

$f(1,2) = (-3,5) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) = (\alpha+\beta, 2\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -3 \\ 2\alpha+\beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = -11 \end{cases}$

$f(1,1) = (-1,4) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) = (\alpha+\beta, 2\alpha+\beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -1 \\ 2\alpha+\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -6 \end{cases}$

Donc $M_B(f) = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$. C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images des vecteurs de B dans B.

2ème méthode. On a la matrice de f dans la base canonique est $M_{b.c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ obtenue de l'expression de f.

La matrice de passage de la base canonique à la base B est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. (la base B exprimée dans la base canonique)

On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$M_B(f) = P^{-1} M_{b.c}(f) \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix}$

2) Calculer $P_{BB'}$. C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B' exprimées dans B.

$(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) = 0(1,2) + 1\cdot(1,1)$

$(1,-1) = \alpha(1,2) + \beta(1,1) = -2(1,2) + 3(1,1)$

Donc $P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) on calcule P^{-1}.

soient (x, y) ; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y = a \\ x + 3y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} a \\ x = \frac{3}{2} a + b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} a + b \\ y = -\frac{1}{2} a + 0 b \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

[Remarquer que $P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$]

la formule de changement de base : $N = P^{-1} \cdot M_B(f) \cdot P$

$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

4) Recalculer N directement et vérifier vos calculs.

par cette méthode (directe), la matrice N est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images par f des vecteurs de $\underline{\underline{B'}}$ dans $\underline{\underline{B'}}$.

$f(1,1) = (-1, 4) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3/2 \\ \beta = -5/2 \end{cases}$

$f(1,-1) = (3,2) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$

$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 3/2 & 5/2 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

$U : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $U(P) = P + (1-X)P' + 2P''$.

On pose $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ ou $P_1 = 1-X$; $P_2 = 1$ et $P_3 = 1+2X-X^2$.

1) Montrons que U est une application linéaire.

soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$U(P+\alpha Q) = (P+\alpha Q) + (1-X)(P+\alpha Q)' + 2(P+\alpha Q)''$$
$$= P + (1-X)P' + 2P'' + \alpha(Q + (1-X)Q' + 2Q'')$$
$$= U(P) + \alpha U(Q)$$

Donc U est linéaire.

2) Expliciter $U(a+bX+cX^2)$ en fonction de a, b et c.

$$U(a+bX+cX^2) = (a+bX+cX^2) + (1-X)(a+bX+cX^2)' + 2(a+bX+cX^2)''$$
$$= a+bX+cX^2 + (1-X)(b+2cX) + 4c$$
$$= (a+b+4c) + 2cX - cX^2$$

3) Déterminer la matrice de U dans la base canonique.

c'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images par U des vecteurs de la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$ dans la base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

$$U(1) = 1 + (1-X)1' + 2\,1'' = 1 = 1\times 1 + 0\times X + 0\times X^2$$
$$U(X) = X + (1-X)X' + 2X'' = 1 = 1\times 1 + 0\times X + 0\times X^2$$
$$U(X^2) = X^2 + (1-X)(X^2)' + 2(X^2)'' = 4 + 2X - X^2$$
$$= 4\times 1 + 2\times X + (-1)\times X^2$$

$$\Rightarrow A = M_B(U) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

card $B' = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$. ($B'$ contient 3 vecteurs).

Il suffit de montrer que B' est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$.

$\Rightarrow \alpha(1-x) + \beta \times 1 + \gamma(1+2x-x^2) = (\alpha+\beta+\gamma) + (2\gamma-\alpha)X - \gamma X^2 = 0$

Comme $\{1, x, x^2\}$ est une base $\Rightarrow$ elle est libre.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ 2\gamma - \alpha = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

5) Donner la matrice A' de U dans la base B' en calculant $U(P_1)$, $U(P_2)$ et $U(P_3)$.

$$U(P_1) = U(1-x) = (1-x) + (1-x)(1-x)' + 2(1-x)''$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow U(P_1) = 0\cdot(1-x) + 0 \times 1 + 0 \times (1+2x-x^2)$$

$$U(P_2) = 1 = 0 \times (1-x) + 1 \times 1 + 0\,(1+2x-x^2)$$

$$U(P_3) = -1-2X+X^2 = 0 \times (1-x) + 0 \times 1 + (-1)(1+2X-X^2)$$

$$A' = M_{B'}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
. C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images par U des vecteurs de B' exprimés dans B'.

6) $P = P_{BB'}$ = la matrice de passage de B à B'

$$1 - X = 1 \times 1 + (-1) \times X + 0 \times X^2$$
$$1 = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$$
$$1 + 2X - X^2 = 1 \times 1 + 2 \times X + (-1) \times X^2$$

Donc $P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$Q = Q_{B'B} = P^{-1}$ = la matrice de passage de B' à B.

on calcule l'inverse de P ou on exprime les vecteurs de B dans B'.

$1 = 0 \times (1-x) + 1 \times 1 + 0(1+2x-x^2)$

$x = (-1)(1-x) + 1 \times 1 + 0(1+2x-x^2)$

$x^2 = (-2)(1-x) + 3 \times 1 + (-1)(1+2x-x^2)$

(on peut utiliser α, β, γ et résoudre le système).

Donc $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7) Déterminer A' par la formule de changement de base.

$$A' = M_{B'}(f) = P^{-1}_{BB'} \cdot A \cdot P_{BB'} = Q_{B'B} A \cdot P_{BB'}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1) $A = M_{C_0 B_0}(U) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. C'est la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de B_0, par f, exprimés dans C_0.

2) $$P = P_{B_0 B'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P_{B' B_0} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{-1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

3) $$P_{C_0 C'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{C' C_0} = P_{C_0 C'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

4) $M_{C_0 B'}(U)$. C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des images par U de B' dans C_0.

ou
$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B_0) \arrow[r, "U"] \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"'] & (\mathbb{R}^3, C_0) \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] \\
(\mathbb{R}^2, B') \arrow[r, "U"] & (\mathbb{R}^3, C_0)
\end{tikzcd}$$

on a $\quad U \circ id_{\mathbb{R}^2} = id_{\mathbb{R}^3} \circ U$

$$M_{C_0B'}(U)\cdot M_{B'B_0}(id_{\mathbb{R}^2}) = M_{C_0}(id_{\mathbb{R}^3})\cdot M_{C_0B_0}(U).$$

$$M_{C_0B'}(U)\cdot P_{B'B_0} = I_3\cdot M_{C_0B_0}(U)$$

$$M_{C_0B'}(U) = M_{C_0B_0}(U)\cdot P_{B'B_0}^{-1} = M_{C_0B_0}(U)\, P_{B_0B'}$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & 14\\ -2 & 7\\ 4 & -14\end{pmatrix}.$$

On détermine $M_{C'B_0}(U)$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B_0) \arrow[r, "U"] \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"'] & (\mathbb{R}^3, C_0) \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] \\
(\mathbb{R}^2, B_0) \arrow[r, "U"] & (\mathbb{R}^3, C')
\end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_0}(U)\cdot I_3 = P_{C'C_0}\cdot M_{C_0B_0}(U) \Rightarrow M_{C'B_0}(U) = P_{C'C_0}\cdot M_{C_0B_0}(U)$$

$$\Rightarrow \quad M_{C'B_0}(U) = \begin{pmatrix}-1/2 & -3\\ 3/2 & 2\\ -1/2 & -3\end{pmatrix}.$$

On détermine $M_{C'B'}(U)$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B_0) \arrow[r, "U"] \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"'] & (\mathbb{R}^3, C_0) \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"] \\
(\mathbb{R}^2, B') \arrow[r, "U"] & (\mathbb{R}^3, C')
\end{tikzcd}$$

$$P_{C'C_0}\cdot M_{C_0B_0}(U) = M_{C'B'}(U)\cdot P_{B'B_0}$$

$$\Rightarrow M_{C'B'}(U) = P_{C'C_0}\, M_{C_0B_0}(U)\, P_{B_0B'} = \begin{pmatrix}-9/2 & -14\\ 13/2 & 7\\ -9/2 & -14\end{pmatrix}.$$

Exercice 7

1) $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= -2 - 0 + 2 \times (-2) = -6$

$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 8 & 7 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 8(18+8) - 3(42-16) - 5(14+12)$

$= 0$ (Remarquer que $L_3 = L_2 - L_1$)

$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \quad\; C_2 - 2C_1 \quad C_3 - 3C_1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & -16 \\ 9 & -8 & -16 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -16 \\ -8 & -16 \end{vmatrix}$

$= -8 \begin{vmatrix} 1 & -16 \\ 1 & -16 \end{vmatrix}$

$= (-8) \times (-16) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0$ (Rq : $L_3 = L_2 + 2L_1$)

2)

$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{array}$

(suivant 1ère colonne) $= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + 6L_1 \end{array}$ (suivant la 1ère colonne)

$= - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 96.$

$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \qquad\quad C_3 - C_2 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$$\det(B_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{array}{c|l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \end{array}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \quad\quad\quad C_3 - C_1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -12$$

$$\det(C_1) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{cccc} C_1 - 3C_4 & C_2 - C_4 & C_3 - C_4 & C_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ -8 & -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -8 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{array}{ccc} C_1 + C_2 & C_2 & C_3 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -10 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = 48$$

$$\det(C_2) = \begin{vmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c|l} \begin{vmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2(a-1) & a+4 & 0 \\ a^2+a-2 & 4(a+1) & 0 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 + (a+1)L_1 \end{array} \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2(a-1) & a+4 \\ a^2+a-2 & 4(a+1) \end{vmatrix}$$

$$= a(a-1)(a-2)$$

$$\det(C_3) = \begin{vmatrix} a & 0 & \boxed{b} & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & b & a \\ b & a & b \\ a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$= b\,(a-b) \begin{vmatrix} b & a \\ a & b \end{vmatrix} = b(a-b)(b^2-a^2)$$

Exercice 8

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ m & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) $$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ m & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -3-2m & -3 & 0 \\ 3m & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -3-2m & -3 \\ 3m & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2m + 9m = 7m - 3.$$

$\det(A_m) = 0 \iff 7m - 3 = 0 \iff m = \frac{3}{7}$

A_m est inversible $\iff \det(A_m) \neq 0 \iff m \neq \frac{3}{7}$

2) soit $m = 2$. On détermine A_2^{-1}.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det(A_2) = 7 \times 2 - 3 = 11.$ (car $\det(A_m) = 7m - 3$)

$$\mathrm{Com}(A_2) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^t\mathrm{Com}(A_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & -6 & -7 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1} = \frac{1}{\det(A_2)} \, {}^t\mathrm{Com}(A_2) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & -6 & -7 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} & 3/11 \\ -2/11 & -6/11 & -7/11 \\ 5/11 & 4/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$:

$$\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & -6 & -7 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = I_3$$

Exercice 9

$$(S) = \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x - y + z = 5 \\ -5x + y + 2z = 1. \end{cases}$$

1) $$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

) Montrons que (S) est de Cramer.

$$\det(M_s) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + 5L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

$\det(M_s) \neq 0 \Rightarrow$ le système (S) est de Cramer. Le système admet une solution unique.

3) Donner la solution de (S) :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & C_2+C_1 & C_3-C_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & C_2+C_1 & C_3+C_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & C_2-C_1 & C_3+C_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 7 \\ -5 & 6 & -4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -30$$

$$x = \frac{\Delta x}{\det(M_s)} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\det(M_s)} = 1 \; ; \; z = \frac{\Delta z}{\det(M_s)} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

[Remarquer que $\operatorname{rang}(M_s) = 3$, car $\det(M_s) \neq 0$]

pour déduire M_s^{-1} : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(M_s)} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b$ $\left(\text{car } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_s^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$

de même : $y = a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ et $z = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c$.

$$\Rightarrow M_s^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} & c_2 - c_1 & c_3 - c_1 \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\begin{vmatrix} 1 & c-a \\ b+a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

2) La matrice associée au système (S) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & (a-2)^2 & (2a-1)^2 \\ a^4 & (a-2)^4 & (2a-1)^4 \end{pmatrix}.$$

D'après la question 1), pour : $a \longrightarrow a^2$
$b \longrightarrow (a-2)^2$
$c \longrightarrow (2a-1)^2$

On a $\det(A) = \left(a^2-(a-2)^2\right)\left((a-2)^2-(2a-1)^2\right)\left((2a-1)^2-a^2\right)$

$\det(A) = 0 \iff a^2-(a-2)^2 = 0$ ou $(a-2)^2-(2a-1)^2 = 0$
ou $(2a-1)^2 - a^2 = 0$.

$$a^2-(a-2)^2=0 \iff (a-a+2)(a+a-2)=0 \iff 2(2a-2)=0$$
$$\iff a=1.$$

$$(a-2)^2-(2a-1)^2 \iff (a-2-2a+1)(a-2+2a-1)=0$$
$$\iff (-a-1)(3a-3)=0$$
$$\iff a=-1 \text{ ou } a=1.$$

$$(2a-1)^2-a^2=(2a-1-a)(2a-1+a)=0 \iff (a-1)(3a-1)=0$$
$$\iff a=1 \text{ ou } a=\frac{1}{3}.$$

Conclusion : si $a \in \{1,-1,\frac{1}{3}\}$, $det(A)=0$. Donc le système n'est pas de Cramer si $a \in \{1,-1,\frac{1}{3}\}$.

3) pour $a=1$, on a $(S)=\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=3. \end{cases}$

$x+y+z=3 \iff x=3-y-z.$

Donc $S=\{(3-y-z,y,z) \,/\, (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$.

pour $a=-1$, on a $(S)=\begin{cases} x+y+z=3 & L_1 \\ x+9y+9z=19 & L_2 \\ x+81y+81z=163 & L_3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y+z=3 & L_1 \\ 8y+8z=16 & L_2-L_1 \\ 72y+72z=144 & L_3-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=3 & L_1 \\ y+z=2 & \frac{1}{8}L_2 \\ y+z=2 & \frac{1}{72}L_3 \end{cases}$$

$y+z=2 \Rightarrow y=2-z.$

$L_1 \Rightarrow x+2-z+z=3 \Rightarrow x=1.$

$S=\{(1,2-z,z) \,/\, z\in\mathbb{R}\}.$

pour $a = \frac{1}{3}$, on a $(S) = \begin{cases} x + y + z = 3 \\ \frac{1}{9}x + \frac{25}{9}y + \frac{1}{9}z = \frac{25}{3} \\ \frac{1}{81}x + \frac{625}{81}y + \frac{1}{81}z = \frac{169}{3} \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 25y + z = 75 & 9L_2 \\ x + 625y + z = 4563 & 81L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 24y = 72 & L_2 - L_1 \\ 624y = 4560 & L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = 3 \\ y = \frac{4560}{624} \neq 3 \end{cases}$$

Donc, le système n'admet pas de solution.

ou $L_3 - 26L_2 \Rightarrow 0 = 4560 - 26 \times 72$
$\Rightarrow 0 = -2688$ impossible.

$S = \phi$

Exer 11

$$(S) = \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = -4b \\ x + by + az = 3 \end{cases}$$

1) La matrice associée à (S) est $N = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$

$$\det(N) = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b - ba & 1 - a^2 \\ 0 & ab - b & 1 - a \\ 1 & b & a \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - aL_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} b - ab & 1 - a^2 \\ ab - b & 1 - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b(1-a) & (1-a)(1+a) \\ -b(1-a) & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)^2 \begin{vmatrix} b & 1+a \\ -b & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2 \left(b + b(1+a) \right)$$

$$= b(1-a)^2(2+a)$$

Le système (S) est de Cramer si $\det(N) \neq 0$.

Donc si $b \neq 0$ et $a \notin \{1, -2\}$.

2) Résoudre (S) dans le cas où $a = 2$ et $b = -1$.

On a dans ce cas $(S) = \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

$$\det(N) = -1(1-2)^2(2+2) = -4 \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \quad\quad C_2+C_1 \;\; C_3-C_1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} L_1 - 2L_3 \\ L_2 - L_3 \\ \end{array} \end{array}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} C_1-2C_3 \;\; C_2+C_3 \quad\quad \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\det(N)} = \frac{4}{-4} = -1 \; ; \; y = \frac{\Delta_y}{\det(N)} = -2 \; ; \; z = \frac{\Delta_z}{\det(N)} = 1$$

$$S = \{(-1, -2, 1)\}.$$

Exercice 12

calculer le polynôme minimal : $m_A(x)$ divise $C_A(x)$ et vérifie $m_A(A)=0$

1) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$C_A(x)=\begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 2 & -1-x & 4 \\ 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= -(1+x)\begin{vmatrix} -(1+x) & 4 \\ 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= -(1+x)\left(-(1+x)(3-x)\right)$$

$$= (1+x)^2(3-x)$$

$m_A(x) = (X+1)(X-3)$ ou $(X+1)^2(X-3)$

$$(X+1)(X-3) \longrightarrow (A+I_3)(A-3I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $m_A(X) = (X+1)^2(X-3)$.

2) $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $C_B(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -1 \\ 1 & -1-x & -1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$

$$= -x\begin{vmatrix} -1-x & -1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -x^3+x^2+x-1$$

$$= -(X-1)^2(X+1)$$

$m_B(x) = (X-1)(X+1)$ ou $m_B(x) = (X-1)^2(X+1)$

$$(X-1)(X+1) \longrightarrow (B-I_3)(B+I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $m_B(X) = (X-1)^2(X+1)$.

3) $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$C_C(X) = \begin{vmatrix} 8-X & -1 & -5 \\ -2 & 3-X & 1 \\ 4 & -1 & -1-X \end{vmatrix} = (8-X)\begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ -1 & -(1+X) \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -(1+X) \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 3-X & 1 \end{vmatrix}$$

On obtient $C_C(X) = -X^3 + 10X^2 - 32X + 32$.

On a $C_C(2) = 0$. La division euclidienne donne

$$C_C(X) = (X-2)(-X^2+8X-16) = -(X-2)(X-4)^2$$

Donc $m_C(X) = (X-2)(X-4)$ ou $m_C(X) = (X-2)(X-4)^2$

$$(X-2)(X-4) \rightsquigarrow (C-2I_3)(C-4I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $m_C(X) = (X-2)(X-4)^2$.

si l'on a $(C-2I_3)(C-4I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$m_C(X)$ sera $(X-2)(X-4)$,

car $m_C(X)$ divise $C_C(X)$ et vérifie $m_C(C) = 0$

Exercice 13 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $C_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -x \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -x-1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1+x \\ -x \end{matrix} \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$= -x \begin{vmatrix} -x-1 & 1+x \\ 1 & -x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x-1 & 1+x \end{vmatrix}$

$= -(x+1)^2(x-2)$

$C_A(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$.

Donc les valeurs propres de A sont -1 et 2

2) $E_{-1} = \ker(A + I_3)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x + y + z = 0$

$\iff x = -y - z$

Ainsi $E_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = -y - z\}$.

$= \{(-y-z, y, z) \,/\, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

$(-y-z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z)$

$= y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$

Donc $E_{-1} = \text{Vect}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

la base de E_{-1} est $B_1 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

3) $E_2 = \ker(A - 2I_3)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3y - 3z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$$

Ainsi $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = z\}$.

$= \{(x, x, x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.

Donc $E_2 = \text{vect}\{(1, 1, 1)\}$.

La base de E_2 est $B_2 = \{(1, 1, 1)\}$.

4) $B_1 \cup B_2 = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\} := B$.

Montrons que B est libre.

On a $\underline{\underline{3}}$ vecteurs de $\underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$, donc il suffit que $\det(B)$ soit non nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 . \Rightarrow \mathcal{B} \text{ est libre.}$$

Comme $Card(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, alors $\mathcal{B}$ est un système générateur de $\mathbb{R}^3$. D'où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarquer que, $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim E_{-1} + \dim E_2$. Ceci est équivalent à $\mathbb{R}^3 = E_{-1} \oplus E_2$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ A est diagonalisable.

5) On a $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres associés à la V.P -1.

$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la V.P 2.

Donc $f(U_1) = -U_1$, $f(U_2) = -U_2$ et $f(U_3) = 2U_3$

On obtient alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$D = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccc} f(U_1) & f(U_2) & f(U_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \end{array}$$

6) La matrice de passage de C à $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonne sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base C.

Donc $P = P_{CB} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Calculons P^{-1}</u>

$$\det(P) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} L_2 + L_1.$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

$$\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{t}\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\, {}^{t}\mathrm{Com}(P) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $P^{-1}P = I_3 = P P^{-1}$.

$$P^{-1}P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même $P P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

7) D'après le cours, $D = P^{-1} A P$.

Donc $A = P D P^{-1}$. Ainsi,

$$A^n = P D \underbrace{P^{-1} \, P}_{I_3} D \underbrace{P^{-1} \cdots}_{I_3} \underbrace{\cdots P}_{I_3} D P^{-1}$$

$$= P D^n P^{-1}.$$

Or, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

par suite,

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ 0 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

Remarquer que, $2(-1)^{n+2} = 2(-1)^2(-1)^n = 2(-1)^n$.

et $-1 \times (-1)^n = (-1)^{n+1}$

Exercice 14

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3$, $f(e_2) = 3e_1 - e_3$, $f(e_3) = -3e_1 + 2e_2 + 3e_3$

1) La matrice de f dans la base B est :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

On calcule les valeurs propres de A.

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 & -3 \\ 2 & -X & 2 \\ -1 & -1 & 3-X \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3+C_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 2 & -X & 2-X \\ -1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 3 & 1-X & 0 \\ -1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow C_A(X) = (2-X) \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 3 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)\left[(1-X)^2 - 9\right]$$

$$\Rightarrow C_A(X) = (2-X)\left[(1-X-3)(1-X+3)\right]$$
$$= -(2-X)(2+X)(4-X)$$

$C_A(X) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 4$. par suite, les valeurs propres de A sont $2, -2$ et 4

Déterminons les sous-espaces propres de f.

- $E_2 = Ker(A - 2I)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 3y - 3z = 0 & L_1 \\ x - y + z = 0 & \frac{1}{2}L_2 \\ -x - y + z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2z = 0 & L_1 + L_2 \\ x - y + z = 0 & L_2 \\ -2y + 2z = 0 & L_3 + L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$$

E_2 est donc engendré par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $E_{-2} = Ker(A + 2I)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \iff \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 3y - 3z = 0 & L_1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ -x - y + 5z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 & \frac{1}{3}L_1 \\ x + y + z = 0 & \frac{1}{2}L_2 \\ x + y + 5z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 & L_1 \\ 2z = 0 & L_2 - L_1 \\ x + y - 5z = 0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où E_{-2} est engendré par le vecteur $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $E_4 = Ker(A - 4I)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y - 3z = 0 & L_1 \\ 2x - 4y + 2z = 0 & L_2 \\ -x - y - z = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 & \frac{1}{3} L_1 \\ x - 2y + z = 0 & \frac{1}{2} L_2 \\ x + y + z = 0 & -L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 & L_1 \\ -y = 0 & L_2 + L_1 \\ x + y + z = 0 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, E_4 est engendré par le vecteur $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Puisque le polynôme caractéristique de f est scindé et ses valeurs propres sont simples alors f est diagonalisable. sa matrice diagonale est :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Avant de calculer A^n, on détermine P la matrice de passage de la base B à la base $\{u_1, u_2, u_3\}$, ainsi que son inverse P^{-1}.

On a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(P) = 2$

$$Com(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t Com(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Il n'est pas inutile de vérifier que :

$$P P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Maintenant, on a $A = P D P^{-1} \Rightarrow \underline{A^n = P D^n P^{-1}}$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 4^n \\ 2^n & -(-2)^n & 0 \\ 2^n & 0 & -4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & -(-2)^n + 4^n & (-2)^n - 4^n \\ 2^n - (-2)^n & 2^n + (-2)^n & 2^n - (-2)^n \\ 2^n - 4^n & 2^n - 4^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

Remarquer que pour $n = 1$, $A^1 = A = P D P^{-1}$

4) $(S) = \begin{cases} U_{n+1} = U_n + 3V_n - 3W_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 2W_n \\ W_{n+1} = -U_n - V_n + 3W_n. \end{cases}$

Soient $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$.

le système (S) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient $X_n = A \cdot X_{n-1} = A^2 X_{n-2} = \cdots = A^n X_0$.

Il vient que

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n & -(-2)^n + 4^n & (-2)^n - 4^n \\ 2^n - (-2)^n & 2^n + (-2)^n & 2^n - (-2)^n \\ 2^n - 4^n & 2^n - 4^n & 2^n + 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$U_n = \frac{1}{2}\left((-2)^n + 4^n - (-2)^n + 4^n + (-2)^n - 4^n \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((-2)^n + 4^n \right)$$

$$V_n = \frac{1}{2}\left(3(2^n) - (-2)^n \right)$$

$$W_n = \frac{1}{2}\left(3(2^n) - 4^n \right)$$

Exercice 15

1) sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda x, y) = \varphi(\lambda(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lambda^2 x_1 x_2 + y_1 y_2$

pour $x = (1,1)$, $y = (0,0)$ et $\lambda = 2$ on a

$\varphi(2(1,1), (0,0)) = 4 \neq 2 = 2\varphi((1,1), (0,0))$.

Donc φ n'est pas bilinéaire.

φ est symétrique car,

$\varphi(x, y) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = y_1 y_2 + x_1 x_2 = \varphi(y, x)$

2) sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$.

soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\alpha x + \beta z, y) = \varphi\big((\alpha x_1 + \beta z_1, \alpha x_2 + \beta z_2), (y_1, y_2)\big)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta z_1) y_2 + (\alpha x_2 + \beta z_2) y_1$$
$$= \alpha (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \beta (z_1 y_2 + z_2 y_1)$$
$$= \alpha \varphi(x,y) + \beta \varphi(z,y)$$

De même on obtient

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \varphi(x,y) + \beta \varphi(x,z).$$

Donc φ est bilinéaire.

$$\varphi(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1 x_2 + y_2 x_1 = \varphi(y,x)$$

$\Rightarrow$ φ est symétrique.

3) soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\alpha P + \beta R, Q) = (\alpha P'(1) + \beta R'(1)) Q(0) + (\alpha P'(0) + \beta R'(0)) Q(1)$$
$$= \alpha (P'(1) Q(0) + P'(0) Q(1)) + \beta (R'(1) Q(0) + R'(0) Q(1))$$
$$= \alpha \varphi(P,Q) + \beta \varphi(R,Q)$$

De même, $\varphi(P, \alpha Q + \beta R) = \alpha \varphi(P,Q) + \beta \varphi(P,R)$

$\Rightarrow$ φ est bilinéaire.

φ n'est pas symétrique car,

$$\varphi(P,Q) = P'(1) Q(0) + P'(0) Q(1)$$
$$\varphi(Q,P) = Q'(1) P(0) + Q''(0) P(1)$$

si $P = X$ et $Q = 1$ alors

$\varphi(X, 1) = 2 \neq 0 = \varphi(1, X)$

$\Rightarrow \varphi$ n'est pas symétrique.

4) sur $C([0,1], \mathbb{R})$; $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt$

soient $f, g, h \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\alpha f + \beta h, g) = \int_0^1 (\alpha f(t) + \beta h(t))\, g(1-t)\, dt$$

$$= \alpha \int_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt + \beta \int_0^1 h(t)\, g(1-t)\, dt$$

$$= \alpha \varphi(f, g) + \beta \varphi(h, g)$$

De même on a $\varphi(f, \alpha g + \beta h) = \alpha \varphi(f, g) + \beta \varphi(f, h)$

$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt$. (soit $s = 1-t$, alors $ds = -dt$)

$$= \int_1^0 f(1-s)\, g(s)\, (-ds) = \int_0^1 g(s)\, f(1-s)\, ds$$

$$= \varphi(g, f)$$

$\Rightarrow \varphi$ est symétrique.

5) sur $M_2(\mathbb{R})$; $\varphi(M, N) = Tr(MN)$.

soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

on a $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

soit $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On trouve φ est bilinéaire et symétrique.

Exercice 16

1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = x_1 y_2 + 3 y_1 x_2$

$$B_1 = \{ \underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2} \} \quad B_2 = \{ \underbrace{(1,1)}_{e_1'}, \underbrace{(1,2)}_{e_2'} \}.$$

La matrice M_1 de φ dans B_1 :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(e_1, e_1) = \varphi((1,0),(1,0)) = 0 \\ \varphi(e_1, e_2) = \varphi((1,0),(0,1)) = 1 \\ \varphi(e_2, e_1) = \varphi((0,1),(1,0)) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2, e_2) = \varphi((0,1),(0,1)) = 0$$

La matrice de φ dans B_2 :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(e_1', e_1') = \varphi((1,1),(1,1)) = 4 \\ \varphi(e_1', e_2') = \varphi((1,1),(1,2)) = 5 \\ \varphi(e_2', e_1') = \varphi((1,2),(1,1)) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2', e_2') = \varphi((1,2),(1,2)) = 8.$$

La matrice de passage $P = P_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $${}^tP M_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = M_2.$$

2) $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$\varphi(P, Q) = P(2)\, Q(1)$. $B_1 = \{1, x, x^2\}$, $B_2 = \{1, X-1, X^2-3X+2\}$.

La matrice M_1 de φ dans B_1 :

$\varphi(1,1) = 1$, $\varphi(1, x) = 1$, $\varphi(1, x^2) = 1$

$\varphi(x, 1) = 2$, $\varphi(x, x) = 2$, $\varphi(x, x^2) = 2$

$\varphi(x^2, 1) = 4$, $\varphi(x^2, x) = 4$, $\varphi(x^2, x^2) = 4$

$$\Rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice M_2 de φ dans B_2 :

$\varphi(1, 1) = 1$, $\varphi(1, X-1) = 0$, $\varphi(1, X^2-3X+2) = 0$

$\varphi(X-1, 1) = 1$, $\varphi(X-1, X-1) = 0$, $\varphi(X-1, X^2-3X+2) = 0$

$\varphi(X^2-3X+2, 1) = 0$, $\varphi(X^2-3X+2, X-1) = 0$, $\varphi(X^2-3X+2, X^2-3X+2) = 0$

$$\Rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage $P = P_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On a bien ${}^tP\, M_1\, P = M_2$.

3) De manière identique.

Exercice 17 $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$b\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

1) Justifier que b est une forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}^3$.

soient $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$b\big(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3)\big) =$$

$$b\big((\alpha x_1 + \beta z_1, \alpha x_2 + \beta z_2, \alpha x_3 + \beta z_3), (y_1, y_2, y_3)\big) =$$

$$2(\alpha x_1 + \beta z_1) y_1 + (\alpha x_2 + \beta z_2) y_2 - (\alpha x_3 + \beta z_3) y_3 =$$

$$\alpha(2x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3) + \beta(2z_1 y_1 + z_2 y_2 - z_3 y_3) =$$

$$\alpha\, b\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) + \beta\, b\big((z_1, z_2, z_3), (y_1, y_2, y_3)\big).$$

De même on obtient,

$$b\big((x_1, x_2, x_3), \alpha(y_1, y_2, y_3) + \beta(z_1, z_2, z_3)\big) =$$

$$\alpha\, b\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) + \beta\, b\big((x_1, x_2, x_3), (z_1, z_2, z_3)\big)$$

2) La matrice de b dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice. Alors

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\text{la partie symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\text{la partie antisymétrique.}}$$

pour la matrice M de b, il est clair que ${}^tM = M$.

$\Longrightarrow$ M est symétrique.

$\Longrightarrow$ b est symetrique.

Ou bien on a $b((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = b((y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3))$

4) b est symétrique, donc $b_1 = b$ et $b_2 = 0$.

5) $\text{rang}(b) = \text{rang}(M) = 3$ car

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1) = -2 \neq 0.$$

Exercice 18

b a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) $${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b n'est pas symétrique car M ne l'est pas : $M \neq {}^tM$

b n'est pas antisymétrique car M ne l'est pas : $M \neq -{}^tM$

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\text{partie symetrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\text{partie antisymetrique}}$$

b_1 a pour matrice $\frac{1}{2}(M + {}^tM) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

b_2 a pour matrice $\frac{1}{2}(M - {}^tM) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3) soient $U=(x_1, x_2, x_3)$, $V=(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$b(U,V) = {}^tU M V = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_3,\ x_1 + 4x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_3)y_1 + (x_1 + 4x_3)y_2 + (x_1 + 2x_2 + 3x_3)y_3$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + 2x_2y_3 - x_3y_1 + 4x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

4) $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$.

Il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

$$\det(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ (\mathrm{rang}(\mathcal{B}) = 3)$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base.

5) On détermine la matrice M' de b dans la base $\mathcal{B}$.

<u>première méthode</u> : $M' = {}^tP M P$, avec P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M' = {}^tP M P = \begin{pmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 5 & 9 & -3 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode : On utilise l'expression de b.

$b((1,1,1),(1,1,1)) = 1+1+1+2-1+4+3 = 11$

$b((1,1,1),(-1,1,1)) = -1+1+1+2+1+4+3 = 11$

$b((1,1,1),(1,1,-1)) = 1+1-1-2-1+4-3 = -1$

$b((-1,1,1),(1,1,1)) = -1-1-1+2-1+4+3 = 5$

$b((-1,1,1),(-1,1,1)) = 1-1-1+2+1+4+3 = 9$

$b((-1,1,1),(1,1,-1)) = -1-1+1-2-1+4-3 = -3$

$b((1,1,-1),(1,1,1)) = 1+1+1+2+1-4-3 = -1$

$b((1,1,-1),(-1,1,1)) = -1+1+1+2-1-4-3 = -5$

$b((1,1,-1),(1,1,-1)) = 1+1-1-2+1-4+3 = -1$

Donc $M' = \begin{pmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 5 & 9 & -3 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \left(b(e'_i, e'_j)\right)_{1 \leq i,j \leq 3}$

avec $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

Exercice 19

$q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(M) = \det(M)$.

1) Montrons que q est une forme quadratique.

soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $q(\lambda M) = \det \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda^2 (ad - bc) = \lambda^2 q(M)$

• $q(M+M') = \det\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$

$= (a+a')(d+d') - (c+c')(b+b')$

$= (ad-bc) + (a'd'-b'c') + ad' + a'd - cb' - c'b$

$= q(M) + q(M') + 2\left[\frac{1}{2}(ad' + a'd - cb' - c'b)\right]$

Notons par $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(ad' + a'd - cb' - c'b)$$

Il est clair que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $M_2(\mathbb{R})$, vérifiant $\varphi(M, M') = \frac{1}{2}\left[q(M+M') - q(M) - q(M')\right]$.
par conséquent, q est une forme quadratique.

On peut répondre comme suit : soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.
$q(M) = x_1 x_4 - x_2 x_4$. c'est un polynome homogène de degré 2, donc c'est une forme quadratique

2) Notons que $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ (qui est un espace vectoriel de dimension 4).

$q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 x_4 - x_2 x_3$

$= 0x_1^2 + 0x_1x_2 + 0x_1x_3 + \frac{1}{2}x_1x_4 + 0x_2x_1 + 0x_2^2 - \frac{1}{2}x_2x_3 + 0x_2x_4$
$+ 0x_3x_1 - \frac{1}{2}x_3x_2 + 0x_3^2 + 0x_3x_4 + \frac{1}{2}x_4x_1 + 0x_4x_2 + 0x_4x_3 + 0x_4^2$

La matrice de q est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) La forme bilinéaire associée à q est la forme trouvée dans la question 1).

On peut aussi trouver la forme φ à partir de la matrice A de la forme quadratique q.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

$$= {}^tXAY.$$

4) Décomposons q par la méthode de Gauss.

$q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 x_4 - x_2 x_3$. En utilisant l'égalité

$xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$, on obtient,

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = \frac{1}{4}\left[(x_1+x_4)^2 - (x_1-x_4)^2\right] - \frac{1}{4}\left[(x_2+x_3)^2 - (x_2-x_3)^2\right]$$

Ainsi,

$$q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(x_1+x_4)^2 + \frac{1}{4}(x_2-x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_2+x_3)^2$$

5) Le rang de q est 4 (nombre de carrés).

La signature de q est $(2, 2) = (p, p')$

La forme quadratique n'est pas positive ($p' \neq 0$)

La forme quadratique n'est pas négative ($p \neq 0$)

6) On détermine une base orthogonale pour q.

soit $\begin{cases} x_1 + x_4 = x_1' & L_1 \\ x_2 - x_3 = x_2' & L_2 \\ x_1 - x_4 = x_3' & L_3 \\ x_2 + x_3 = x_4' & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_1' & L_1 \\ 2x_2 = x_2' + x_4' & L_2 + L_4 \\ 2x_1 = x_1' + x_3' & L_3 + L_1 \\ x_2 + x_3 = x_4' & L_4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_1' + x_3') \\ x_2 = \frac{1}{2}(x_2' + x_4') \\ x_3 = \frac{1}{2}(x_4' - x_2') \\ x_4 = \frac{1}{2}(x_1' - x_3') \end{cases}$$

Donc, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1' + x_3' & x_2' + x_4' \\ x_4' - x_2' & x_1' - x_3' \end{pmatrix}$.

$$= \frac{1}{2}x_1'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}x_2'\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}x_3'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}x_4'\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, $\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

est une base orthogonale pour q.

Exercice 20

$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 t\, P(t)\, Q'(t)\, dt$$

1) Montrons que φ est une forme bilinéaire.

soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(P+\alpha R, Q) = \int_0^1 t(P(t)+\alpha R(t))\, Q'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 t\, P(t)\, Q'(t)\, dt + \alpha \int_0^1 t R(t)\, Q'(t)\, dt$$

$$= \varphi(P, Q) + \alpha\, \varphi(R, Q)$$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire à gauche.

$$\varphi(P, Q+\alpha R) = \int_0^1 t P(t)\, (Q(t)+\alpha R(t))'\, dt$$

$$= \int_0^1 t\, P(t)\, Q'(t)\, dt + \alpha \int_0^1 t P(t)\, R'(t)\, dt$$

$$= \varphi(P, Q) + \alpha\, \varphi(P, R)$$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire à droite.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire.

On remarque que

$$\varphi(1, X) = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(X, 1) = \int_0^1 t^2 \times 0\, dt = 0.$$

Donc φ n'est ni symétrique ni antisymétrique

2) La forme quadratique associée à φ est :

$$q(P) = \varphi(P, P), \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X].$$

q est définie $\Leftrightarrow \varphi$ est définie.

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $q(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow \varphi(P, P) = 0$.

On a $q(1) = \varphi(1, 1) = \int_0^1 t \times 0\, dt = 0$.

$q(1) = 0$ mais $1 \neq 0$. Donc q n'est pas définie.

1 est un vecteur isotrope.

3) Calculer la matrice de q dans la base canonique.

Notons que la forme polaire de q n'est pas φ (car φ n'est pas symétrique) mais sa symétrisée

$$S(P, Q) = \frac{1}{2}\varphi(P, Q) + \frac{1}{2}\varphi(Q, P)$$

$$S(1,1) = \frac{1}{2}\int_0^1 t \times 1 \times 0 \, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t \times 1 \times 0 \, dt = 0$$

$$S(1, X) = \frac{1}{2}\int_0^1 t \, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t \times t \times 0 \, dt = \frac{1}{4}$$

$$S(1, X^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 t \times 1 \times 2t \, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 t \times t^2 \times 0 \, dt = \frac{1}{3}$$

$S(X, 1) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $S(X^2, 1) = \frac{1}{3}$

$S(X, X) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $S(X^2, X) = \frac{3}{8}$

$S(X, X^2) = \frac{3}{8}$ $\qquad$ $S(X^2, X^2) = \frac{2}{5}$

Donc $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1/4 & 1/3 & 3/8 \\ 1/3 & 3/8 & 2/5 \end{pmatrix}$.

4) Soit $P \in M_2[\mathbb{R}]$, alors $P(X) = x_1 + x_2 X + x_3 X^2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Donc $q(P) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\boxed{q(x) = {}^t x M x}$!

$$= \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{2}{5}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1 x_2 + \frac{2}{3}x_1 x_3 + \frac{3}{4}x_2 x_3$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_2^2 + \frac{3}{2}x_2\left(x_1 + \frac{3}{2}x_3\right)\right) + \frac{2}{3}x_1 x_3 + \frac{2}{5}x_3^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_2 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{8}x_3\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{8}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}x_1 x_3 + \frac{2}{5}x_3^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_2 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{8}x_3\right)^2 - \frac{3}{16}x_1^2 - \frac{27}{64}x_3^2 - \frac{9}{16}x_1 x_3 + \frac{2}{3}x_1 x_3$$

$$+ \frac{2}{5}x_3^2$$

$$q(P) = \frac{1}{3}\left(x_2 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{8}x_3\right)^2 - \frac{7}{320}x_3^2 + \frac{5}{48}x_1x_3 - \frac{3}{16}x_1^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_2 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{8}x_3\right)^2 - \frac{3}{16}\left(x_1^2 - \frac{5}{9}x_1x_3\right) - \frac{7}{320}x_3^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_2 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{8}x_3\right)^2 - \frac{3}{16}\left(x_1 - \frac{5}{18}x_3\right)^2 + \frac{25}{1728}x_3^2 - \frac{7}{320}x_3^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_2 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{9}{8}x_3\right)^2 - \frac{3}{16}\left(x_1 - \frac{5}{18}x_3\right)^2 - \frac{1}{135}x_3^2.$$

De cette expression, q est de signature $(1, 2)$. La forme q n'est ni positive ni négative.

((q est non dégénérée car $\operatorname{rang} q = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$))

5) On détermine une base orthogonale de q.

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x_1 + x_2 + \frac{9}{8}x_3 = x_1' \\ x_1 - \frac{5}{18}x_3 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2' + \frac{5}{18}x_3' \\ x_2 = x_1' - \frac{3}{4}x_2' - \frac{4}{3}x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{5}{18} \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

La base orthogonale est :

$$\mathcal{B} = \left\{ (0, 1, 0), \left(1, -\frac{3}{4}, 0\right), \left(\frac{5}{18}, -\frac{4}{3}, 1\right) \right\}$$

$$= \left\{ X, 1 - \frac{3}{4}X, \frac{5}{18} - \frac{4}{3}X + X^2 \right\}.$$

Exercice 21

1) $q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$.

la matrice de q_1 est $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

la forme polaire : $\varphi_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1$

la réduction de q_1 : $q_1(x) = (x_1+x_2)^2 - x_2^2$

la signature de q_1 est $(1,1)$, le rang de q_1 est 2.

q_1 est non dégénérée car $p+p' = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

q_1 n'est ni positive ni négative, car $p \neq 0$ et $p' \neq 0$

(p est le nombre de carrés précédés par le signe + et p' est le nombre de carrés précédés par le signe −)

On détermine une base orthogonale :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_1' \\ x_2 = x_2' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_2' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Ainsi $B_1 = \{(1,0), (-1,1)\}$ est une base orthogonale pour q_1

la matrice de passage de la base canonique à B_1 est

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, on vérifie que :

$$M_1' = {}^tP M_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) $q_2(x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.

la matrice de q_2 est : $M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

la forme polaire est :

$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$

$$\begin{aligned} q_2(x) &= 4(x_1^2 + 2x_1x_2) + 5x_2^2 \\ &= 4[(x_1+x_2)^2 - x_2^2) + 5x_2^2 \\ &= 4(x_1+x_2)^2 + x_2^2. \end{aligned}$$

$\operatorname{sign}(q_2) = (2,0)$, $\operatorname{rang}(q_2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc q_2 est non dégénérée.

$p' = 0$, $p = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow q_2$ est définie positive.

On détermine une base orthogonale pour q_2 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_1' \\ x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_2' \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$. Une base orthogonale est $B_2 = \{(1,0), (-1,1)\}$. On a

$$M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$P_{B_0 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base B_2.

3) $q_3(x) = 2x_1 x_2 = 2 \times \frac{1}{4}\left[(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2\right]$.

$= \frac{1}{2}(x_1+x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2$

$\text{sign}(q_3) = (1,1)$, $\text{rang}(q_3) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ q_3 est non dégénérée.

q_3 n'est ni positive ni négative, car $P \neq 0$ et $P' \neq 0$

La matrice de q_3 est : $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$.

La base orthogonale pour q_3 :

$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_1' \\ x_1 - x_2 = x_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2' \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$. Donc $B_3 = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

$M_3' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4) $q_4(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$

$= -\left(x_1^2 - 2x_1(2x_2)\right) - 4x_2^2 = -(x_1 - 2x_2)^2 + 4x_2^2 - 4x_2^2$

$\Rightarrow$ $q_4(x) = -(x_1 - 2x_2)^2 + 0x_2^2$.

$M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_2$

$\text{sign}(q_4) = (0,1)$, $\text{rang}(q_4) = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow q_4$ est dégénérée. $P = 0$, $P' = 1 \Rightarrow q_4$ est négative.

q_4 n'est pas définie négative car $P' = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

$B_4 = \{(1,0), (2,1)\}$ on fait : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = x_1' \\ x_2 = x_2' \end{cases}$