
Université Sultan Moulay Slimane

Faculté des sciences et techniques
de Beni Mellal

Année universitaire : 2020-2021

**Licence Science et Techniques :
Génie Mathématiques**

Cours : Théorie de la mesure et de l'intégration

Abdesselam BOUARICH

Deuxième version (en ligne) :

19 février 2021

Table des matières

1	Éléments de la théorie des ensembles	3
1.1	Opérations sur les ensembles	3
1.2	Suites de sous-ensembles	6
1.3	Opérations sur les applications	8
1.4	L'algèbre des fonctions	10
1.5	Suites de fonctions	11
1.6	Dénombrabilité	14
1.7	Rappels de topologie générale	16
1.7.1	Définition et exemples de topologies	16
1.7.2	Topologie à base dénombrables	19
1.7.3	Topologie produit	21
1.7.4	Rappel sur la compacité	22
2	Ensembles et fonctions mesurables	24
2.1	Familles particulières d'ensembles : Clans et tribus	24
2.1.1	Opérations ensemblistes sur les clans et les tribus	25
2.1.2	L'engendrement des clans et des tribus	27
2.1.3	Produit cartésien des clans et des tribus	31
2.1.4	Les classes monotones (facultative)	33
2.2	Les tribus boréliennes	35
2.2.1	Ensembles boreliens et tribus boréliennes	35
2.2.2	Tribu borélienne de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$	37
2.3	Fonctions mesurables	39
2.3.1	Propriétés des fonctions mesurables	39
2.3.2	Mesurabilité et sous-ensembles de niveau	41
2.3.3	Mesurabilité sur les produits cartésiens	43
2.3.4	Opérations algébriques sur les fonctions mesurables	44
2.3.5	Suite de fonctions mesurables	46
2.3.6	Les fonctions étagées mesurables et les approximations	47
3	Mesures positives	51
3.1	Généralités sur les mesures positives	51
3.1.1	Définitions et exemples	51
3.1.2	Fonctions additives sur les semi-anneaux	53

3.1.3	Continuité des mesures positives	58
3.2	Mesure extérieure	63
3.2.1	Définition et théorème d'existence	63
3.2.2	Mesurabilité au sens de A. Caratheodory	65
3.2.3	Mesures et tribus complètes	68
3.3	Discussions et compléments	70
3.3.1	Caractérisation de la mesure de Lebesgue	70
3.3.2	L'ensemble de G. Cantor	71
3.3.3	Vitali : il existe une partie non borélienne dans $\mathbb{R}$	72
3.3.4	Mesures de Borel	73
4	Calcul intégrale au sens de Lebesgue	74
4.1	Le principe μ -presque partout : μ -p.p	74
4.2	Intégrale supérieure de Lebesgue	75
4.2.1	Le cas d'une fonction étagée positive	75
4.2.2	Le cas d'une fonction mesurable positive	77
4.2.3	Le cas général	80
4.3	Comparaison entre l'intégrale de Riemann et de Lebesgue	83
4.4	Théorème de convergence domaine	84
4.5	Inégalité de Markov et ses conséquences	86
5	Solution de la feuille de TD1 : Ensembles et fonctions	89
6	Solution de la feuille de TD2 : Ensembles et fonctions mesurables	100
7	Solution de la feuille de TD3 : Mesures positives et les intégrales	113
8	Solution du contrôle : 2019-2020	130

Éléments de la théorie des ensembles

1.1 Opérations sur les ensembles

Les ensembles seront désignés par les lettres $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$. L'appartenance d'un élément x à un ensemble $\mathbf{E}$ sera désignée par $x \in \mathbf{E}$ tandis que la négation de l'appartenance sera désignée par $x \notin \mathbf{E}$. Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle ensemble vide et se note $\emptyset$.

Inclusion : On dira que $\mathbf{A}$ est un sous-ensemble (ou une partie) de l'ensemble $\mathbf{E}$ lorsque tout élément x de $\mathbf{A}$ est aussi un élément de $\mathbf{E}$, et on écrit : $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{E}$ en lisant ; $\mathbf{A}$ est inclus dans $\mathbf{E}$. Le symbole $\subseteq$ s'appelle symbole d'inclusion large et on le traduit au moyen du connecteurs logiques par :

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{E} \iff (x \in \mathbf{A} \implies x \in \mathbf{E})$$

Lorsque $\mathbf{A}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{E}$ dans lequel il existe au moins un $x \in \mathbf{E}$ avec $x \notin \mathbf{A}$ on utilise alors le symbole d'inclusion stricte $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$.

L'ensemble des parties : Étant donné un ensemble $\mathbf{E}$, on désigne par $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbf{E}$ i.e :

$$F \in \mathcal{P}(\mathbf{E}) \iff F \subseteq \mathbf{E}$$

Puisque l'ensemble vide est considéré comme un sous-ensemble de tous les ensembles on conclut alors que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est toujours non vide : $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$. En particulier, l'ensemble des parties de l'ensemble vide est le singleton : $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Intersection et réunion : Soient I un ensemble non vide et $\mathcal{F} = \{A_i; i \in I\}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbf{E}$. On définit l'intersection de la famille d'ensembles $\mathcal{F}$ par :

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in \mathbf{E} / \forall i \in I, x \in A_i\}$$

De même, on définit la réunion de la famille d'ensembles $\mathcal{F}$ par :

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in \mathbf{E} / \exists i \in I, x \in A_i\}$$

Lorsque l'ensemble des indices $I = \mathbb{N}$ l'intersection (resp. la réunion) de la famille d'ensembles $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ sera désignée par :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbf{E} / \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n\} \quad \text{resp.} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbf{E} / \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

En particulier, si A et B sont des parties de $\mathbf{E}$ leur intersection et leur réunion sont définies respectivement par :

$$A \cap B = \{x \in \mathbf{E} / x \in A \text{ et } x \in B\} \quad \text{resp.} \quad A \cup B = \{x \in \mathbf{E} / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Partant de la définition de $\cap$ et $\cup$ on vérifie que les expressions données par la proposition suivantes sont vraies :

Proposition 1. *L'intersection $\cap$ et la réunion $\cup$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. **Commutativité :** $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
2. **Associativité :** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
3. **Distributivité :** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. **Eléments neutres :** $A \cap \mathbf{E} = A$ et $A \cup \emptyset = A$.

Pour les familles de sous-ensembles l'intersection $\bigcap$ et la réunion $\bigcup$ vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 2. *Soit $\{A_i; i \in I\}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbf{E}$. Alors, pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on a les expressions suivantes :*

1. $A \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cap A_i) ;$
2. $A \cup \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cup A_i) ;$
3. $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i) ;$

Exemple 1. *En utilisant la définition usuelle des intervalles de $\mathbb{R}$; on vérifie que pour tout couple de réels $a < b$ on a les expressions suivantes avec $n_0 = E(\frac{1}{b-a}) + 1 \in \mathbb{N}^*$:*

1. $[a, b] = \bigcup_{n \geq n_0} [a, b - \frac{1}{n} [;$
2. $]a, b] = \bigcup_{n \geq n_0} [a + \frac{1}{n}, b] ;$
3. $[a, b] = \bigcap_{n \geq 1}]a - \frac{1}{2n}, b + \frac{1}{2n} [;$
4. $]a, b[= \bigcup_{n \geq n_0}]a + \frac{1}{2n}, b - \frac{1}{2n} [.$

Complémentaire et différences : Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbf{E}$ tels que $A \subseteq B$. On définit la partie complémentaire de A dans B par,

$$\mathbb{C}_B^A := \{x \in B / x \notin A\}$$

Lorsque la partie $B = \mathbf{E}$ on préfère noter $A^c := \mathbb{C}_{\mathbf{E}}^A = \{x \in \mathbf{E} / x \notin A\}$.

De façon générale, si les parties A et B sont quelconques on définit leur différence par l'expression :

$$B \setminus A := B \cap A^c = \{x \in \mathbf{E} / x \in B \text{ et } x \notin A\}$$

Enfin, on définit la différence symétrique de deux parties quelconques A et B par l'expression :

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

La proposition suivante nous donne les expressions utiles qui relient les symboles d'intersection $\bigcap$, la réunion $\bigcup$ et la complémentarité $\mathbb{C}$.

Proposition 3. Pour toute famille de sous-ensembles $\{A_i; i \in I\}$ d'un ensemble $\mathbf{E}$ on a les expressions suivantes :

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c;$
2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c;$
3. $\forall B \subseteq \mathbf{E}, \quad B \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (B \setminus A_i);$
4. $\forall B \subseteq \mathbf{E}, \quad B \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \setminus A_i);$

Les propriétés essentielles de la différence symétrique Δ sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 4. Sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ la différence symétrique Δ vérifie les propriétés suivantes :

1. **Commutativité :** $A \Delta B = B \Delta A.$
2. **Associativité :** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$
3. $A \Delta \emptyset = A$ et $A \Delta A = \emptyset.$
4. $A \Delta A^c = \mathbf{E}$ et $A \Delta \mathbf{E} = A^c.$
5. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$

En conséquence, le couple $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta)$ est un groupe commutatif et le triplet $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap)$ est un anneau commutative unitaire.

Produit cartésien des ensembles : Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ des ensembles non vides. Le choix de deux éléments $x \in \mathbf{E}$ et $y \in \mathbf{F}$ permet de définir un nouveau élément noté (x, y) qu'on appellera couple ordonné. La famille (collection) de tous les couples ordonnés de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ constitue un ensemble appelé produit cartésien de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$; on le désigne par :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{F} := \{(x, y); x \in \mathbf{E} \text{ et } y \in \mathbf{F}\}$$

La définition du produit cartésien de deux ensembles se généralise aisément au cas des familles d'ensembles. Plus précisément, si $\mathcal{F} = \{E_i; i \in I\}$ est une famille d'ensembles non vides on définit son produit cartésien par l'expression suivante :

$$\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i := \{(x_i)_{i \in I}; \forall i \in I, x_i \in \mathbf{E}_i\}$$

En pratique, pour une famille finie d'ensembles identiques $\mathbf{E}_1 = \dots = \mathbf{E}_m = \mathbf{E}$; on désigne leur produit cartésien par l'expression :

$$\underbrace{\mathbf{E}_1 \times \dots \times \mathbf{E}_m}_{m\text{-fois}} = \mathbf{E}^m$$

Dans le cas d'une famille d'ensembles telle que $\forall i \in I, \mathbf{E}_i = \mathbf{E}$ on désigne leur produit cartésien par :

$$\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i = \mathbf{E}^I$$

En particulier, si l'ensemble des indices, $I = \mathbb{N}$, on désigne alors le produit cartésien de la famille d'ensembles $\{\mathbf{E}_n = \mathbf{E}; n \in \mathbb{N}\}$ par :

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_n = \mathbf{E}^{\mathbb{N}} \quad \text{ou par} \quad \mathbf{E}^{\infty}$$

Les éléments de l'ensemble $\mathbf{E}^{\infty}$ s'appellent suites d'éléments de l'ensemble $\mathbf{E}$.

Exercice 1. Cet exercice propose des formules qui concernent l'interaction du produit cartésien avec l'intersection et la réunion des ensembles.

- 1) $A \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$ et $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \right) \times B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B)$.
- 2) $A \times \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$ et $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B)$.
- 3) $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n)$ et $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcap_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n)$.

1.2 Suites de sous-ensembles

Cette partie est consacrée aux suites de sous-ensembles et leurs convergences (limites).

Définition 1. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ une famille de parties de $\mathbf{E}$ appelée suite de sous-ensembles de $\mathbf{E}$.

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, on dira que la suite (A_n) est croissante.
2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subseteq A_n$, on dira que la suite (A_n) est décroissante.
3. Une suite de sous-ensembles (A_n) est dite monotone si elle est soit croissante ou soit décroissante.

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}$ on considère les suites de parties : $A_n = [0, n]$, $B_n = [-n, n]$, $C_n =]n, +\infty[$ et $D_n =]n + \frac{(-1)^n}{n+1}, n+1[$.

Les suites A_n et B_n sont croissantes tandis que la suite C_n est décroissante. En revanche, comme les intersections $D_{2n} \cap D_{2n+1} =]2n+1 - \frac{1}{2n+2}, 2n+1[\neq D_m, \forall m \in \mathbb{N}^*$ ceci implique que la suite D_n n'est pas monotone.

Exemple 3. Étant donnée une suite de parties $A_n \subseteq \mathbf{E}$; on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n := \bigcap_{p \geq n} A_p \quad \text{et} \quad C_n := \bigcup_{p \geq n} A_p$$

Noter que la suite de parties B_n est croissante et que la suite de parties C_n est décroissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les inclusions : $B_n \subseteq A_n \subseteq C_n$.

Définition 2. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, et $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de parties de $\mathbf{E}$.

1. On appelle limite inférieure de la suite (A_n) le sous-ensemble défini par :

$$\liminf A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p$$

2. On appelle limite supérieure de la suite (A_n) le sous-ensemble défini par :

$$\limsup A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p$$

3. On dira que la suite (A_n) converge lorsque $\liminf A_n = \limsup A_n$. Dans ce cas, on définit la limite de la suite (A_n) par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$$

Utilisant la définition logique des symboles de l'intersection et de la réunion quelconque, on obtient les équivalences :

$$x \in \liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p \iff \left((\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_0 \implies x \in A_n \right)$$

De même,

$$x \in \limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p \iff \left((\forall n \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N}), n_0 \geq n \implies x \in A_{n_0} \right)$$

Ainsi, grâce à ces expressions logiques on déduit les interprétations suivantes des points appartenant aux $\liminf$ et $\limsup$:

1. Le point $x \in \liminf A_n$ si et seulement, si x appartient à toutes les parties A_n à partir d'un certain rang.
2. Le point $x \in \limsup A_n$ si et seulement, si x appartient à une infinité des parties A_n .

Partant de la définition de $\liminf$ et $\limsup$ on obtient les relations suivantes :

1. $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.
2. $\left(\liminf A_n \right)^c = \limsup (A_n)^c$.
3. $\left(\limsup A_n \right)^c = \liminf (A_n)^c$.
4. $\forall A \subseteq \mathbf{E}, \quad A \setminus \liminf A_n = \limsup (A \setminus A_n)$.
5. $\forall A \subseteq \mathbf{E}, \quad A \setminus \limsup A_n = \liminf (A \setminus A_n)$.

Proposition 5. *Toute suite monotone de sous-ensembles (A_n) converge. Plus précisément,*

1. *Si la suite (A_n) est croissante alors sa limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*
2. *Si la suite (A_n) est décroissante alors sa limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*

Démonstration. Supposons que la suite (A_n) est croissante. Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on aura

$$\bigcap_{p \geq n} A_p = A_n \implies \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n$$

De même, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \implies \limsup A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n$$

Par conséquent, la suite croissante (A_n) converge et sa limite est égale à : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

De la même façon, on vérifie que si la suite (A_n) est décroissante alors elle converge et sa limite est égale à : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. □

Exemple 4. *Une suite de sous-ensembles $A_n \subseteq \mathbf{E}$ est dite disjointe si pour tout couple d'entiers $m \neq n$ on a $A_m \cap A_n = \emptyset$.*

1) *Le fait que les termes de la suite (A_n) sont disjoints deux à deux il s'ensuit qu'un point $x \in \mathbf{E}$ ne peut pas appartenir à une infinité de termes A_n , donc $\limsup A_n = \emptyset$; et par suite $\liminf A_n = \emptyset$.*

Par conséquent, toute suite de sous-ensembles dont les termes sont disjoints deux à deux converge vers l'ensemble vide.

2) Comme application de ce qui précède, considérons une suite de nombres réels (x_n) dont les termes sont distingués ce qui nous donne une suite de singletons disjoints $\{x_n\}$; donc sa limite en tant que suite de sous-ensembles $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{x_n\} = \emptyset$.

Cet exemple nous montre que la convergence des sous-ensembles est différente de la convergence des suites numériques. En particulier, pour toute suite réelle infinie convergente, $x_n \in \mathbb{R}$, on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{x_n\} \neq \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right\}$$

Exercice 2. Cet exercice vous propose une méthode qui permet de transformer une suite de sous-ensembles en une suite disjointe ayant la même réunion que la suite donnée au départ.

Étant donnée une suite de sous-ensembles (A_n) ; posons $B_0 = A_0$ et pour tout entier $n > 0$ posons

$$B_n = A_n \cap \left(A_0 \cdots A_{n-1} \right)^c \subseteq A_n$$

- 1) Montrer que les sous-ensembles (B_n) sont disjoints deux à deux i.e : $\forall n \neq m \implies B_n \cap B_m = \emptyset$.
- 2) Montrer par récurrence qu'on a : $\forall n \geq 0, A_0 \cup \cdots \cup A_n = B_0 \cup \cdots \cup B_n$.
- 3) En déduire que $\bigcup_{n \geq 0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} B_n$.

Exercice 3. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{E}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$A_{2n} = A \quad \text{et} \quad A_{2n+1} = B$$

- 1) Calculer les limites $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.
- 2) Sous quelle(s) condition(s) la suite A_n soit convergente ?

Exercice 4. Soient A et $B \subseteq \mathbf{E}$ deux parties différentes et A_n une suite de parties de $\mathbf{E}$. Pour tout entier $n \geq 0$ on pose :

$$B_{2n} = A_n \cup A \quad \text{et} \quad B_{2n+1} = A_n \cup B$$

- 1) Montrer que $\liminf B_n = \liminf (A_n \cup (A \cap B))$ et $\limsup B_n = \limsup (A_n \cup (A \cup B))$.
- 2) La suite B_n est-elle convergente ?

1.3 Opérations sur les applications

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ des ensembles non vides. On appelle application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ toute correspondance notée, $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$, qui associe à chaque élément $x \in \mathbf{E}$ un et un seul élément $f(x) \in \mathbf{F}$. Lorsque $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une application $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{C}$) sera appelée une fonction réelle (resp. complexe).

Dans ce qui va suivre, on va rappeler quelques notions et mots clefs liés aux applications.

- 1) On dira que l'application $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ est injective si pour un couple de points x et $x' \in \mathbf{E}$ on a $f(x) = f(x')$ alors cela entraîne que $x = x'$.
- 2) On dira que l'application $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ est surjective si $f(\mathbf{E}) = \mathbf{F}$. C'est-à-dire, si pour tout élément $y \in \mathbf{F}$ il existe au moins un élément $x \in \mathbf{E}$ tel que $f(x) = y$.
- 3) On définit l'image directe d'un sous-ensemble $A \subseteq \mathbf{E}$ par $f(A) := \{f(x); x \in A\}$.
- 4) On définit l'image inverse d'un sous-ensemble $B \subseteq \mathbf{F}$ par $f^{-1}(B) := \{x; f(x) \in B\}$.
- 5) Soient $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ et $g : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ des applications. On définit l'application composée de f et g par l'expression : $g \circ f(x) := g(f(x)), \forall x \in \mathbf{E}$. L'application composée $g \circ f$ est donc définie de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{G}$.
- 6) Étant donnée une famille d'ensembles $\{\mathbf{E}_i; i \in I\}$ on lui associe une famille d'applications définies comme suit :

$$\begin{aligned} \text{pr}_i : \prod_{i \in I} \mathbf{E}_i &\longrightarrow \mathbf{E}_i \\ (x_i)_{i \in I} &\longrightarrow x_i \end{aligned}$$

L'application pr_i ainsi définie s'appelle i -ème projection cartésienne du produit $\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i$ sur le facteur $\mathbf{E}_i$.

Noter alors qu'avec ces notations, toute application $f : \mathbf{E} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{E}_i$ induit une famille d'applications

$$f_i := \text{pr}_i \circ f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}_i, \quad \forall i \in I$$

bien définie dont les éléments f_i s'appellent les composantes de f . En pratique, on préfère noter l'application $f : \mathbf{E} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{E}_i$ sous la forme d'une famille d'applications ie. : $f = (f_i)_{i \in I}$.

Proposition 6. Soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application. L'image inverse par f des sous-ensembles de $\mathbf{F}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $A \subseteq B \subseteq \mathbf{F} \implies f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq \mathbf{E}$.
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.
3. $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.
4. $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
5. $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$.

Proposition 7. Soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application. L'image directe par f des sous-ensembles de $\mathbf{E}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $A \subseteq B \subseteq \mathbf{E} \implies f(A) \subseteq f(B) \subseteq \mathbf{F}$.
2. $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
3. $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
4. Lorsque l'application f est injective on aura alors $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

Exemple 5. Soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On vérifie qu'on a les expressions suivantes :

1. $\forall c \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}([c, +\infty[) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq c\}$.
2. $\forall c \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(]c, +\infty[) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\}$.
3. $\forall c \in \mathbb{R}, \quad \{x \in E, f(x) \geq c\} = \bigcap_{n \geq 1} \{x \in E, f(x) > c - \frac{1}{n}\}$
4. $\forall c \in \mathbb{R}, \quad \{x \in E, f(x) > c\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in E, f(x) \geq c - \frac{1}{n}\}$

Exercice 5. Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}$ une suite infinie strictement décroissante avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

- i) $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha_n\}$.
- ii) $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) < \alpha_n\}$.

Exercice 6. Soient $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application et $A \subseteq \mathbf{E}$ et $B \subseteq \mathbf{F}$ des parties.

- 1) Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
- 2) Montrer que f est injective si et seulement, si pour toute partie $X \subseteq \mathbf{E}$, $f^{-1}(f(X)) = X$.
- 3) Montrer que f est surjective si et seulement, si pour toute partie $Y \subseteq \mathbf{F}$, $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

1.4 L'algèbre des fonctions

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide. On désigne par $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $\mathbf{E}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Sur l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ on définit une structure d'algèbre de la manière suivante :

L'addition : On définit la somme de deux fonctions f et $g \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ par :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

Le couple $(\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}), +)$ est alors un groupe commutatif (abélien) dont l'élément neutre est la fonction nulle qui associe à tout élément $x \in \mathbf{E}$ la valeur nulle i.e : $x \in \mathbf{E} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$.

La multiplication : On définit le produit de deux fonctions f et $g \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ par :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad (f \times g)(x) := f(x) \times g(x)$$

On vérifie que le triplet $(\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire ; où l'élément neutre de la multiplication $\times$ est la fonction qui associe à tout $x \in \mathbf{E}$ la valeur constante 1 : $x \in \mathbf{E} \mapsto 1 \in \mathbb{R}$.

On vérifie aussi qu'une fonction $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ est inversible par rapport à la multiplication $\times$ si et seulement, si le sous-ensemble des zéros $\{x \in \mathbf{E}; f(x) = 0\} = \emptyset$. Dans ce cas, l'inverse de la fonction f est donnée par la fonction $x \in \mathbf{E} \mapsto \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R}$.

La multiplication externe : Etant donné un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ on pose :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \in \mathbb{R}$$

Ainsi, grâce à la multiplication externe on obtient un espace vectoriel réel $(\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ et une structure d'algèbre commutative unitaire donnée par $(\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}), +, \times, \cdot)$.

En remplaçant le corps des réels $\mathbb{R}$ par le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ on obtient l'algèbre des fonctions complexes $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$.

Relation d'ordre : Soient f et $g \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$. On dira que la fonction g est inférieure ou égale à la fonction f si, $\forall x \in \mathbf{E}, \quad g(x) \leq f(x)$. Dans ce cas on écrit $g \leq f$ et on dira aussi que f est supérieure ou égale à g .

Proposition 8. Dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ la relation binaire $\leq$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad f \leq f$.
2. $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad g \leq f \quad \text{et} \quad f \leq g \implies f = g$.
3. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad g \leq f \quad \text{et} \quad f \leq h \implies g \leq h$.

Dans la suite, étant donnée un couple de fonctions f et $g \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ on lui associe deux nouvelles fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad \max(f, g)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } g(x) \leq f(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \min(f, g)(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \\ g(x) & \text{si } g(x) \leq f(x) \end{cases}$$

De même, pour toute fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ on lui associe les fonctions suivantes très utiles pour la suite de notre Cours (Mesure et Intégration) :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad f^+(x) := \max(f(x), 0), \quad f^-(x) := -\min(f(x), 0), \quad |f|(x) := |f(x)|$$

Avec ces notations on vérifie qu'on a les relations suivantes :

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \quad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

Indicatrice d'une partie : Pour toute partie non vide $A \subseteq \mathbf{E}$ on définit sa fonction caractéristique (ou indicatrice) par les expressions :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Lorsque $A = \emptyset$ on pose : $\chi_{\emptyset}(x) = 0, \forall x \in \mathbf{E}$, de même, on pose $\chi_{\mathbf{E}}(x) = 1, \forall x \in \mathbf{E}$.

Proposition 9. Les fonctions caractéristiques (indicatrices) vérifient les propriétés suivantes :

1. $(\forall A, B \subseteq \mathbf{E}), \quad A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$.
2. $(\forall A, B \subseteq \mathbf{E}), \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \times \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B, \quad \chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \times \chi_B$.
3. $\forall A \subseteq \mathbf{E}, \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.
4. $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction indicatrice si et seulement, si pour tout $x \in \mathbf{E}$, $f(x)(1 - f(x)) = 0$.
5. L'application, $\chi : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, qui associe à tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbf{E}$ sa fonction caractéristique χ_A est injective.
6. L'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est bijectif avec le sous-ensemble des fonctions :

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}, \{0, 1\}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}); f(1 - f) = 0\}$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose :

$$F^+ = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad F^- = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq 0\}$$

Montrer que $f^+ = f\chi_{F^+}$ et $f^- = -f\chi_{F^-}$.

Exercice 8. Soient f et $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $c \in \mathbb{R}$.

1) Etablir les relations ensemblistes suivantes :

1. $\{x \in \mathbf{E}; \max(f(x), g(x)) > c\} = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\} \cup \{x \in \mathbf{E}; g(x) > c\}$.
2. $\{x \in \mathbf{E}; \max(f(x), g(x)) < c\} = \{x \in \mathbf{E}; f(x) < c\} \cap \{x \in \mathbf{E}; g(x) < c\}$.
3. $\{x \in \mathbf{E}; \inf(f(x), g(x)) > c\} = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\} \cap \{x \in \mathbf{E}; g(x) > c\}$.
4. $\{x \in \mathbf{E}; \inf(f(x), g(x)) < c\} = \{x \in \mathbf{E}; f(x) < c\} \cup \{x \in \mathbf{E}; g(x) < c\}$.

2) Etablir les relations ensemblistes qui concernent les opérateurs $\max$, $\min$ et les inégalités $\leq$ et $\geq$.

Exercice 9. Montrer que pour tout couple de fonctions f et $g : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ on a les relations suivantes :

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \quad \text{et} \quad \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

En déduire que $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$.

1.5 Suites de fonctions

Étant donnée une suite réelle bornée $u_n \in \mathbb{R}$; on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n := \inf\{u_p; p \geq n\} \quad \text{et} \quad b_n := \sup\{u_p; p \geq n\}$$

Les suites réelles a_n et b_n définies ci-dessus sont bornées et vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq u_n \leq b_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1}$.

$$3. \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} \leq b_n.$$

Puisque la suite a_n est croissante majorée, donc elle converge vers un nombre réel fini que l'on appelle limite inférieure de la suite u_n et se note :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{a_p; p \geq n\} = \sup_{n \geq 0} \inf_{p \geq n} u_p$$

De même, puisque la suite b_n est décroissante minorée, donc elle converge vers un nombre réel fini que l'on appelle limite supérieure de la suite u_n et se note :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{a_p; p \geq n\} = \inf_{n \geq 0} \sup_{p \geq n} u_p$$

Exercice 10. Soit u_n une suite réelle bornée. Démontrer les propositions suivantes :

- 1) Si $u_{\varphi(n)}$ est une sous-suite extraite de u_n convergente alors, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 2) La suite u_n converge si et seulement, si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Définition 3. Une famille de fonctions, $\{f_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, s'appelle suite de fonctions.

1. On dira que la suite de fonctions f_n est croissante (resp. décroissante) si on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbf{E}), \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \text{resp.} \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

2. On dira que la suite de fonctions f_n converge vers f au point $x \in \mathbf{E}$ si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

et on pose $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

3. Le sous-ensemble, $\{x \in \mathbf{E}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \text{ existe}\}$, s'appelle domaine de convergence simple de la suite de fonctions f_n .
4. On dira que la suite de fonctions f_n converge simplement sur le sous-ensemble $A \subseteq \mathbf{E}$ vers la fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ si,

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

5. On dira que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur le sous-ensemble $A \subseteq \mathbf{E}$ vers la fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ si,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq n_0 \implies \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Comme pour le cas des suites numériques, la donnée d'une suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbf{E}$ on lui associe deux nouvelles suites de fonctions définies de la manière suivantes :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad A_n(x) := \inf\{f_p(x); p \geq n\} \quad \text{et} \quad B_n(x) := \sup\{f_p(x); p \geq n\}$$

Les suites de fonctions A_n et B_n qu'on vient de définir vérifient les propriétés suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbf{E})(\forall n \in \mathbb{N}), \quad A_n(x) \leq f_n(x) \leq B_n(x)$.
2. $(\forall x \in \mathbf{E})(\forall n \in \mathbb{N}), \quad A_n(x) \leq A_{n+1}(x)$.
3. $(\forall x \in \mathbf{E})(\forall n \in \mathbb{N}), \quad B_{n+1}(x) \leq B_n(x)$.

Maintenant, si $D \subseteq \mathbf{E}$ désigne l'intersection des domaines de convergence simple des suites de fonctions monotones A_n et B_n on pourra alors définir deux fonctions notées respectivement :

$$\forall x \in D, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \text{resp.} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

et sont appelées respectivement la limite inférieure et la limite supérieure de la suite de fonctions f_n .

Remarque 1. Noter que puisque pour un point fixé $x \in \mathbf{E}$ la suite numérique $(f_n(x))$ converge si et seulement, si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ on en déduit que le domaine de convergence de la suite de fonctions (f_n) est constitué par le sous-ensemble de points : $\{x \in \mathbf{E}; \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)\}$.

Proposition 10. Pour toute suite de sous-ensembles $A_n \subseteq \mathbf{E}$ on a les affirmations suivantes :

1. $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j} = \chi_{\bigcup_{j \geq n} A_j}$.
2. $\inf_{j \geq n} \chi_{A_j} = \chi_{\bigcap_{j \geq n} A_j}$.
3. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$.
4. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}$.

En conséquence, la suite de fonctions caractéristiques, χ_{A_n} , converge simplement si et seulement si la suite de sous-ensembles A_n converge.

Démonstration. 1) D'abord, observer que si on prend $x \in \bigcup_{j \geq n} A_j$ il existe alors un $j \geq n$ tel que $x \in A_j$, donc $\chi_{A_j}(x) = 1$. Ainsi, comme $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j}(x) \leq 1$ on aura $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j}(x) = 1$. De même, si on prend $x \in \left(\bigcup_{j \geq n} A_j\right)^c = \bigcap_{j \geq n} (A_j)^c$ on aura pour tout $j \geq n$, $\chi_{A_j}(x) = 0$, donc $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j}(x) = 0$. Ceci démontre que la fonction $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j} = \chi_{\bigcup_{j \geq n} A_j}$.

L'affirmation 2) se démontre comme 1); il suffit qu'on remplace $\bigcup$ par $\bigcap$ et sup par inf.

Les affirmations 3) et 4) se déduisent de 1) et 2). □

Exercice 11. Soit f_n une suite de fonctions réelles définies sur un ensemble non vide $\mathbf{E}$.

1) Montrer que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ on a les expressions suivantes :

- i) $\{x \in \mathbf{E}; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) > c\}$.
- ii) $\{x \in \mathbf{E}; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) \leq c\}$.
- iii) $\{x \in \mathbf{E}; \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) \geq c\}$.
- iv) $\{x \in \mathbf{E}; \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) < c\}$.

2) Pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ déterminer la limite inférieure et la limite supérieure des suites de sous-ensembles :

$$A_n(c) = \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) > c\}, \quad B_n(c) = \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) \geq c\}$$

$$C_n(c) = \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) < c\}, \quad D_n(c) = \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) \leq c\}$$

3) Montrer que le domaine de convergence simple, $D \subseteq \mathbf{E}$, de la suite de fonctions f_n vers la fonction f est donné par l'expression :

$$D = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \{x \in \mathbf{E}; |f_p(x) - f(x)| < r\}$$

Exercice 12. Etant donnée une suite de parties $A_n \subseteq \mathbf{E}$; montre que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}$ converge simplement sur la partie $A \subseteq \mathbf{E}$.
2. La suite de fonctions χ_{A_n} converge simplement sur la partie $A \subseteq \mathbf{E}$ vers la fonction nulle.

En déduire que le domaine de convergence simple de la série de fonctions, $\sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}$, est le sous-ensemble $\left(\limsup A_n\right)^c$.

1.6 Dénombrabilité

Définition 4. Soit E un ensemble.

1. S'il existe une bijection $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow E$ on dira que E est un ensemble fini de cardinal n et on pose $\text{Card}(E) = n$.
2. L'ensemble vide est considéré fini de cardinal $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
3. Si E n'est pas fini on dira qu'il est infini.
4. S'il existe une bijection $f : \mathbb{N}^* \rightarrow E$ on dira que E est un ensemble infini dénombrable.

Proposition 11. L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable et tous ses sous-ensembles infinis sont dénombrables.

Démonstration. 1) Observer que la fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n - 1$ est une bijection, donc $\mathbb{N}$ est dénombrable.

2) Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble infini. Puisque A est minoré par zéro il possède donc un plus petit élément ; désignons le par $n_1 = \inf\{x; x \in A\}$. De même, puisque $A \setminus \{n_1\}$ est infini et minoré par zéro il possède donc un plus petit élément $n_2 = \inf(A \setminus \{n_1\})$. Noter alors qu'on a : $n_1 < n_2$.

Noter que si on continue ce raisonnement on va construire par récurrence une suite d'entiers $n_k \in A$ et une fonction strictement croissante $k \in \mathbb{N}^* \mapsto f(k) := n_k \in A$; donc f est injective.

En effet, la fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow A$ est surjective, car sinon ; il existe un entier $p \in A \setminus f(\mathbb{N}^*)$ tel que $f(1) < p$. Ainsi, comme la suite $f(k)$ est strictement croissante il existe alors un unique entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(k) < p < f(k+1)$. Or, cette double inégalité contredit la définition de l'entier $f(k+1) = \inf(A \setminus \{f(1), f(2), \dots, f(k)\})$. Ainsi, comme $f(\mathbb{N}^*) = A$; f est alors bijective. Par conséquent, le sous-ensemble infini $A \subset \mathbb{N}$ est dénombrable. $\square$

Exemple 6. 1) L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Pour le voir considérons la fonction bijective $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par les expressions suivantes :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ paire} \\ 1 - \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$$

- 2) Tous les sous-ensembles infinis de $\mathbb{Z}$ sont dénombrables.
- 3) Le produit cartésien $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Pour le prouver considérons la fonction bijective

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f(n, p) = 2^n(2p + 1)$$

- 4) Partant des exemples 1) et 3) on déduit que les ensembles produits $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ sont dénombrables.
- 5) En effet, à partir des exemples 1) et 3) on déduit que le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.
- 6) Rappelons que tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous la forme irréductible $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$. De cette remarque on voit que la fonction $f\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est injective ; il s'ensuit que le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (infini) est un ensemble dénombrable.

Proposition 12. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble infini. Alors, pour toute suite de sous-ensembles dénombrables $A_n \subseteq \mathbf{E}$ la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbf{E}$ est un sous-ensemble dénombrable.

Démonstration. D'abord, noter que puisque les parties A_n sont dénombrables il existe donc des bijections, $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons, $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subseteq A_n$. Noter alors que les sous-ensembles B_n sont disjoints deux à deux : $\forall n \neq m, B_m \cap B_n = \emptyset$, en plus, puisque pour tout $n \geq 1$ on a (récurrence) :

$$B_0 \cup \dots \cup B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n \quad \implies \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

Maintenant, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on fixe une bijection $f_n : A_n \rightarrow \mathbb{N}$ on voit que l'application $f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par l'expressions :

$$\forall x \in B_n, \quad f(x) = (n, f_n(x)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

est injective. Donc, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un sous-ensemble dénombrable. $\square$

La proposition suivante nous donne un exemple d'ensembles infinis non dénombrables.

Proposition 13. *L'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable.*

Démonstration. 1) Notons que si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $f(n) = \{n\}$ on obtient ainsi une application injective $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini.

2) Pour montrer que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable on va procéder par l'absurde. Supposons alors qu'il existe une bijection $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et posons

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin g(n)\} \subseteq \mathbb{N}$$

Ainsi, comme la fonction g est surjective (car elle est bijective) il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $g(m) = A$. Ainsi, comme A est une partie de $\mathbb{N}$ on aura l'un des deux cas possibles suivants :

$$m \in A \quad \text{ou bien} \quad m \notin A$$

i) Si $m \in A$ il s'ensuit que $m \notin g(m) = A$, ce qui est absurde.

ii) Si $m \notin A$ il s'ensuit que $m \in g(m) = A$; ce qui est encore absurde.

Donc, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable. $\square$

Exemple 7. *Maintenant, par la proposition précédente on sait que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable. De même, d'après la proposition 9 on sait que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est bijectif avec l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$. Donc, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ est un ensemble non dénombrable.*

Ici, grâce à ces remarques, nous allons montrer que tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont non dénombrables. Pour établir ce fait considérons l'application $X : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \rightarrow [0, 3/2]$ qui associe à chaque fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ la série numérique convergente $X(f) := \sum_{n \geq 0} \frac{f(n)}{3^n} \in [0, 3/2]$.

Noter que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la somme partielle

$$3^n \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f(k)}{3^k} = 3^n f(0) + 3^{n-1} f(1) + \dots + 3 f(n-1) + f(n) \in \mathbb{N}$$

tandis la somme de la série numérique suivante (le reste) :

$$0 \leq 3^n \sum_{k \geq n+1} \frac{f(k)}{3^k} \leq 3^n \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}$$

Ceci démontre que la partie entière du nombre réel $3^n X(f)$ est égale à :

$$[3^n X(f)] = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f(k)}{3^k} = 3^n f(0) + 3^{n-1} f(1) + \cdots + 3f(n-1) + f(n)$$

Ainsi, si pour deux fonctions f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ on a $X(f) = X(g)$ on en déduit que

$$i) [X(f)] = [X(g)] \implies f(0) = g(0);$$

$$ii) [3X(f)] = [3X(g)] \implies 3f(0) + f(1) = 3g(0) + g(1) \implies f(1) = g(1).$$

iii) Par récurrence, on conclut que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = g(n)$. Ce qui entraîne que l'application X est injective.

Par conséquent, comme l'application $X : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \longrightarrow [0, 3/2]$ est injective ; il s'ensuit que l'intervalle $[0, 3/2]$ est non dénombrable. En effet, comme tous les segments $[a, b]$ tel que $b > a$ sont bijectifs avec $[0, 3/2]$ on conclut qu'ils sont non dénombrables. En particulier, on conclut que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Exercice 13. Soit $\{p_1, \dots, p_m\}$ une famille de m -nombres premiers distingués deux à deux.

1) Montrer que la fonction, $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$, est injective sur l'ensemble $\mathbb{N}^m$ dans $\mathbb{N}^*$.

2) En déduire que pour tout entier $m \geq 1$ le produit cartésien $\mathbb{N}^m$ est dénombrable.

Exercice 14. Montrer que dans $\mathbb{R}$, le complémentaire d'une partie dénombrable n'est pas dénombrable. En déduire que le sous-ensemble des nombres irrationnels, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est non dénombrable.

Exercice 15. On désigne par $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} \mid \max(A) = n\}$$

1) Montrer que le cardinal $\text{Card}(\mathcal{F}_n(\mathbb{N})) = 2^n$.

2) Montrer que $\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \cap \mathcal{F}_m(\mathbb{N}) = \emptyset$ si et seulement si $n \neq m$.

3) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$.

4) En déduire que l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ est dénombrable.

Exercice 16. En utilisant le résultat de l'exercice précédent ; démontrer que les deux affirmations suivantes sont vraies :

1) L'ensemble de toutes les parties dénombrables de $\mathbb{N}$ est non dénombrable.

2) Le produit cartésien dénombrable, $\mathbb{N}^\infty$, n'est pas dénombrable.

1.7 Rappels de topologie générale

Pour rendre le Cours de mesure et intégration auto-suffisant nous avons décidé de l'enrichir par un bref rappel sur quelques notions de topologie nécessaire pour le déroulement de la suite du Cours.

1.7.1 Définition et exemples de topologies

Définition 5. On appelle topologie sur un ensemble $\mathbf{E}$ la donnée d'une famille de parties $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ qui contient les sous-ensembles $\emptyset$ et $\mathbf{E}$; et qui soit en plus stable les réunions quelconques et les intersections finies. C'est-à-dire,

$$1. \forall \{O_i; i \in I\} \subseteq \mathcal{T}, \quad \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T};$$

$$2. \forall O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}, \quad O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{T}.$$

Dans la suite, si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est une topologie ; le couple $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ sera appelé espace topologique, les éléments $O \in \mathcal{T}$ s'appelleront des ouverts, et leurs complémentaires $O^c \subseteq \mathbf{E}$ s'appelleront des fermés. La famille des parties fermées dans l'espace topologique $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est donc stable les réunions finies et les intersections quelconques.

Exemple 8. Sur un ensemble non vide $\mathbf{E}$ il y a au moins deux topologies définies par les familles de parties :

$$\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, \mathbf{E}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbf{E})$$

La topologie $\mathcal{T}_0$ s'appelle topologie grossière ; c'est la plus faible de toutes les topologies de $\mathbf{E}$. Tandis que $\mathcal{T}_1$ s'appelle topologie discrète ; c'est la plus fine (riche) de toutes les topologies de $\mathbf{E}$.

Noter alors que pour toute topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{E}$ on a : $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$.

Exemple 9. On considère sur $\mathbb{R}$ les deux familles des parties définies comme suit :

$$\mathcal{T}_c = \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_f = \{]-\infty, a[; a \in \mathbb{R}\}$$

Ces deux familles définissent sur la droite réelle deux topologies appelées respectivement : topologie d'ordre finissant et commençant.

Exemple 10. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour toute partie $A \subset \mathbf{E}$ la famille des intersections :

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap O; O \in \mathcal{T}\}$$

définie une topologie sur la partie A appelée topologie trace.

Exercice 17. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble infini. Montrer que la famille de parties, $\{U \subset \mathbf{E}; U^c \text{ est fini}\}$, est une topologie sur $\mathbf{E}$ dite topologie cofinie.

Définition 6. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle voisinage d'un point x dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ tout sous-ensemble $V \subseteq \mathbf{E}$ qui contient un ouvert $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subseteq V$.

Noter que si pour tout point $x \in \mathbf{E}$ on désigne par $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ l'ensemble de tous les voisinages de x relativement à la topologie $\mathcal{T}$; on vérifie alors que $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est stable par les réunions quelconques et les intersections finis.

De même, noter qu'un ouvert non vide $O \in \mathcal{T}$ est naturellement voisinage de tous ses points ie. : $\forall x \in O \subseteq O$. Inversement, si $A \subseteq \mathbf{E}$ désigne une partie qui est voisinage de tous ses points alors A est un ouvert de la topologie $\mathcal{T}$. Car, pour tout $x \in A$ il existe un ouvert $O_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O_x \subseteq A$, et ainsi, comme la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert il en résulte que $A = \bigcup_{x \in A} O_x \in \mathcal{T}$ est un ouvert.

Définition 7. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ des espaces topologiques et $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ une application.

1. On dira que f est continue au point $x_0 \in \mathbf{E}$ si pour tout voisinage $V_{f(x_0)} \in \mathcal{V}_{f(x_0)}(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ il existe un voisinage $V_{x_0} \in \mathcal{V}_{x_0}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ tel que $f(V_{x_0}) \subseteq V_{f(x_0)}$.
2. On dira que f est continue sur une partie non vide $A \subseteq \mathbf{E}$ si elle est continue en tout point de la partie A .

La proposition suivante est un exercice élémentaire en topologie.

Proposition 14. Pour toute application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur $\mathbf{E}$.

2. Pour tout ouvert $O \in \mathcal{S}$ l'image inverse $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$.
3. Pour tout fermé de $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ l'image inverse $f^{-1}(F)$ est un fermé de $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.

Ci-dessous on donnera d'autres exemples de topologies qui sont très utiles pour le cours de la théorie de la mesure et de l'intégration.

Définition 8. On appelle distance (ou métrique) sur un ensemble non vide, $\mathbf{E}$, toute fonction $d : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

1. **Séparation** : $\forall x, y \in \mathbf{E}, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. **Symétrie** : $\forall x, y \in \mathbf{E}, \quad d(x, y) = d(y, x)$;
3. **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y, z \in \mathbf{E}, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le couple $(\mathbf{E}, d)$ sera appelé espace métrique.

Dans un espace métrique $(\mathbf{E}, d)$ on introduit les mots clefs suivants :

- 1) Le sous-ensemble $B_d(x, r) := \{y \in \mathbf{E}; d(y, x) < r\}$ s'appelle boule ouverte centrée au point $x \in \mathbf{E}$ et de rayon $r > 0$.
- 2) Le sous-ensemble $\overline{B}_d(x, r) := \{y \in \mathbf{E}; d(y, x) \leq r\}$ s'appelle boule fermée centrée au point $x \in \mathbf{E}$ et de rayon $r > 0$.

La proposition suivante est un exercice laissé au soin de l'étudiant :

Proposition 15. Soit $(\mathbf{E}, d)$ un espace métrique. La famille de parties de $\mathbf{E}$ définie par :

$$\mathcal{T}_d := \{U \subseteq \mathbf{E}; \quad (\forall x \in U)(\exists r_x > 0), \quad B_d(x, r_x) \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$$

est une topologie sur l'ensemble $\mathbf{E}$ dite : topologie métrique induite par la distance d sur $\mathbf{E}$.

De la définition de la topologie métrique $\mathcal{T}_d$ on tire les remarques importantes suivantes :

1. Une partie non vide $U \subseteq \mathbf{E}$ est ouverte si et seulement, si elle est égale à une réunion de boule ouvertes i.e : $U = \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, r_i)$.
2. La boule ouverte $B_d(x, r)$ est un ouvert, car pour tout $y \in B_d(x, r)$ on vérifie grâce à l'inégalité triangulaire qu'on a : $B_d(y, \frac{1}{2}(r - d(x, y))) \subset B_d(x, r)$.
3. Pour tout couple, $x \neq y$, d'éléments de $\mathbf{E}$ l'intersection : $B_d(x, \frac{1}{4}d(x, y)) \cap B_d(y, \frac{1}{4}d(x, y)) = \emptyset$.

Suite à la propriété 3) ci-dessus on dira que l'espace topologique $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$ est séparé. De façon générale, un espace topologique $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est dit séparé si pour tout couple de ses éléments, $x \neq y$, il existe des ouverts O_x et O_y tels que $x \in O_x$, $y \in O_y$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Pour enrichir notre liste des exemples d'espaces topologiques on rappelle la notion de normes sur les espaces vectoriels réels.

Définition 9. Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel réel. On appelle norme sur $\mathbf{E}$ la donnée d'une fonction $N : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. **Séparation** : $\forall x \in \mathbf{E}, \quad N(x) = 0 \implies x = 0$;
2. **Homogénéité** : $(\forall x \in \mathbf{E})(\forall \lambda \in \mathbb{R}), \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
3. **Inégalité triangulaire** : $\forall x, y \in \mathbf{E}, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Le couple $(\mathbf{E}, N)$ s'appelle espace vectoriel normé.

Noter que la donnée d'une norme, $N : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$, permet de définir une distance sur $\mathbf{E}$ par l'expression :

$$\forall x, y \in \mathbf{E}, \quad d_N(x, y) := N(x - y)$$

En conséquence, tout espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, N)$ devient un espace métrique $(\mathbf{E}, d_N)$, donc $\mathbf{E}$ possède une topologie métrique $\mathcal{T}_{d_N}$ induite par la norme N . Noter aussi que l'espace topologique obtenu $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_{d_N})$ est séparé.

Exemple 11. Dans tout le Cours de la théorie de la mesure et de l'intégration, on va supposer que l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^m$ est muni par la norme euclidienne donnée par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_m)^2}$$

La distance euclidienne $\mathbb{R}^m$, notée d_2 , qui est induite par la norme euclidienne est donnée par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \quad d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

Pour $m = 1$ la norme euclidienne coïncide avec la valeur absolue $|x|$, donc la distance qui lui est associée est égale à : $|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, la topologie induite sur les espaces vectoriels $\mathbb{R}^m$ par la distance (norme) euclidienne s'appelle : topologie usuelle (ou euclidienne) de $\mathbb{R}^m$.

Exercice 18. Traduire la continuité d'une application $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ dans le cas des espaces métrique et des espaces normés.

Exercice 19. On désigne par $\mathcal{T}_c$ la topologie d'ordre commençant définie ci-dessus, et par $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on désigne l'application identique ie. : $\text{id}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que l'application identique $\text{id} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ est continue.
- 2) L'application identique $\text{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_c) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est-elle continue ?

1.7.2 Topologie à base dénombrables

Définition 10. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble. Une famille de parties $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ s'appelle base de topologie sur $\mathbf{E}$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. La famille $\mathcal{B}$ recouvre l'ensemble $\mathbf{E}$. C'est-à-dire, $\forall x \in \mathbf{E}$ il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$ ou encore

$$\mathbf{E} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

2. $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})(\forall x \in B_1 \cap B_2)(\exists B_3 \in \mathcal{B}), \quad x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Prenons une base de topologie $\mathcal{B}$ sur l'ensemble $\mathbf{E}$ et définissons la famille de parties suivante :

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) := \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B ; \text{ où } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

C'est un exercice facile de vérifier que la famille $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ ainsi définie induit une topologie sur l'ensemble $\mathbf{E}$. La topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ est dite engendrée sur l'ensemble $\mathbf{E}$ par la base $\mathcal{B}$.

Quand, la base de topologie $\mathcal{B}$ est une famille dénombrable, $\mathcal{B} = \{O_n; n \in \mathbb{N}\}$, on dira que la topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ est à base dénombrable.

Proposition 16. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Une famille $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ engendre la topologie $\mathcal{T}$ (ie. base de topologie) si et seulement, si pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}$ il existe une famille de parties $(U_i, i \in I) \subseteq \mathcal{B}$ qui vérifie :

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

En conséquence, si la topologie $\mathcal{T}$ est à base dénombrable alors pour tout ouvert $O \in \mathcal{T}$ il existe une famille au plus dénombrable $I \subseteq \mathbb{N}$ et une sous-famille $\{O_n, n \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ telle que $O = \bigcup_{n \in I} O_n$.

Soit $(\mathbf{E}, d)$ un espace métrique. Rappelons que ci-dessus on a vu que les boules ouvertes $B_d(x, r) \subseteq \mathbf{E}$ ce sont des ouverts de la topologie métrique $\mathcal{T}_d$. De même, on a vu que tout ouvert non vide $U \in \mathcal{T}_d$ est égal à une réunion de boules ouvertes ; ceci montre alors que la famille de boules ouvertes,

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x, r) ; x \in \mathbf{E}, r > 0\} \subseteq \mathcal{T}_d$$

est une base de la topologie métrique $\mathcal{T}_d$.

Pour construire d'autres exemples de topologies ayant des bases dénombrables on va introduire les définitions suivantes :

Définition 11. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Une partie non vide $A \subset \mathbf{E}$ est dite dense dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ si pour tout ouvert non vide $O \in \mathcal{T}$, $A \cap O \neq \emptyset$.
2. Si $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ contient une suite, $\{x_n \in \mathbf{E}; n \in \mathbb{N}\}$, qui est dense on dira que $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est un espace topologique séparable.

Exemple 12. On rappelle que dans les cours d'analyse réelle on démontre que tout nombre réel est une limite d'une suite de nombres rationnels¹. Ceci exprime le fait que le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans l'espace topologique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Suite à cette observation on conclut que les espaces topologiques euclidiens $(\mathbb{R}^m, d_2)$ sont séparables ; car ils contiennent la famille de vecteurs rationnels $\mathbb{Q}^m$ comme partie dense.

La proposition suivante nous donne une large liste d'espaces topologiques à base dénombrable.

Théorème 1. Un espace métrique est séparable si et seulement, si il est à base dénombrable. En conséquence, les espaces vectoriels euclidiens $(\mathbb{R}^m, d_2)$ sont à base dénombrables.

Démonstration. La preuve est un exercice laissé au soin de l'étudiant. Soit $(\mathbf{E}, d)$ un espace métrique.

1) On suppose qu'il existe dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$ une base dénombrable d'ouverts : $\{O_n \subset \mathbf{E}; n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que si on choisit des points $x_n \in O_n$ on obtient ainsi une suite (x_n) partout dense dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$. En déduire que $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$ est séparable.

2) Inversement, on suppose que l'espace métrique $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$ est séparable contenant $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ comme famille dénombrable partout dense. Montrer alors que la famille de boules ouvertes

$$\{B_d(x_n, \frac{1}{m}); m, n \in \mathbb{N}^*\}$$

est une base de la topologie métrique induite sur $\mathbf{E}$ par la distance d . □

Exercice 20. Montrer que la famille d'ouverts $\{]a, b[; a, b \in \mathbb{Q} \text{ avec } a < b\}$ est une base dénombrable de topologie pour $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

1. Par exemple, pour tout $x \in \mathbb{R}$ considérer la suite rationnelle $u_n = \frac{[nx]}{n}$ qui converge vers le réel x ; où $[a] \in \mathbb{Z}$ désigne la partie entière : $[a] \leq a < [a] + 1, \forall a \in \mathbb{R}$.

Exercice 21. Montrer que la famille d'intervalles, $\mathcal{B} = \{[a, b[, a < b\}$, est une base de topologie sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Exercice 22. Montrer que la famille d'intervalles, $\mathcal{B} = \{]a, b] , a < b\}$, est une base de topologie sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

1.7.3 Topologie produit

Etant donné deux espaces topologiques $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ deux espaces topologiques; la famille des produits cartésiens définie comme suit :

$$\mathcal{P} = \{U \times V ; \quad U \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad V \in \mathcal{S}\} = \mathcal{T} \times \mathcal{S}$$

est une base de topologie sur l'ensemble produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$, donc; elle engendre une topologie que l'on appelle topologie produit et elle se note $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$.

Il faut noter que sur l'espace produit cartésien on a l'inclusion canonique stricte :

$$\mathcal{T} \times \mathcal{S} \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$$

Par exemple, si on prend les ouverts $U \in \mathcal{T}$ et $V \in \mathcal{S}$ on voit que la partie :

$$U \times \mathbf{F} \cup \mathbf{E} \times V \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S} \setminus (\mathcal{T} \times \mathcal{S})$$

Plus généralement, si $\{(\mathbf{E}_i, \mathcal{T}_i) ; i \in I\}$ est une famille d'espaces topologiques on vérifie alors que la famille de parties définie comme suit est une base de topologie :

$$\mathcal{P}(I) := \left\{ \prod_{i \in I} U_i ; U_i \in \mathcal{T}_i \text{ avec } U_i = \mathbf{E}_i \text{ sauf pour un nombre fini d'indices} \right\}$$

La topologie engendrée par la base $\mathcal{P}(I)$ sur l'ensemble produit cartésien $\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i$ s'appelle topologie produit notée $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$. Les éléments de la base $\mathcal{P}(I)$ s'appellent ouverts élémentaires.

Il faut souligner que si l'ensemble des indices I est infini il en résulte que la base de topologie $\mathcal{P}(I)$ est strictement incluse dans le produit cartésien des topologie $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$. On aura l'égalité que dans le cas où l'ensemble des indices I est fini.

Exemple 13. 1) Sur les espaces euclidiens $\mathbb{R}^m$ les pavés ouverts $\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[$ forment une base de topologies pour la topologie métrique euclidiennes (topologie usuelle).

2) Si $(\mathbf{E}, d_1)$ et $(\mathbf{F}, d_2)$ sont des espaces métriques alors la famille des parties,

$$\mathcal{B}(d_1, d_2) := \{B_{d_1}(x, r_1) \times B_{d_2}(y, r_2) ; x \in \mathbf{E}, y \in \mathbf{F} \text{ et } r_1 > 0, r_2 > 0\}$$

est une base de topologie sur l'espace produit $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

Proposition 17. Soit $\{(\mathbf{E}_i, \mathcal{T}_i) ; i \in I\}$ est une famille d'espaces topologiques. Alors, on a les affirmations suivantes :

1. Pour tout indice $i \in I$ la i -ème projection canonique $pr_i : (\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i) \rightarrow (\mathbf{E}_i, \mathcal{T}_i)$ est continue et envoie un ouvert sur un ouvert.
2. Une application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est continue si et seulement, si ses composantes $f_i : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{E}_i, \mathcal{T}_i)$ sont continues.

1.7.4 Rappel sur la compacité

Pour finir ce bref rappel sur la topologie on va introduire la notion de compacité qui est très utile en théorie de la mesure et de l'intégration.

Définition 12. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Un sous-ensemble $K \subseteq \mathbf{E}$ est dit compact dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ si pour toute famille d'ouverts, $\{O_i, i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$, telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ il existe un sous-ensemble fini $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ vérifiant $K \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$.

Soit K une partie non vide compacte dans un espace topologique séparé $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$. Fixons un point $y \in K^c$, donc d'après le principe de séparation; pour tout $x \in K$ il existe un couple d'ouverts U_x et $O_y^x \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U_x$, $y \in O_y^x$ et avec $U_x \cap O_y^x = \emptyset$. Ainsi, puisque $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$, donc par compacité de K il existe une famille finie d'ouverts $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ tels que $K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$.

D'autre part, observer que si on prend l'intersection finie, $O_y = O_y^{x_1} \cap \dots \cap O_y^{x_n}$, on obtient un ouvert qui contient le point y et tel que $K \cap O_y = \emptyset$, donc $O_y \subseteq K^c$. Par conséquent, puisque le complémentaire K^c est un ouvert on conclut que la partie compacte K est fermée dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$. D'où :

Proposition 18. Dans un espace topologique séparé, toute partie compacte est fermée.

La compacité est héréditaire pour les parties fermées d'un espace topologique séparé. C'est-à-dire :

Proposition 19. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé, et $K \subseteq \mathbf{E}$ une partie compacte. Alors, toute partie fermée $F \subseteq K$ est compacte dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.

Démonstration. Soit $(O_i, i \in I)$ une famille d'ouverts telle que $F \subseteq \bigcup O_i$. Noter que F^c est un ouvert et que $K \subset F^c \cup \bigcup O_i$, donc par compacité de K ; il existe une famille finie d'ouverts telle que $K \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \cup F^c$. Ainsi, comme $F \subseteq K$ cela entraîne que $F \subseteq O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$. Par conséquent, la partie fermée F est un compact. $\square$

Proposition 20. Dans un espace topologique séparé $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$, une suite décroissante de parties compactes non vides $K_{n+1} \subseteq K_n$ possède une intersection non vide : $\bigcap_{n \geq 0} K_n \neq \emptyset$.

Démonstration. Si on suppose que l'intersection $\bigcap_{n \geq 0} K_n = \emptyset$ on obtiendrait un recouvrement ouvert

$\mathbf{E} = \bigcup_{n \geq 0} (K_n)^c \supseteq K_0$. Donc, par compacité de la partie K_0 il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K_0 \subseteq (K_{n_0})^c$; car la suite des complémentaires $(K_n)^c$ est croissante. Ainsi, puisque $K_{n_0} \subseteq K_0$ il s'ensuit que $K_{n_0} = \emptyset$; ce qui est absurde avec $K_n \neq \emptyset$. Par conséquent, $\bigcap_{n \geq 0} K_n \neq \emptyset$. $\square$

Proposition 21. Tout espace métrique compact est complet.

La preuve de cette proposition est laissée au soin de l'étudiant, elle est donc développée sous forme d'un exercice.

Exercice 23. Soit $(\mathbf{E}, d)$ un espace métrique. On fixe une suite infinie $(x_n) \subset \mathbf{E}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose, $A_n = \{x_p; p \geq n\}$.

1) Montrer que le sous-ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ est un compact non vide.

2) Montrer que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ si et seulement, si il existe une sous-suite extraite $x_{\varphi(n)}$ qui converge² vers x dans $(\mathbf{E}, d)$.

2. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ est le sous-ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) dans $(\mathbf{E}, d)$.

3) En déduire que si l'espace métrique $(\mathbf{E}, d)$ est compact alors toute suite infinie $(x_n) \subset \mathbf{E}$ contient au moins une sous-suite convergente.

4) Montrer que tout espace métrique compact est complet. C'est-à-dire, toute suite de Cauchy converge.

Notons aussi que la compacité se préserve par les images d'applications continues entre espaces topologiques séparés. Plus précisément, on a :

Proposition 22. Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ une application continue. Alors, pour toute partie compacte $K \subseteq \mathbf{E}$ l'image $f(K)$ est compacte dans $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$.

Exercice 24. Démontrer la proposition.

On termine ce rappel sur la compacité par deux théorèmes très efficaces pour reconnaître les ensembles compacts dans certaines espaces métriques.

Théorème 2 (Bolzano-Weierstrass). Soit $(\mathbf{E}, d)$ un espace métrique. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La partie $K \subseteq \mathbf{E}$ est compacte dans $(\mathbf{E}, d)$.
2. De toute suite infinie et bornée³, $(x_n) \subset K$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathbf{E}, d)$ vers un élément de K .

Théorème 3 (Heine-Borél). Une partie $K \subset \mathbb{R}^m$ est compacte dans l'espace métrique euclidien $(\mathbb{R}^m, d_2)$ si et seulement, si elle est bornée et fermée.

Enfin, notons que le produit cartésien est héréditaire pour la compacité. C'est un théorème de Tychonoff qui prouve ce fait.

Théorème 4 (Tychonoff). Soit $(\mathbf{E}_i, \mathcal{T}_i)$ une famille quelconque d'espaces topologiques séparés. Alors, le produit topologique cartésien, $(\prod_{i \in I} \mathbf{E}_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$, est compact si et seulement si tous les $(\mathbf{E}_i, \mathcal{T}_i)$ sont des espaces topologiques compacts.

En particulier, si les $K_i \subseteq \mathbf{E}_i$ sont des parties compactes alors leur produit cartésien $\prod_{i \in I} K_i$ est une partie compacte relativement à la topologie produit $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$.

Exemple 14. Le cube de Hilbert est un ensemble des suites réelles défini par :

$$\mathbb{H} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty; |x_n| \leq \frac{1}{n}\} = \prod_{n \geq 1} [-1/n, 1/n]$$

est une partie compacte dans l'espace produit cartésien $\mathbb{R}^\infty$ où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle induit par la valeur absolue.

3. On rappelle qu'une partie $A \subseteq \mathbf{E}$ est dite bornée dans $(\mathbf{E}, d)$ si il existe $x \in \mathbf{E}$ et $r > 0$ tels que $A \subseteq B_d(x, r)$.

Ensembles et fonctions mesurables

2.1 Familles particulières d'ensembles : Clans et tribus

Définition 13. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, on désigne par $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ l'ensemble des parties de $\mathbf{E}$. Une famille de sous-ensembles $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est dite un **clan** (ou **anneau de Boole**) si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad A \cup B \in \mathcal{C}.$
2. $\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad A \setminus B \in \mathcal{C}.$

Quand, $\mathbf{E} \in \mathcal{C}$ on dira que $\mathcal{C}$ est un **clan unitaire** ou une **algèbre de parties** sur $\mathbf{E}$.

Partant de la définition d'un clan $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ on vérifie qu'on a les propriétés suivantes :

1. L'ensemble vide $\emptyset \in \mathcal{C}$ car pour tout $A \in \mathcal{C}, \quad A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{C}.$
2. $\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{C}.$
3. $\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \in \mathcal{C}.$
4. Si $\mathcal{C}$ est un clan unitaire (algèbre de parties) (i.e $\mathbf{E} \in \mathcal{C}$) alors $\mathcal{C}$ est stable par le passage au complémentaire dans $\mathbf{E}$:

$$\forall A \in \mathcal{C}, \quad A^c = \mathbf{E} \setminus A \in \mathcal{C}$$

Ainsi, suite à ces remarques on conclut que si une famille de parties $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est un clan il s'ensuit que le triplet $(\mathcal{C}, \Delta, \cap)$ est un anneau dans lequel la lois additive est Δ et la loi multiplicative est $\cap$. Notons également que les lois Δ et $\cap$ vérifient sur $\mathcal{C}$ les expressions algébriques suivantes¹ :

$$\forall x \in \mathcal{C}, \quad x \Delta x = \emptyset \quad \text{et} \quad x \cap x = x$$

Définition 14. On appelle **σ -clan** tout clan $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ qui est stable par les réunions dénombrables. C'est-à-dire, si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ alors la réunion dénombrable $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{C}.$

Un σ -clan unitaire $\mathcal{C}$ (i.e $\mathbf{E} \in \mathcal{C}$) s'appelle **σ -algèbre de parties** (ou une **tribu**) sur $\mathbf{E}$.

1. Tout anneau commutatif $(A, +, \times)$ dont les éléments vérifient les équations :

$$\forall x \in A, \quad x + x = 0 \quad \text{et} \quad x \times x = x$$

s'appelle anneau booléen. Par exemple, $(\mathbb{Z}_2, +, \times)$ est un anneau booléen; il est contenu dans tous les anneaux booléens ayant au moins deux éléments. En effet, un anneau de Boole $(A, +, \times)$ est un $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel dont la multiplication externe est définie par : $\forall x \in A, 0 \cdot x = 0$ et $1 \cdot x = x$. En conséquence, si l'anneau A est fini son cardinal est une puissance de deux, car $A \simeq (\mathbb{Z}_2)^m$ en tant que $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel de dimension m .

Notons que d'après sa définition, une σ -algèbre (tribu) $\mathcal{C}$ est stable par le passage au complémentaire et par les réunions dénombrables, donc elle est aussi stable par les intersections dénombrables. Car, si $A_n \in \mathcal{C}$ une suite de parties on aura :

$$\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n \right)^c = \bigcup_{n \geq 0} A_n^c \in \mathcal{C} \implies \bigcap_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{C}$$

Actuellement, comme les σ -algèbres (tribus) sont stables par les réunions et les intersections dénombrables, elles sont donc stables par passage à la limite inf et à la limite sup ie. :

$$\forall (A_n) \subset \mathcal{C} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p \in \mathcal{C}$$

Exemple 15. 1) L'ensemble de toutes les parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est une σ -algèbre (une tribu)

2) La paire $\{\emptyset, \mathbf{E}\}$ est une algèbre contenue dans toutes les algèbres de parties sur $\mathbf{E}$.

3) Pour toute partie propre non vide $A \subset \mathbf{E}$ la paire $\{\emptyset, A\}$ est un clan sur $\mathbf{E}$ qui n'est pas une algèbre.

4) Pour toute partie propre non vide $A \subset \mathbf{E}$ la famille de sous-ensembles $\{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\}$ est une algèbre.

5) La famille de parties, $\mathcal{F}(\mathbb{N}) := \{A \subset \mathbb{N} / A \text{ est finie}\}$, est un clan non unitaire ; car $\mathbb{N} \notin \mathcal{F}(\mathbb{N})$.

6) La famille de parties, $\mathcal{F}'(\mathbb{N}) := \{A \subset \mathbb{N} / A \text{ ou } A^c \text{ est finie}\}$, est une algèbre mais ce n'est pas une σ -algèbre. En effet, si on prend la suite de parties $A_n = \{1, 3, \dots, 2n+1\} \in \mathcal{F}'(\mathbb{N})$ on voit que la réunion $\bigcup_{n \geq 0} A_n = 2\mathbb{N} + 1 \notin \mathcal{F}'(\mathbb{N})$ car son complémentaire est l'ensemble des nombres paires $2\mathbb{N}$ qui est infini.

Exercice 25. Étant donné un clan de parties $\mathcal{C}$ sur un ensemble $\mathbf{E}$, on pose :

$$\mathcal{A} := \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^c = \mathcal{C} \cup \{\mathbf{E} \setminus A; A \in \mathcal{C}\}$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur $\mathbf{E}$.

2.1.1 Opérations ensemblistes sur les clans et les tribus

Proposition 23 (Trace sur une partie). Soit $\mathcal{C}$ un clan (resp. algèbre ou σ -algèbre) sur $\mathbf{E}$. Alors, pour toute partie $A \subset \mathbf{E}$ la famille de parties définie par, $\mathcal{C}_A := \{A \cap X; X \in \mathcal{C}\}$, est un clan (resp. algèbre ou σ -algèbre) sur A appelée clan (resp. algèbre ou σ -algèbre) trace.

Démonstration. En effet, pour toutes les parties X et $Y \in \mathcal{C}$ on a :

$$(A \cap X) \cup (A \cap Y) = A \cap (X \cup Y) \in \mathcal{C}_A$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} (A \cap X) \setminus (A \cap Y) &= (A \cap X) \cap (A \cap Y)^c \\ &= (A \cap X) \cap (A^c \cup Y^c) \\ &= A \cap X \cap Y^c \\ &= A \cap (X \setminus Y) \in \mathcal{C}_A \end{aligned}$$

Noter que si $\mathbf{E} \in \mathcal{C}$ on aura $A = A \cap \mathbf{E} \in \mathcal{C}_A$, donc $\mathcal{C}_A$ est une algèbre. De plus, si $\mathcal{C}$ est stable par les réunions dénombrables on aura pour toute suite de parties, $(A_n) \subset \mathcal{C}$:

$$\bigcup A_n \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \bigcup (A \cap A_n) = A \cap \left(\bigcup A_n \right) \in \mathcal{C}_A$$

Par conséquent, si $\mathcal{C}$ est une σ -algèbre il en est de même pour $\mathcal{C}_A$. □

La proposition suivante généralise le résultat de la précédente.

Proposition 24 (Image inverse). Soient $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application et $\mathcal{C}$ un clan de parties sur $\mathbf{F}$. Alors, la famille de parties de $\mathbf{E}$ définies par :

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(A) \subseteq \mathbf{E}; \quad A \in \mathcal{C}\}$$

est un clan de parties sur $\mathbf{E}$. Si en plus, $\mathcal{C}$ est une algèbre (resp. σ -algèbre) sur $\mathbf{F}$ alors son image inverse, $f^{-1}(\mathcal{C})$, est aussi une algèbre (resp. σ -algèbre) sur $\mathbf{E}$.

Démonstration. Observer que l'image inverse vérifie les propriétés : $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(\cup A_n) = \cup f^{-1}(A_n)$. $\square$

Proposition 25 (Image directe). Soient $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application et $\mathcal{C}$ un clan de parties sur $\mathbf{E}$. Alors, la famille de parties de $\mathbf{F}$ définies par :

$$f_*(\mathcal{C}) := \{A \subseteq \mathbf{F}; \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{C}\}$$

est un clan de parties sur $\mathbf{F}$; appelée clan image directe par f du clan $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est une algèbre (resp. σ -algèbre) sur $\mathbf{E}$ alors il en est de même pour l'image directe $f_*(\mathcal{C})$.

Exercice 26. Démontrer la proposition de l'image directe.

Exercice 27. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble muni d'un clan $\mathcal{T}$. Pour une partie fixée $A \in \mathcal{T}$ on pose :

$$\mathcal{T}'_A := \{B \in \mathcal{T}; B \subseteq A\}$$

- 1) Montrer que $\mathcal{T}'_A$ est un clan sur la partie A .
- 2) Vérifier que le clan $\mathcal{T}'_A$ est égal au clan des traces $\mathcal{T}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{T}\}$.
- 3) Montrer que les affirmations 1) et 2) restent valables pour les algèbres et les σ -algèbres sur $\mathbf{E}$.

Exercice 28. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble muni d'un clan (resp. algèbre ou σ -algèbre) $\mathcal{C}$. Si pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on désigne par $\text{in} : A \hookrightarrow \mathbf{E}$ l'injection canonique (ie. $x \in A \mapsto x \in \mathbf{E}$), alors; le clan (resp. algèbre ou σ -algèbre) image inverse $\text{in}^{-1}(\mathcal{C})$ coïncide avec la trace $\mathcal{C}_A = \{A \cap B; \forall B \in \mathcal{C}\}$.

Exercice 29. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble et $A_0 \subset \mathbf{E}$ une partie non vide fixée. Montrer que la famille de parties,

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbf{E}; A_0 \subseteq A \quad \text{ou} \quad A \subseteq A_0^c\}$$

est une algèbre sur $\mathbf{E}$. Est-elle une σ -algèbre ?

Exercice 30. Soient $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application et $\mathcal{C}$ un clan de parties sur $\mathbf{E}$. Montrer que la famille de parties, $f(\mathcal{C}) := \{f(A); A \in \mathcal{C}\}$, n'est pas en général un clan sur $\mathbf{F}$. Justifier votre réponse.

Exercice 31. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de l'ensemble $\mathbf{E}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ -algèbre (tribu) sur $\mathbf{E}$ si et seulement, si $\mathcal{A}$ est stable les réunions dénombrables des suites croissantes de parties de $\mathbf{E}$.
- 2) Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ -algèbre (tribu) sur $\mathbf{E}$ si et seulement, si $\mathcal{A}$ est stable les réunions disjointes dénombrables des suites de parties de $\mathbf{E}$.

Exercice 32. On appelle cylindre vertical dans $\mathbb{R}^3$ toute partie non vide $C \subseteq \mathbb{R}^3$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y, z) \in C \quad \implies \quad \forall z' \in \mathbb{R}, (x, y, z') \in C$$

- 1) L'application $\text{pr}_{1,2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ désigne la projection verticale définie par $\text{pr}_{1,2}(x, y, z) = (x, y)$. Montrer qu'une partie $C \subseteq \mathbb{R}^3$ constitue un cylindre vertical si et seulement, si il existe une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que $C = \text{pr}_{1,2}^{-1}(A)$.
- 2) En déduire que la famille de tous les cylindres verticaux de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{C}_{\text{yl}}(\mathbb{R}^3)$, est une σ -algèbre.

2.1.2 L'engendrement des clans et des tribus

Proposition 26. Si $\{\mathcal{C}_i; i \in I\}$ est une famille de clans (resp. algèbres ou σ -algèbres) sur un ensemble $\mathbf{E}$ alors l'intersection, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$, est un clan (resp. une algèbre ou σ -algèbre) sur $\mathbf{E}$.

Démonstration. D'abord, noter que l'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est non vide ; car $\emptyset \in \mathcal{C}_i, \forall i \in I$.

Soient A et $B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Donc, pour tout indice $i \in I$ les parties A et $B \in \mathcal{C}_i$. Ainsi, comme les $\mathcal{C}_i$ sont des clans on aura :

$$\forall i \in I, A \cup B \in \mathcal{C}_i \quad \text{et} \quad A \setminus B \in \mathcal{C}_i \quad \implies \quad A \cup B, A \setminus B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$$

Par conséquent, l'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est un clan sur $\mathbf{E}$.

Le fait que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est une algèbre (resp. une σ -algèbre) lorsque les $\mathcal{C}_i$ le sont est évidente. $\square$

Définition 15. Soit $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille non vide de parties de $\mathbf{E}$. L'intersection de tous les clans (resp. toutes les algèbres, σ -algèbres) qui contiennent la famille Ω s'appelle clan (resp. algèbre, σ -algèbre) engendré(e) sur $\mathbf{E}$ par la famille de parties Ω .

Dans la suite du chapitre, étant donnée une famille de parties $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ on va adopter les notations suivantes :

1. Le clan engendré par Ω sera noté : $\mathcal{C}(\Omega) = \bigcap_{\substack{\Omega \subseteq \mathcal{C} \\ \mathcal{C} \text{ clan}}} \mathcal{C}$.
2. L'algèbre engendrée par Ω sera notée : $\mathcal{A}(\Omega) = \bigcap_{\substack{\Omega \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \text{ algèbre}}} \mathcal{A}$.
3. La σ -algèbre (tribu) engendrée par Ω sera notée : $\sigma(\Omega) = \bigcap_{\substack{\Omega \subseteq \mathcal{T} \\ \mathcal{T} \text{ tribu}}} \mathcal{T}$.

Proposition 27. Soit $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille de parties. Alors, on a les affirmations suivantes :

1. Si un clan $\mathcal{C}$ sur $\mathbf{E}$ contient Ω (i.e $\Omega \subseteq \mathcal{C}$) alors $\Omega \subseteq \mathcal{C}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}$.
2. Si une algèbre $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{E}$ contient Ω (i.e $\Omega \subseteq \mathcal{A}$) alors $\Omega \subseteq \mathcal{A}(\Omega) \subseteq \mathcal{A}$.
3. Si une σ -algèbre $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{E}$ contient Ω (i.e $\Omega \subseteq \mathcal{T}$) alors $\Omega \subseteq \sigma(\Omega) \subseteq \mathcal{T}$.

Autrement dit, relativement à l'inclusion ensembliste, le clan (resp. algèbre, σ -algèbre) engendré(e) par la famille Ω est le plus petit(e) clan (resp. algèbre, σ -algèbre) qui contient la famille Ω .

Démonstration. 1) Noter que d'après la proposition précédente l'intersection $\mathcal{C}(\Omega)$ est un clan. D'autre part, pour tout clan $\mathcal{C}$ qui contient Ω (i.e $\Omega \subseteq \mathcal{C}$) on aura par définition de l'intersection $\Omega \subseteq \mathcal{C}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}$.

Les affirmations 2) et 3) se démontrent avec les mêmes arguments. $\square$

Exemple 16. 1) Soit $A \subseteq \mathbf{E}$ une partie. Alors, $\{\emptyset, A\}$ est le clan engendré par le singleton $\{A\}$ sur $\mathbf{E}$. De même, la famille $\{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\}$ est l'algèbre engendrée sur $\mathbf{E}$ par le singleton $\{A\}$.

2) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un ensemble infini non nécessairement dénombrable. Alors, on a les affirmations suivantes :

i) Le clan engendré sur I par la famille des singletons, $\Omega = \{\{x\}, x \in I\}$, coïncide avec l'ensemble de toutes les parties finies de I ,

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{J \subset I; \quad J \text{ est fini}\}$$

ii) L'algèbre engendrée sur I par la famille des singletons, $\Omega = \{\{x\}, x \in I\}$, coïncide avec l'ensemble de toutes les parties de I qui sont soit finies ou ayant un complémentaire fini,

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{J \subset I; \quad J \text{ ou } J^c \text{ est fini} \}$$

iii) La σ -algèbre (tribu) engendrée par la famille des singletons, $\{\{x\}, x \in I\}$, coïncide avec le sous-ensemble des parties au plus dénombrables ou ayant complémentaire au plus dénombrable,

$$\sigma(\Omega) = \{J \subseteq I; \quad J \text{ ou } J^c \text{ est au plus dénombrable} \}$$

iv) Si l'ensemble I est dénombrable, dans ce cas ; la σ -algèbre engendrée coïncide avec l'ensemble de parties de I : $\sigma(\Omega) = \mathcal{P}(I)$.

Exercice 33. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble. On rappelle qu'une famille de sous-ensembles $\{A_i; i \in I\}$ forme une partition de $\mathbf{E}$ lorsque $\mathbf{E} = \bigcup_{i \in I} A_i$ et si pour tout couple d'indices $i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.

1) Montrer qu'une partition $(A_i; i \in I)$ de $\mathbf{E}$ engendre une algèbre égale à la famille de sous-ensembles : $\mathcal{A}(I) = \{\bigcup_{j \in J} A_j \text{ avec } J \subset I \text{ est fini ou } J^c \text{ est fini}\}$.

2) Décrire la σ -algèbre $\sigma(I)$ engendrée par la partition $(A_i; i \in I)$ de $\mathbf{E}$.

Exercice 34. Soit $(\mathcal{C}_n)$ une suite croissante de clans (resp. d'algèbres) sur l'ensemble $\mathbf{E}$ (ie. $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}_{n+1}$). Montrer que la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ est un clan (resp. algèbre).

Exercice 35. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble muni de deux tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

1) Donner un exemple où la réunion $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ n'est pas une tribu. Que peut-on dire de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$?

2) On considère les trois familles de parties de $\mathbf{E}$ définies comme suit :

$$\Omega_1 = \{A \cup B; A \in \mathcal{T}_1 \text{ et } B \in \mathcal{T}_2\}, \quad \Omega_2 = \{A \cap B; A \in \mathcal{T}_1 \text{ et } B \in \mathcal{T}_2\}, \quad \Omega_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$$

Comparer les trois tribus engendrées $\sigma(\Omega_1)$, $\sigma(\Omega_2)$ et $\sigma(\Omega_3)$.

Exercice 36 (L'adjonction d'une partie). Etant donné un ensemble $\mathbf{E}$ muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et une partie $A \notin \mathcal{T}$; on leur associe la famille de parties de $\mathbf{E}$ définie par :

$$\mathcal{T}(A) := \{(A \cap B) \cup (C \setminus A); \forall B, C \in \mathcal{T}\}$$

1) Montrer que $\mathcal{T}(A)$ est une tribu sur $\mathbf{E}$.

2) Montrer que la tribu engendrée : $\sigma(\mathcal{T} \cup \{A\}) = \mathcal{T}(A)$.

La proposition suivante nous donnera une idée approximative sur la forme des parties appartenant à un clan engendré par une famille de parties $\Omega \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$.

Proposition 28. Soient $\mathbf{E}$ un ensemble et $\Omega \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille non vide de parties. Alors, pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ élément du clan engendré $\mathcal{C}(\Omega)$ il existe une famille finie de parties $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ telles que $A \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Démonstration. On désigne par $\mathcal{C}'(\Omega)$ l'ensemble des parties de $\mathbf{E}$ constitué par les parties $A \subseteq \mathbf{E}$ contenues dans une réunion finie d'éléments de Ω i.e :

$$A \in \mathcal{C}'(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists A_1, \dots, A_n \in \Omega, \quad A \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$$

D'abord, noter que pour toute partie $A \in \Omega$ on a, $A \subseteq A$; donc $\Omega \subset \mathcal{C}'(\Omega)$. Montrons alors que la famille de parties $\mathcal{C}'(\Omega)$ est un clan sur $\mathbf{E}$.

En effet, si A et $B \in \mathcal{C}'(\Omega)$ il existe deux familles finies $A_1, \dots, A_n$ et $B_1, \dots, B_m$ d'éléments de Ω telles que

$$A \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{et} \quad B \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_m \implies A \cup B \subseteq (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup (B_1 \cup \dots \cup B_m)$$

Donc, $A \cup B \in \mathcal{C}'(\Omega)$. De même, puisque la différence

$$A \setminus B \subseteq A \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \implies A \setminus B \in \mathcal{C}'(\Omega)$$

Par conséquent, la famille de parties $\mathcal{C}'(\Omega)$ est un clan.

Ainsi, comme la famille génératrice $\Omega \subseteq \mathcal{C}'(\Omega)$ il s'ensuit que le clan engendré $\mathcal{C}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}'(\Omega)$. Par conséquent, chaque partie $A \in \mathcal{C}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}'(\Omega)$ est contenue dans une réunion finie d'éléments de Ω . $\square$

Corollaire 1. Soient $\mathbf{E}$ un ensemble et $\Omega \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille de parties. S'il existe une famille au plus dénombrable $(\Omega_n) \subseteq \Omega$ telle que $\mathbf{E} = \bigcup_{n \geq 0} \Omega_n$, alors pour toute partie A élément du σ -algèbre (tribu) engendrée, $\sigma(\Omega)$, il existe une famille au plus dénombrable de parties $A_n \in \Omega$ telles que $A \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n$.

Ci-dessous, on donnera la définition des semi-anneaux au sens de Boole pour lesquelles on sera en mesure de décrire complètement la forme générale des parties des clans qu'ils engendrent.

Définition 16. On appelle semi-anneau toute famille de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.
2. Pour tout couple de parties A et $B \in \mathcal{A}$ il existe une famille finie de parties disjointes deux à deux, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ telle que $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Un semi-anneau $\mathcal{A}$ est dite unitaire lorsque l'ensemble $\mathbf{E} \in \mathcal{A}$.

Proposition 29. Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ un semi-anneau. Alors, le clan engendré $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est égal à la famille des réunions finies d'éléments de $\mathcal{A}$ qui sont disjointes deux à deux. C'est-à-dire, pour tout $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ il existe une famille finie, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ telle que :

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{avec} \quad \forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

Démonstration. Désignons par $\mathcal{C}'(\mathcal{A})$ la famille des parties de $\mathbf{E}$ constituées par les réunions finies d'éléments du semi-anneau $\mathcal{A}$ qui sont disjointes. Noter que le semi-anneau $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}'(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$, donc si on démontre que $\mathcal{C}'(\mathcal{A})$ est un clan on aura l'égalité $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}'(\mathcal{A})$.

Considérons deux parties A et $B \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$. Donc, il existe deux familles disjointes deux à deux $A_1, \dots, A_n$ et $B_1, \dots, B_m$ telles que $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ et $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$.

1) **Stabilité par l'intersection :** Noter que par la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion on obtient :

$$A \cap B = (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \dots \cup B_m) = \bigcup_{i=1, j=1}^{i=n, j=m} A_i \cap B_j$$

Ainsi, comme les $A_i \cap B_j \in \mathcal{A}$ (semi-anneau) sont disjointes deux à deux on conclut que $A \cap B \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$.

2) **Stabilité par la différence** : La différence des parties A et B est égale à :

$$\begin{aligned}
 A \setminus B &= (A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap (B_1 \cup \dots \cup B_m)^c \\
 &= \bigcup_{i=1}^{i=n} [A_i \cap (B_1 \cup \dots \cup B_m)^c] \\
 &= \bigcup_{i=1}^{i=n} [A_i \cap (B_1^c \cap \dots \cap B_m^c)] \\
 &= \bigcup_{i=1}^{i=n} \bigcap_{j=1}^{j=m} (A_i \setminus B_j)
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\mathcal{A}$ est un semi-anneau on en déduit que $A_i \setminus B_j$ est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{A}$, et par suite $A_i \setminus B_j \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$. De même, puisque $\mathcal{C}'(\mathcal{A})$ est stable les intersections on en déduit

que les parties $C_i = \bigcap_{j=1}^{j=m} (A_i \setminus B_j) \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$. En effet, puisque les parties C_i sont disjointes deux à deux il en résulte que la différence $A \setminus B = C_1 \cup \dots \cup C_n \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$.

3) **Stabilité par réunion** : Ecrivons $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Ainsi, comme $A \setminus B \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$, $B \setminus A \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$ et $A \cap B \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$ alors la réunion disjointe $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B \in \mathcal{C}'(\mathcal{A})$.

4) Enfin, puisque le clan $\mathcal{C}'(\mathcal{A})$ est contenu dans le clan $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ et contient le semi-anneau $\mathcal{A}$ cela entraîne qu'on a l'égalité : $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}'(\mathcal{A})$. $\square$

Exemple 17. Ici, on donnera quelques exemples de semi-anneaux utiles pour la suite du Cours.

1) La famille des intervalles $I_d = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a \leq b\}$ est un semi-anneau sur $\mathbb{R}$, donc elle engendre un clan dont les éléments sont soit des intervalles de type $[a, b]$ ou des réunions finies disjointes de type $[a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$ avec $b_i \leq a_{i+1}, \forall i = 1, \dots, n-1$.

2) De même, la famille des intervalles $I_g = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a \leq b\}$ est un semi-anneau de $\mathbb{R}$ qui engendre un clan dont les éléments s'écrivent comme réunion finie disjointe d'éléments de I_g .

3) En revanche, la famille des intervalles ouverts $I_o = \{]a, b[; a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a \leq b\}$ n'est pas un semi-anneau, car par exemple, pour tout réel $a > 0$ les intervalles $]a, 3a[$ et $]a, 2a[\in I_o$ mais leur différence $]a, 3a[\setminus]a, 2a[= [2a, 3a[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$; donc on ne peut pas l'écrire comme une union finie d'intervalles ouverts.

4) En dimension $m \geq 2$, la famille P_d (resp. P_g) des pavés de $\mathbb{R}^m$ de type

$$\prod_{i=1}^{i=m} [a_i, b_i[\quad \text{resp.} \quad \prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i]$$

sont des semi-anneaux sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, donc elles engendrent des clans dont les éléments s'écrivent comme réunion finie disjointe d'éléments de P_d (resp. I_g).

5) De même, la famille des intervalles ouverts de type $J_o = \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un semi-anneau, car par exemple, $\forall a > 0,]a, +\infty[$ et $]2a, +\infty[\in J_o$ mais la différence $]a, +\infty[\setminus]2a, +\infty[=]a, 2a[$ est une partie bornée; donc on ne peut pas l'écrire comme union disjointe d'éléments de la famille J_o .

Remarque 2 (Mise en garde). Le résultat de la proposition précédente n'est pas valable pour les σ -algèbres (tribus) engendrées par les semi-anneaux. C'est-à-dire, on ne peut pas conclure que les éléments d'une σ -algèbre (tribu) qui est engendrée par un semi-anneau peuvent se décomposer en une réunion dénombrable disjointe formée par les éléments du semi-anneau génératrice.

Un contre exemple est fourni par la σ -algèbre (tribu) engendrée par les intervalles du semi-anneau, $I_d = \{[a, b]; \forall a, b \in \mathbb{Q} \text{ avec } a \leq b\}$. Noter alors que la tribu engendrée $\sigma(I_d)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$i) \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n[\in \sigma(I_d).$$

$$ii) \forall r \in \mathbb{Q}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [r, r + \frac{1}{n}[= \{r\} \in \sigma(I_d) \implies \mathbb{Q} \in \sigma(I_d).$$

iii) Le sous-ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \sigma(I_d)$, mais ; on ne peut l'écrire comme une réunion dénombrable disjointe d'intervalles de $\mathbb{R}$ de type $[a_n, b_n[$ avec $b_n < a_{n+1}$ car entre les nombres rationnels b_n et a_{n+1} il y a toujours des nombres irrationnels.

Exercice 37. D'écrire les éléments des algèbres engendrées par les familles d'intervalles

$$I_d = \{[a, b[\subseteq [0, 1[; a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b\} \quad \text{et} \quad I_g = \{]a, b] \subseteq]0, 1]; a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b\}$$

2.1.3 Produit cartésien des clans et des tribus

Pour commencer considérons deux ensembles $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$. Puis, fixons deux parties propres non vides $A \subset \mathbf{E}$ et $B \subset \mathbf{F}$; ceci nous donne alors deux algèbres de parties sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ définies respectivement par : $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\}$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \mathbf{F}\}$. Le produit cartésien de ces algèbres est formé par les parties :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{\emptyset, A \times B, A \times B^c, A \times \mathbf{F}, A^c \times B, A^c \times B^c, A^c \times \mathbf{F}, \mathbf{E} \times B, \mathbf{E} \times B^c, \mathbf{E} \times \mathbf{F}\}$$

Noter alors que le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ n'est pas un clan, car la réunion $(A \times B) \cup (A^c \times B^c)$ n'y appartient pas. Par conséquent, le produit cartésien des clans, des algèbres ou des σ -algèbres n'est pas en général un clan.

La proposition suivante montre que la classe des semi-anneaux est stable par le produit cartésien.

Proposition 30. Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ des ensembles munis par des semi-anneaux notés respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Alors, la famille des produits cartésiens des éléments de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définie par :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{A \times B \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F}; \quad A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}\}$$

est un semi-anneau sur l'ensemble $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

Démonstration. Soient $A \times B$ et $C \times D \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, noter que par définition de l'intersection de deux parties on obtient $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, car $A \cap C \in \mathcal{A}$ et $B \cap D \in \mathcal{B}$. Donc, le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est stable par l'intersection.

De même, par définition de la différence de deux sous-ensembles on peut écrire :

$$\begin{aligned} (A \times B) \setminus (C \times D) &= (A \times B) \cap (C \times D)^c \\ &= (A \times B) \cap [(C^c \times D) \cup (C \times D^c)] \\ &= [(A \times B) \cap (C^c \times D)] \cup [(A \times B) \cap (C \times D^c)] \\ &= [(A \setminus C) \times (B \cap D)] \cup [(A \cap C) \times B \setminus D] \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des semi-anneaux il existe des familles de parties disjointes deux à deux $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ et $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ telles que $A \setminus C = A_1 \cup \dots \cup A_m$ et $B \setminus D = B_1 \cup \dots \cup B_n$, ceci permet alors de déduire que la différence des produits cartésiens développés ci-dessus s'écrit comme réunion de parties disjointes de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$:

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \left[\bigcup_{i=1}^{i=m} [A_i \times (B \cap D)] \right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{i=n} [(A \cap C) \times B_i] \right]$$

Par conséquent, le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est un semi-anneau. $\square$

Définition 17. Soit $\mathcal{A}$ un clan (resp. algèbre, σ -algèbre) sur l'ensemble $\mathbf{E}$, et soit $\mathcal{B}$ un clan (resp. algèbre, σ -algèbre) sur l'ensemble $\mathbf{F}$. Le clan (resp. algèbre, σ -algèbre) engendré par le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ s'appelle produit tensoriel des clans (resp. algèbre, σ -algèbre) de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur le produit $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$; il se note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (lire : $\mathcal{A}$ produit tensoriel avec $\mathcal{B}$).

La proposition suivante nous donne un exemple de σ -algèbre qui contient le produit cartésien de deux σ -algèbres données sur un produit catrésien d'ensembles non vides.

Proposition 31. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des σ -algèbres sur les ensembles $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ respectivement. Pour toute partie $A \subset \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ et pour tout élément $(x, y) \in A$ on définit les sections verticale (resp. horizontale) passant par le point $(x, y) \in A$ par :

$$A(x, -) := \{b \in \mathbf{F} ; (x, b) \in A\} \quad \text{resp.} \quad A(-, y) := \{a \in \mathbf{E} ; (a, y) \in A\}$$

Alors, la famille de parties du produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ définie par :

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \{A \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{F} ; \forall (x, y) \in A, A(x, -) \in \mathcal{B} \text{ et } A(-, y) \in \mathcal{A}\}$$

est une σ -algèbre sur $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ qui contient la σ -algèbre produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. En conséquence, pour toute partie non vide $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et pour tout $(x, y) \in A$ les sections $A(x, -) \in \mathcal{B}$ et $A(-, y) \in \mathcal{A}$.

Démonstration. 1) La famille $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est stable par les réunions dénombrables. C'est-à-dire, pour toute suite de parties $(A_n) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et pour tout couple d'éléments $(x, y) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on a :

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)(x, -) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n(x, -) \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)(-, y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n(-, y) \in \mathcal{A}$$

De même, pour tout couple de parties A et $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ on vérifie que pour tout $(x, y) \in A \setminus B$ on a les sections ensemblistes :

$$(A \setminus B)(x, -) = A(x, -) \setminus B(x, -) \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad (A \setminus B)(-, y) = A(-, y) \setminus B(-, y) \in \mathcal{A}$$

Ainsi, comme le produit $\mathbf{E} \times \mathbf{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ on conclut alors que la famille de parties $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est une σ -algèbre sur le produit $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

2) Le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est inclus dans la σ -algèbre $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, car ; pour toutes les parties $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ et pour tout $(x, y) \in A \times B$ on a les sections

$$\begin{cases} (A \times B)(x, -) = B \\ (A \times B)(-, y) = A \end{cases} \implies A \times B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \implies \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

Par conséquent, la tribu produit tensoriel engendrée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. □

Exercice 38. Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ des ensembles munis respectivement par les tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$. Montrer que la famille $\mathcal{R}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \subset \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ des réunions finies disjointes de rectangles $A \times B$ avec $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{S}$ est une algèbre sur $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

Exercice 39. On se propose de démontrer que l'inclusion des tribus, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, est en général stricte. Pour cela considérons la tribu sur $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{D}$, engendré par les parties de $\mathbb{R}$ qui sont au plus dénombrables.

- 1) Montrer que la tribu $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) / A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$.
- 2) Montrer que l'application diagonale, $\delta(x) = (x, x), \forall x \in \mathbb{R}$, est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ dans l'espace produit $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D} \otimes \mathcal{D})$.
- 3) Vérifier que toutes les sections horizontales et verticales du sous-ensemble $\delta([0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ appartiennent à la tribu $\mathcal{D}$. En revanche, $\delta([0, 1])$ n'appartient pas à la tribu produit tensoriel $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$.
- 4) Conclure.

2.1.4 Les classes monotones (facultative)

Dans ce paragraphe, on va introduire les classes monotones qui sont intimement liées aux σ -algèbres.

Définition 18. On appelle classe monotone sur un ensemble $\mathbf{E}$ toute famille de parties $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. Si $A_n \subseteq A_{n+1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{M}$.
2. Si $B_{n+1} \subseteq B_n$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{M}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \bigcap_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{M}$.

Il est clair que toute σ -algèbre est une classe monotone ; la réciproque n'est pas vraie. En effet, si on considère la famille de parties

$$\mathcal{M} := \{D \subset \mathbb{R}; D \text{ est dénombrable} \}$$

on obtient une classe monotone qui n'est pas stable par passage au complémentaire et ne contient pas $\mathbb{R}$; donc $\mathcal{M}$ est ni algèbre ni σ -algèbre.

Les propositions suivantes sont faciles à démontrer leurs preuves sont laissées pour le soin de l'étudiant.

Proposition 32. Pour qu'un clan (resp. une algèbre) de parties soit un σ -clan (resp. σ -algèbre) il faut et il suffit qu'elle soit une classe monotone.

Démonstration. Les σ -clans et les σ -algèbres sont des classes monotones. Inversement, si par exemple $\mathcal{C}$ est un clan qui est également une classe monotone on aura pour toute suite $A_n \in \mathcal{C}$:

$$B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n \subseteq B_{n+1} \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{n \geq 0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{C}$$

Donc, $\mathcal{C}$ est un σ -clan sur $\mathbf{E}$. □

Proposition 33. L'intersection quelconque de classes monotones est une classe monotone.

Définition 19. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille de parties. L'intersection de toutes les classes monotones qui contiennent la famille $\mathcal{A}$ est une classe monotone dite engendrée par $\mathcal{A}$; on la désigne par : $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille de parties. Noter alors que par définition des classes monotones et des σ -algèbres engendrées par une famille de parties on voit qu'on a les inclusions :

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

La proposition suivante donne une condition suffisante pour avoir l'égalité $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Proposition 34 (Lemme fondamental des classes monotones). Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties sur un ensemble non vide $\mathbf{E}$. Alors, la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ coïncident ie. :

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

Démonstration. La preuve développée ici est inspirée du livre de Paul Halmos (Measure Theory 1979).

Puisque les σ -algèbres sont des classes monotones, donc on aura l'inclusion $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Pour montrer qu'on a aussi l'inclusion dans l'autre sens, $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$, nous allons montrer que la classe monotone engendrée $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une algèbre, c'est-à-dire, qu'elle est stable par le passage aux complémentaires et aussi stable les intersections finies.

1) Considérons la famille de parties, $\mathcal{M}_1(\mathcal{A}) := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}); A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Noter que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathcal{A})$ car $\mathcal{A}$ est une algèbre inclus dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. D'autre part, observer que si on considère une famille croissante $(A_n) \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{A})$, alors sa réunion $A = \bigcup A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ (classe monotone). De même, par définition de la famille $\mathcal{M}_1(\mathcal{A})$ on obtient une suite décroissante $A_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, donc son intersection $\bigcap A_n^c = A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ (classe monotone). Par conséquent, $A = \bigcup A_n \in \mathcal{M}_1(\mathcal{A})$.

De la même façon, on montre que la famille $\mathcal{M}_1(\mathcal{A})$ est stable par les intersection dénombrables décroissantes. Ainsi, comme $\mathcal{M}_1(\mathcal{A})$ est une classe monotone telle que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ on conclut que $\mathcal{M}_1(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. C'est-à-dire, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par passage au complémentaire.

2) Considérons la famille de parties $\mathcal{M}_2(\mathcal{A}) := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}); \forall B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Notons que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathcal{A})$ car $\mathcal{A}$ est une algèbre contenue dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, et montrons que $\mathcal{M}_2(\mathcal{A})$ est une classe monotone. En effet, si on considère une suite croissante $(A_n) \subset \mathcal{M}_2(\mathcal{A})$ on aura pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathcal{A}$ les intersections $A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ constituent une suite croissante dans la classe monotone $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, donc la réunion $\bigcup (A_n \cap B) = (\bigcup A_n) \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. D'où $\bigcup A_n \in \mathcal{M}_2(\mathcal{A})$.

De la même façon, on vérifie que $\mathcal{M}_2(\mathcal{A})$ est stable par les intersections décroissantes, ceci prouve qu'elle s'agit d'une classe monotone, par suite $\mathcal{M}_2(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ car $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Ceci démontre que la classe monotone engendrée $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ vérifie la propriété :

$$\forall A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}), \forall B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

3) Enfin, notons que la famille de parties $\{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}); \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \implies A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ est une classe monotone qui contient l'algèbre $\mathcal{A}$, donc elle est égale à $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Ceci montre que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par les intersections finies.

4) En résumé : la classe monotone $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est stable par la complémentation et l'intersection finie, donc c'est une σ -algèbre. Ainsi, comme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ ceci entraîne que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. $\square$

Exercice 40 (π et λ -système). (Libre) Soit $\mathbf{E}$ un ensemble et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille de parties.

i) On dira que $\mathcal{C}$ est un π -système si $\forall A, B \in \mathcal{C} \implies A \cap B \in \mathcal{C}$.

ii) On dira que $\mathcal{D}$ est un λ -système (ou système de Dynkin) si :

1. $\emptyset \in \mathcal{D}$;

2. $\forall A, B \in \mathcal{D}, A \cap B = \emptyset \implies A \cup B \in \mathcal{D}$;

3. $\forall A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B, \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$;

4. Pour toute famille disjointe $(A_n) \subseteq \mathcal{D}$ la réunion $\bigcup A_n \in \mathcal{D}$.

1) Montrer que la famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est une σ -algèbre si et seulement, si elle est π -système et λ -système à la fois.

2) Soit $\mathcal{D}$ un λ -système contenant une famille de parties $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Montrer que la σ -algèbre engendrée $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$.

3) Soit $A_0 \subseteq \mathbf{E}$ une partie fixée. Les familles suivantes sont-elles des π -systèmes, λ -systèmes, clans, algèbres, classes monotones ou σ -algèbres (tribus) ?

$$\mathcal{C}_1 = \{A \subseteq \mathbf{E}; A_0 \subseteq A\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{A \subseteq \mathbf{E}; A \subseteq A_0^c\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_3 = \{A \subseteq \mathbf{E}; A_0 \subseteq A \text{ ou } A \subseteq A_0^c\}$$

Exercice 41 (Algèbres de Bool). On identifie $\{0, 1\}$ au corps $\mathbb{Z}_2$. Ainsi, pour tout ensemble non vide $\mathbf{E}$; l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$ devient une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre unitaire relativement aux lois $+$, $\times$ et la multiplication par les scalaires de $\mathbb{Z}_2$. On vous rappelle aussi que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est un anneau commutative associative unitaire lorsqu'on le munit par les lois Δ (différence symétrique) et $\cap$ (voir Cours chp. I). D'autre part, si pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$ on pose : $0 \cdot A = \emptyset$ et $1 \cdot A = A$ il en résulte que

$(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel, et que par suite $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$ est une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre commutative, associative et unitaire.

1) Montrer que toute algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est en fait une $\mathbb{Z}_2$ -sous algèbre de $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$. En déduire que toute algèbre finie de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est de cardinal 2^n .

2) Montrer que l'application indicatrice, $\chi : (\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2), +, \times, \cdot)$ est morphisme d'algèbre injectif. En déduire que pour toute algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ la famille de fonctions indicatrices, $\mathcal{F}(\mathcal{A}) := \{\chi_A; A \in \mathcal{A}\}$, est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$.

3) Montrer que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est une σ -algèbre alors la famille $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ est stable par la limite simple.

4) Inversement, considérons une sous-algèbre de fonctions $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ qui est unitaire et stable par passage à la limite simple et posons : $\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{E}), \chi_A \in \mathcal{F}\}$.

i) Montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre de parties sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

ii) Montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une classe monotone sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

iii) En déduire que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une σ -algèbre sur $\mathbf{E}$.

5) Conclure.

2.2 Les tribus boréliennes

2.2.1 Ensembles boreliens et tribus boréliennes

Définition 20. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique. La σ -algèbre (tribu) engendrée sur $\mathbf{E}$ par la famille de tous les ouverts $\mathcal{T}$ s'appelle tribu borélienne et se note $\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ ou, tout simplement $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ lorsqu'il n'y a pas un risque de confusion entre les topologies de $\mathbf{E}$. Les parties de $\mathbf{E}$ qui appartiennent à la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ s'appellent des ensembles boreliens.

Noter que puisque les tribus sont stables par le passage au complémentaire il s'ensuit que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ est aussi engendrée par la famille des parties fermées $\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathbf{E}; F^c \in \mathcal{T}\}$. En conséquence, pour tout espace topologique on a toujours :

$$\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{F})$$

Proposition 35. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologie séparé. On désigne par $\mathcal{K}$ la famille des parties compactes dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$. S'il existe une suite de parties compactes $K_n \subset \mathbf{E}$ telle que $\mathbf{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, alors la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$. En particulier, dans l'espace métrique euclidien $(\mathbb{R}^m, d_2)$ la tribu engendrée par les parties compactes (ie. bornées et fermées) coïncide avec la tribu borélienne ie. :

$$\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

Démonstration. D'abord, notons que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$, il s'ensuit donc que la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$. Inversement, observons que pour toute partie fermée $F \in \mathcal{F}$ on a la réunion, $F = \bigcup (F \cap K_n)$, où les $F \cap K_n$ sont des compacts ; donc $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{K})$. D'où $\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{F})$ $\square$

Il est intéressant de souligner que dans une tribu boréliennes $\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ on trouvera les ouverts, les fermés (complémentation), les intersections dénombrables d'ouverts et les réunions dénombrables de fermés. Ces propriétés favorisent la construction des parties boréliennes qui ne sont ni ouvertes ni fermées de type :

$$\cdots \bigcup \bigcup \bigcup O_{i_1, i_2, i_3, i_4, \dots} \quad \text{où les} \quad O_{i_1, i_2, i_3, i_4, \dots} \quad \text{ou} \quad (O_{i_1, i_2, i_3, i_4, \dots})^c \in \mathcal{T}$$

Exemple 18. Pour tout couple de réels $a < b$ on a la réunion dénombrable :

$$[a, b[= \bigcup_{n \geq n_0} [a, b - \frac{1}{n}], \quad \text{avec} \quad n_0 = \lfloor \frac{1}{b-a} \rfloor + 1 \quad \implies \quad [a, b[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

De la même façon, on montre que les intervalles de type $]a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont des boréliens.

Proposition 36. Si $\{O_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de topologie dans $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ alors la tribu borélienne,

$$\mathcal{B}(\mathbf{E}) = \sigma(\{O_n, n \in \mathbb{N}\})$$

En particulier, si $(\mathbf{E}, d)$ est un espace métrique séparable alors sa tribu borélienne est engendrée par la famille dénombrable de boules ouvertes $B_d(x_n, \frac{1}{n})$ où (x_n) désigne une suite partout dense dans $(\mathbf{E}, d)$.

La proposition suivante décrit les tribus boréliennes sur le produit des espaces topologiques.

Proposition 37. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{F}})$ des espaces topologiques. Alors, la tribu borélienne sur le produit topologique cartésien, $(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{F}})$ contient la tribu produit tensoriel des tribus boréliennes sur les espaces topologiques $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{F}})$:

$$\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{F}}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{F}})$$

Si les espaces topologiques $(\mathbf{E}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{F}})$ sont séparés et à bases dénombrables, dans ce cas ; on a alors l'égalité :

$$\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}}) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{F}}) = \mathcal{B}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{T}_{\mathbf{E}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{F}})$$

En particulier, pour les espaces métriques euclidiens de dimension finie on a :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Démonstration. Admise. □

Dans le reste de cette partie nous allons décrire certaines familles génératrices de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, les familles génératrices de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ s'en déduisent par le produit cartésien.

1) La famille des intervalles ouverts de type, $I_o = \{]a, b[; a < b\}$, engendre la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ i.e :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_o)$$

Puisque les intervalles de type $]a, b[$ sont des ouverts dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ donc, $\sigma(I_o) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Inversement, soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non vide. Pour tout $x \in U$ on désigne par $I_x \subseteq U$ l'unique intervalle ouvert qui contient x et qui est de longueur maximale. Noter alors que l'ouvert $U = \bigcup_{x \in U} I_x$.

Démontrons que la famille des intervalles ouverts, $\{I_x; x \in U\}$, est au plus dénombrable. En effet, si pour tout $x \in U$ on choisit un rationnel $r_x \in I_x \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, on voit que la famille d'intervalles ouverts $\{I_x; x \in U\}$ est bijective avec le sous-ensemble au plus dénombrable $\{r_x, x \in U\} \subseteq \mathbb{Q}$.

Ainsi, comme maintenant la réunion $U = \bigcup_{x \in U} I_x$ est au plus dénombrable cela entraîne que les ouverts $U \in \sigma(I_o)$. Donc, la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_o)$.

2) La famille des intervalles fermés de type, $I_f = \{[a, b]; a < b\}$, engendre la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ i.e :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_f)$$

Noter que $I_f \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car les segments $[a, b]$ sont des fermés dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Donc, $\sigma(I_f) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Inversment, noter que tout intervalle ouvert $]a, b[\in I_o$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles fermés :

$$]a, b[= \bigcup_{n \geq n_0} [a + \frac{1}{2n}, b - \frac{1}{2n}] \quad \text{où} \quad n_0 = 1 + [\frac{1}{b-a}] \implies I_o \subset \sigma(I_f) \implies \sigma(I_o) \subseteq \sigma(I_f)$$

Ainsi, puisque dans 1) on a vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_o)$ on conclut alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_f)$.

3) La famille des intervalles semi-ouverts à gauche $I_g = \{]a, b]; a < b\}$ engendre la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ i.e :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_g)$$

D'abord, noter que pour tous les réels $a < b$ on a : $]a, b] = \bigcup_{n \geq n_0} [a - \frac{1}{n}, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $n_0 = 1 + [\frac{1}{b-a}]$.

Donc, la tribu engendrée $\sigma(I_g) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, puisque tout intervalle ouvert $]a, b[= \bigcup_{n \geq n_0}]a, b - \frac{1}{n}]$ appartient à la tribu engendrée $\sigma(I_g)$, il s'ensuit que $I_o \subset \sigma(I_g)$ et que par suite $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_g)$.

4) En précédant comme dans $\mathbb{R}$; on vérifie que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est engendrée par les familles de pavés :

i) La famille des pavés ouverts $P_o(m) = \{ \prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[; a_i, b_i \in \mathbb{Q} \}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

ii) La famille des pavés fermés $P_f(m) = \{ \prod_{i=1}^{i=m} [a_i, b_i]; a_i, b_i \in \mathbb{Q} \}$.

iii) La famille des pavés semi-ouverts à droite $P_d(m) = \{ \prod_{i=1}^{i=m} [a_i, b_i]; a_i, b_i \in \mathbb{Q} \}$.

iv) La famille des pavés semi-ouverts à gauche $P_g(m) = \{ \prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i]; a_i, b_i \in \mathbb{Q} \}$.

v) La famille des pavés ouverts non bornés commençant $P_{o,\infty}(m) = \{ \prod_{i=1}^{i=m}]a_i, +\infty[; a_i \in \mathbb{Q} \}$.

vi) La famille des pavés ouverts non bornés finissant $P_{o,\infty}(m) = \{ \prod_{i=1}^{i=m}]-\infty, a_i]; a_i \in \mathbb{Q} \}$.

Remarque 3. Dans le chapitre consacré aux mesures positives nous allons construire un exemple de partie de $\mathbb{R}$ non borélienne. Ceci prouve que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est strictement contenue dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$.

2.2.2 Tribu borélienne de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On rappelle que la droite réelle achevée est par définition l'ensemble obtenu à partir du corps des nombres réels $\mathbb{R}$ par l'adjonction des deux éléments (symboles) $+\infty$ et $-\infty$, on la désigne par $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou par l'intervalle $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Les règles du calcul arithmétique sur $\mathbb{R}$ s'étend sur la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$ en respectant les conventions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty;$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty;$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty;$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = -\infty;$
5. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad \text{et} \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty;$

$$6. (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \text{ et } (-\infty) \times (-\infty) = +\infty;$$

$$7. (+\infty) \times (-\infty) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty.$$

L'opération $0 \times (\pm\infty)$ n'a pas de sens en général; c'est une forme indéterminée. Ce pendant, dans les cours de la théorie de la mesure et de l'intégration on pose $0 \times (\pm\infty) = 0$; chose qui est confirmée en pratique durant le calcul des produit de mesures positives et leurs intégrales au sens de Lebesgue.

Sur la droite réelle achevée on définit une topologie engendrée par tous les intervalles de type :

$$\{a, b[; \quad a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}, \quad \{]a, +\infty[\text{ et }]-\infty, a[; \quad a \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \{]a, +\infty[\text{ et }]-\infty, a[; \quad a \in \mathbb{R}\}$$

Cette topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ induit donc une tribu notée, $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, appelée tribu borélienne étendue de $\mathbb{R}$.

Exercice 42. Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est engendrée par la famille, $\mathcal{H}$, des demi-espaces

$$H_i(a) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_i > a\} \in \mathcal{H} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad i = 1, \dots, m$$

Exercice 43. Pour toute partie borélienne non vide $A \subset \mathbb{R}^m$ on définit une famille de parties par :

$$\mathcal{C}_A := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})\}$$

1) Démontrer que $\mathcal{C}_A$ est une tribu sur $\mathbb{R}^m$.

2) En déduire que $\mathcal{C}_A = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

3) Conclure.

Exercice 44. Le but de cette exercice est de montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est stable par les translations et les homothéties dans $\mathbb{R}^m$.

1) Montrer que si $U \subseteq \mathbb{R}^m$ est un ouvert alors pour tous $h \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ les sous-ensembles suivants sont des ouverts :

$$U + h := \{x + h; \forall x \in U\} \quad \text{et} \quad \lambda U := \{\lambda x; \forall x \in U\}$$

2) Montrer que pour tous $h \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ les familles de parties de $\mathbb{R}^m$ définies comme suit :

$$\mathcal{T}_h := \{A + h; \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_\lambda := \{\lambda A; \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\}$$

sont des tribus sur $\mathbb{R}^m$. En déduire qu'on a les égalités : $\mathcal{T}_h = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{T}_\lambda$.

3) Conclure.

Exercice 45. Pour tout entier $n \geq 0$ on définit dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$ la famille de cubes :

$$\mathcal{D}_n := \left\{ \prod_{i=1}^{i=m} \left[\frac{a_i}{2^n}, \frac{a_i + 1}{2^n} \right]; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Noter que les côtés de chaque cube $Q \in \mathcal{D}_n$ est de longueur $\frac{1}{2^n}$, donc son volume est égal à $\frac{1}{2^{mn}}$. Dans la littérature, les parties de la famille dénombrable $\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_n$ s'appellent cubes dyadiques.

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbb{R}^m = \sum_{Q \in \mathcal{D}_n} Q$, est une réunion disjointe.

2) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ on a les inclusions de tribus : $\sigma(\mathcal{D}_n) \subseteq \sigma(\mathcal{D}_{n+1}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

3) Etant donné un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^m$ on définit par récurrence une sous-famille de cubes dyadiques de la manière suivante :

i) $\mathcal{U}_0 = \{Q \in \mathcal{D}_0; Q \subseteq U\}$;

ii) $\mathcal{U}_1 = \{Q \in \mathcal{D}_1; Q \subseteq U \text{ avec } \forall Q_0 \in \mathcal{U}_0, Q \not\subseteq Q_0\}$;

iii) $\mathcal{U}_n = \{Q \in \mathcal{D}_n; Q \subseteq U \text{ avec } \forall Q_{n-1} \in \mathcal{U}_0 \cup \dots \cup \mathcal{U}_{n-1}, Q \not\subseteq Q_{n-1}\}$.

a) Montrer alors que l'ouvert $U = \bigcup_{Q \in \mathcal{U}} Q$ où $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{U}_n$ (tracer une figure).

b) En déduire que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \sigma(\mathcal{D})$.

Exercice 46. Ici, on complète les résultats de l'exercice 9 sur les tribus engendrées par les partitions d'un ensemble ; il est recommandé d'y revenir pour la suite de cet exercice.

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble sur lequel on suppose qu'il existe une tribu au plus dénombrable $\mathcal{T}$. Pour tout $x \in \mathbf{E}$ on pose : $\mathcal{T}(x) := \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{T} \\ x \in A}} A$.

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{E}$ la partie $\mathcal{T}(x) \in \mathcal{T}$.
- 2) Montrer que $\mathcal{T}(x)$ est la plus petite partie de $\mathcal{T}$ qui contient le point $x \in \mathbf{E}$.
- 3) Montrer que pour tout $y \in \mathcal{T}(x)$ on a, $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$.
- 4) En déduire que la famille, $\mathcal{C} := \{\mathcal{T}(x) \in \mathcal{T}; x \in \mathbf{E}\}$, est une partition au plus dénombrable de $\mathbf{E}$.
- 5) Montrer que la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$.
- 6) Partant de l'exercice 9 ; montrer que la tribu $\mathcal{T}$ est en bijection avec l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathcal{C})$.
- 6) Conclure.

2.3 Fonctions mesurables

2.3.1 Propriétés des fonctions mesurables

Définition 21. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ une tribu. Le couple $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ s'appelle espace mesurable et les parties de $\mathbf{E}$ qui appartiennent à la tribu $\mathcal{T}$ s'appellent parties $\mathcal{T}$ -mesurables.

La notion de la $\mathcal{T}$ -mesurabilité des sous-ensembles deviendra plus claire au prochain chapitre consacré aux mesures positives.

Définition 22. Soient $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ une application entre espaces mesurables. On dira que f est mesurable si pour toute partie $A \in \mathcal{S}$ l'image inverse $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$.

Dans le reste du Cours, la tribu préférée sur les espaces euclidiens $\mathbb{R}^m$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) est la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (resp. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$). Ainsi, lorsqu'on déclare que $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (resp. $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$) est mesurable cela sous entend que $\mathbb{R}^m$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) est muni par sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (resp. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$).

Exemple 19. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesuré.

1) Une fonction constante, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$, de valeur $c \in \mathbb{R}$ est mesurable car pour tout sous-ensemble borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'image inverse,

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{T} & \text{si } c \notin A \\ \mathbf{E} \in \mathcal{T} & \text{si } c \in A \end{cases}$$

2) L'application identique $\text{id}_{\mathbf{E}} : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{T})$ (ie. $\text{id}_{\mathbf{E}}(x) = x$) est mesurable.

On donne maintenant quelques propositions sur les propriétés des applications mesurables.

Proposition 38. Si $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ et $g : (\mathbf{F}, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbf{G}, \mathcal{R})$ sont des applications mesurables alors l'application composée, $g \circ f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{G}, \mathcal{R})$ est mesurable.

Démonstration. Puisque g est mesurable on aura donc pour tout $A \in \mathcal{R}$ l'image inverse $g^{-1}(A) \in \mathcal{S}$. De même, puisque f est mesurable il s'ensuit que $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T}$. Donc, l'application composée $g \circ f$ est mesurable. $\square$

Proposition 39. Pour qu'une application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \sigma(\Omega))$ soit mesurable il faut et il suffit que pour toute partie $A \in \Omega$ l'image inverse $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$.

Démonstration. Si $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \sigma(\Omega))$ est mesurable on aura par définition :

$$\forall A \in \Omega \subset \sigma(\Omega) \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$$

Inversement, supposons que pour tout $A \in \Omega$ on ait $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Sous cette hypothèse on voit que la famille de parties de $\mathbf{F}$ définie par :

$$\mathcal{S} := \{B \in \sigma(\Omega); f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\} \subseteq \sigma(\Omega)$$

est une tribu qui contient la famille génératrice $\Omega \subset \mathcal{S}$, donc la tribu engendrée $\sigma(\Omega) \subseteq \mathcal{S}$. Ainsi, puisque la tribu engendrée $\sigma(\Omega) = \mathcal{S}$ cela implique que $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \sigma(\Omega))$ est mesurable. $\square$

On rappelle que dans la partie précédente nous avons vu que toute application, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbf{F}$ induit une tribu image définie par :

$$f_*(\mathcal{T}) := \{A \subseteq \mathbf{F}; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

Noter que maintenant l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, f_*(\mathcal{T}))$ devient naturellement mesurable. De plus, si pour une certaine tribu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{F})$ l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ est mesurable on voit que

$$\forall A \in \mathcal{S} \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \implies \mathcal{S} \subseteq f_*(\mathcal{T})$$

Ceci démontre le corollaire suivant :

Corollaire 2. Si l'application, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ est mesurable alors la tribu image directe $f_*(\mathcal{T})$ contient la tribu $\mathcal{S}$. Autrement dit, la tribu image $f_*(\mathcal{T})$ est la plus grande tribu qui rend l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbf{F}$ mesurable.

De même, rappelons que la donnée d'une application $f : \mathbf{E} \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ induit sur l'ensemble $\mathbf{E}$ une tribu image inverse définie par :

$$f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{S}\}$$

Il est maintenant évident que l'application $f : (\mathbf{E}, f^{-1}(\mathcal{S})) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ est mesurable, de plus, si pour une certaine tribu $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ est mesurable il s'ensuit que la tribu image inverse $f^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}$. D'où, le corollaire :

Corollaire 3. Si l'application, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$, est mesurable alors la tribu image inverse $f^{-1}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T}$. Autrement dit, la tribu image inverse $f^{-1}(\mathcal{S})$ est la plus petite tribu qui rend l'application $f : \mathbf{E} \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ mesurable.

Corollaire 4. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesuré. Pour toute partie mesurable non vide $A \in \mathcal{T}$ l'injection canonique $\text{in} : (A, \mathcal{T}_A) \hookrightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est mesurable ; où $\mathcal{T}_A := \{A \cap B; B \in \mathcal{T}\}$ est la tribu trace.

Corollaire 5. Si $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application alors $f : (\mathbf{E}, f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m))) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ est mesurable.

Exemple 20. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ des espaces topologiques, et soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ une application continue. Noter que puisque pour tout ouvert $U \in \mathcal{S}$ l'image inverse $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ est un ouvert cela implique que $f : (\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathcal{T})) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ est mesurable. En particulier, toute application continue $f : (\mathbb{R}^m, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_2)$ induit une application mesurable $f : (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Exercice 47. En utilisant les applications continues entre espaces euclidiens, $x \in \mathbb{R}^m \mapsto x + h \in \mathbb{R}^m$ et $x \in \mathbb{R}^m \mapsto \lambda x \in \mathbb{R}^m$ montrer que $A + h$ et $\lambda A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Exercice 48. Soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application et $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{F})$ une famille non vide de sous-ensembles. Montrer que la tribu engendrée sur $\mathbf{E}$, $\sigma(f^{-1}(\Omega)) = f^{-1}(\sigma(\Omega))$.

Exercice 49. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesuré. Montrer qu'une fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est mesurable si et seulement, si la tribu image inverse $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) \subseteq \mathcal{T}$.

Exercice 50. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour toute partie borélienne non vide $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ on rappelle que la topologie trace sur A est donnée par la famille de parties :

$$\mathcal{T}_A := \{A \cap O; \quad O \in \mathcal{T}\}$$

- 1) Montrer que la famille de parties, $\mathcal{B}_A := \{M \in \mathcal{B}(\mathbf{E}); M \subseteq A\}$, est une σ -algèbre sur la partie A .
- 2) Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{T}_A) \subseteq \mathcal{B}_A$.
- 3) Si $\text{in} : A \rightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}))$ désigne l'injection canonique, montrer que l'image inverse $\text{in}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbf{E})) = \mathcal{B}_A$.
- 4) Montrer que l'injection canonique $\text{in} : (A, \mathcal{B}(\mathcal{T}_A)) \rightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}))$ est mesurable.
- 5) En déduire que la tribu borélienne, $\mathcal{B}(\mathcal{T}_A) = \mathcal{B}_A$.

Exercice 51. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $F : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de composantes $f_1, \dots, f_m : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que pour tout pavé $\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^m$ l'image inverse :

$$F^{-1}\left(\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[\right) = \bigcap_{i=1}^{i=m} f_i^{-1}(]a_i, b_i[)$$

- 2) En déduire que l'application $F : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est mesurable si et seulement, si ses composantes $f_i : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

2.3.2 Mesurabilité et sous-ensembles de niveau

On rappelle que les sous-ensembles de niveau d'une fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définis par :

- 1) $f^{-1}(c) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) = c\}$ est le sous-ensemble de niveau $c \in \mathbb{R}$.
- 2) $f^{-1}([c, +\infty[) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq c\}$ est le sous-ensemble de niveau supérieur large de niveau $c \in \mathbb{R}$.
- 3) $f^{-1}(]c, +\infty[) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\}$ est le sous-ensemble de niveau supérieur strict de niveau $c \in \mathbb{R}$.
- 4) $f^{-1}(]-\infty, c]) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq c\}$ est le sous-ensemble de niveau inférieure large de niveau $c \in \mathbb{R}$.
- 5) $f^{-1}(]-\infty, c[) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) < c\}$ est le sous-ensemble de niveau inférieure strict de niveau $c \in \mathbb{R}$.

La proposition suivante relie la mesurabilité d'une fonction avec la mesurabilité des sous-ensembles de niveaux, sa preuve utilise le fait que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les sections commençantes (resp. finissantes) fermées ou ouvertes.

Proposition 40 (Sous-ensembles de niveaux). Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) est mesurable.
2. $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq c\} \in \mathcal{T}, \forall c \in \mathbb{R}$.
3. $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\} \in \mathcal{T}, \forall c \in \mathbb{R}$.
4. $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq c\} \in \mathcal{T}, \forall c \in \mathbb{R}$.
5. $\{x \in \mathbf{E}; f(x) < c\} \in \mathcal{T}, \forall c \in \mathbb{R}$.

Corollaire 6. Si la fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable alors pour tout réel, $c \in \mathbb{R}$, le sous-ensemble des zéros $\{x \in \mathbf{E}; f(x) = c\}$ est mesurable.

Corollaire 7. La fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement, si sa restriction $f|_{(f^{-1}(\mathbb{R}), \mathcal{T})} : (f^{-1}(\mathbb{R}), \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et les sous-ensembles de niveau $\{x \in \mathbf{E}; f(x) = \pm\infty\}$ sont mesurables.

Exercice 52. Démontrer la proposition précédente et ses deux corollaires.

Définition 23. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ des espaces topologiques. On dira qu'une application $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ est borélienne si elle est mesurable par rapport aux tribus boréliennes $\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $\mathcal{B}(\mathbf{F}, \mathcal{S})$. En particulier, une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est borélienne si $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ est mesurable.

Exemple 21. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesuré et $A \subseteq \mathbf{E}$ une partie non vide. Noter que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ les sous-ensembles de niveau supérieur strict de la fonction caractéristique, $\chi_A : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont donnés par :

$$\{x \in \mathbf{E}; \chi_A(x) > c\} = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{si } c < 0 \\ A & \text{si } 0 \leq c < 1 \\ \emptyset & \text{si } c \geq 1 \end{cases}$$

Donc, d'après la proposition précédente, une fonction caractéristique, $\chi_A : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$, est mesurable si et seulement, si la partie $A \in \mathcal{T}$ est mesurable. Ainsi, par exemple, sur la droite réelle $\mathbb{R}$ les fonctions caractéristiques suivantes sont mesurables (boréliennes) :

$$\chi_{]a,b[}, \quad \chi_{]-\infty,b[}, \quad \chi_{]a,+\infty[}, \quad \chi_{\mathbb{Q}}, \quad \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}, \quad \chi_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}, \quad \chi_{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b]}$$

En général, pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ la fonction caractéristique, $\chi_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, est borélienne (mesurable).

Lemme 1. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $A, B \subset \mathbf{E}$ deux parties mesurables telles que $\mathbf{E} = A \cup B$. Alors, une fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement, si ses restrictions $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_B : (B, \mathcal{T}_B) \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

Démonstration. Le fait que les restrictions d'une fonction mesurable sur des parties mesurables sont mesurables est évidente (cf. corollaire 4).

Inversement, si les restrictions f_A et f_B sont mesurables il s'ensuit que les sous-ensembles de niveau :

$$\{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\} = \{x \in A; f(x) > c\} \cup \{x \in B; f(x) > c\} = (f_A)^{-1}(]c, +\infty[) \cup (f_B)^{-1}(]c, +\infty[)$$

sont mesurables, et donc ; la fonction f est mesurable sur $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$. $\square$

Lemme 2 (Recollement). Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable ; et soient A et B deux parties mesurables non vide telles que $\mathbf{E} = A \cup B$. Si $f_1 : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : (B, \mathcal{T}_B) \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables telles que $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A \cap B$; alors la fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par les expressions suivantes est mesurable :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A \\ f_2(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Démonstration. Comme ci-dessus, observer que le sous-ensemble de niveau $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\}$ est égal à la réunion $(f_1)^{-1}(]c, +\infty[) \cup (f_2)^{-1}(]c, +\infty[)$. $\square$

Exercice 53. Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel $a > 0$ la fonction (tranquée) définie par l'expression suivante est mesurable :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } f(x) > a \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$

Exercice 54. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^m$. Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ on définit son symétrique par rapport à l'origine de $\mathbb{R}^m$ par : $-A := \{-x; x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

- 1) Montrer que la famille des parties, $\mathbf{Sym}(\mathbb{R}^m) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m); A = -A\}$, est une tribu sur $\mathbb{R}^m$.
- 2) Montrer que si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est paire alors la tribu image inverse $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \subseteq \mathbf{Sym}(\mathbb{R}^m)$.
- 3) Caractériser les fonctions mesurables, $f : (\mathbb{R}^m, \mathbf{Sym}(\mathbb{R}^m)) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2.3.3 Mesurabilité sur les produits cartésiens

Ce paragraphe est consacré à l'étude des propriétés des fonctions mesurables dont le domaine ou le codomaine est un produit catésien.

Proposition 41. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{A})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{B})$ des espaces mesurables. On désigne par $p_{\mathbf{E}}$ et $p_{\mathbf{F}}$ les projections canoniques définies respectivement par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}, \quad p_{\mathbf{E}}(x, y) = x \quad \text{et} \quad p_{\mathbf{F}}(x, y) = y$$

Alors, on a les affirmations suivantes :

1. Les projections canoniques, $p_{\mathbf{E}} : (\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{A})$ et $p_{\mathbf{F}} : (\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{B})$ sont mesurables.
2. La tribu produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu sur $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ rendant les projections canoniques $p_{\mathbf{E}}$ et $p_{\mathbf{F}}$ mesurables.

Démonstration. 1) Noter que pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ on a $(p_{\mathbf{E}})^{-1}(A) = A \times \mathbf{F} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, de même, pour toute partie $B \in \mathcal{B}$ on a $(p_{\mathbf{F}})^{-1}(B) = \mathbf{E} \times B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Donc, les projections $p_{\mathbf{E}}$ et $p_{\mathbf{F}}$ sont mesurables. 2) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur le produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ telle que les projections canoniques $p_{\mathbf{E}} : (\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{A})$ et $p_{\mathbf{F}} : (\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{B})$ soient mesurables. Sous ces conditions, on voit que pour tout couple de parties $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ les images inverses, $(p_{\mathbf{E}})^{-1}(A) = A \times \mathbf{F} \in \mathcal{T}$ et $(p_{\mathbf{F}})^{-1}(B) = \mathbf{E} \times B \in \mathcal{T}$, et par suite, leur intersection :

$$(p_{\mathbf{E}})^{-1}(A) \cap (p_{\mathbf{F}})^{-1}(B) = A \times B \in \mathcal{T} \implies \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \implies \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{T}$$

Par conséquent, la tribu produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu qui rend les projections canoniques $p_{\mathbf{E}}$ et $p_{\mathbf{F}}$ mesurables. $\square$

Proposition 42. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$, $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ et $(\mathbf{G}, \mathcal{R})$ des espaces mesurables. Alors, l'application produit cartésien, $f = (f_1, f_2) : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F} \times \mathbf{G}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{R})$, est mesurable si et seulement si ses composantes $f_1 : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ et $f_2 : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{G}, \mathcal{R})$ sont mesurables.

Exercice 55. Démontrer la proposition.

Exercice 56. Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ des ensembles non vides et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ et $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{F})$ des familles de parties.

- 1) Démontrer qu'on a l'inclusion des σ -algèbres : $\sigma(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}) \otimes \sigma(\mathcal{D})$.
- 2) On suppose qu'il existe deux suites croissantes de parties $C_n \in \mathcal{C}$ et $D_n \in \mathcal{D}$ telles que

$$\mathbf{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

Démontrer alors que $\sigma(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{C}) \otimes \sigma(\mathcal{D})$.

3) En déduire que la tribu produit tensoriel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$.

4) Généraliser 2) et 3) pour les tribus boréliennes des couples d'espaces topologiques $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$.

Exercice 57. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide. On rappelle que l'injection canonique $\text{in}_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \hookrightarrow \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ est définie par, $\text{in}_{\mathbf{E}}(x) = (x, x)$.

1) Démontrer que pour toute tribu $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{E}$ l'injection canonique, $\text{in}_{\mathbf{E}} : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{E} \times \mathbf{E}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$, est mesurable.

2) On suppose que l'ensemble $\mathbf{E}$ est muni par deux tribus $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$. Montrer que si l'injection canonique, $\text{in}_{\mathbf{E}} : (\mathbf{E}, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathbf{E} \times \mathbf{E}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$, est mesurable alors $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

3) Conclure.

Exercice 58 (Mesurabilité des graphes). Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1) Pour tout $x \in \mathbf{E}$ on pose, $F(x) = (x, f(x)) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}$; c'est l'application graphe de f .

i) Montrer que pour toutes les parties mesurables $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a, $F^{-1}(A \times B) = A \cap f^{-1}(B)$.

ii) En déduire que l'application graphe, $F : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, est mesurable.

2) Le sous-ensemble, $\mathbf{Gr}(f) := \{(x, f(x)); x \in \mathbf{E}\} \subset \mathbf{E} \times \mathbb{R}$, s'appelle graphe de la fonction f .

i) Montrer que le complémentaire du graphe $\mathbf{Gr}(f)$ dans le produit $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ est donné par :

$$\mathbf{Gr}(f)^c = \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}([r, +\infty[) \times]-\infty, r[\right) \cup \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}(]-\infty, r[) \times]r, +\infty[\right)$$

ii) En déduire que le graphe d'une fonction mesurable est une partie mesurable dans l'espace produit mesurable $(\mathbf{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

iii) Montrer que les épigraphes large et stricte de la fonction f , définis comme suit; sont mesurables :

$$\text{épi}(f) := \{(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}; f(x) \leq y\} \quad \text{resp.} \quad \text{épi}_*(f) := \{(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}; f(x) < y\}$$

2.3.4 Opérations algébriques sur les fonctions mesurables

Étant donné un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$; on se propose d'étudier les propriétés algébriques et structurales de l'ensemble de toutes les fonctions mesurables, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$, noté $\mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.

L'addition de fonctions : Soient $f, g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Montrons alors que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble de niveau $\{x \in \mathbf{E}; f(x) + g(x) < c\}$ est mesurable.

En effet, si on prend un point $x \in \{x \in \mathbf{E}; f(x) + g(x) < c\}$ on aura $g(x) < c - f(x)$, donc par densité des nombres rationnels; il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $g(x) < r < c - f(x)$. Ceci démontre alors qu'on a la réunion dénombrable de parties mesurables

$$\{x \in \mathbf{E}; f(x) + g(x) < c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbf{E}; g(x) < r\} \cap \{x \in \mathbf{E}; f(x) < c - r\} \in \mathcal{T}$$

Donc, la somme $f + g \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est mesurable.

Multiplication externe : La mesurabilité de λf pour $\lambda \in \mathbb{R}$ est un exercice facile.

Le carré d'une fonction : Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Noter que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble de niveau :

$$\{x \in \mathbf{E}; f^2(x) > c\} = \begin{cases} \mathbf{E} \in \mathcal{T} & \text{si } c < 0 \\ \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \sqrt{c}\} \cup \{x \in \mathbf{E}; f(x) < -\sqrt{c}\} \in \mathcal{T} & \text{si } c \geq 0 \end{cases}$$

Donc, la fonction au carré $f^2 \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est mesurable.

Produit de fonctions : D'abord, observer que pour tout couple de fonctions f et $g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ on a l'expression algébrique :

$$fg = \frac{1}{4} \left((f+g)^2 - (f-g)^2 \right)$$

Ainsi, par ce qui précède, on conclut que si f et g sont mesurables alors leur produit $fg \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est une fonction mesurable.

Les propriétés établies ci-dessus pour les fonctions mesurables se résume dans la proposition suivante :

Proposition 43. *L'espace de fonctions mesurables, $(\mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T}), +, \times, \cdot)$, est une algèbre commutative, associative et unitaire.*

Max et Min : Soit $f, g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Noter que pour tout réel c les sous-ensembles de niveau :

$$\{x \in \mathbf{E}; \max(f(x), g(x)) > c\} = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\} \cup \{x \in \mathbf{E}; g(x) > c\}$$

et

$$\{x \in \mathbf{E}; \min(f(x), g(x)) > c\} = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > c\} \cap \{x \in \mathbf{E}; g(x) > c\}$$

sont mesurables, donc les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g) \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ sont mesurables.

Grâce à la stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables, $\mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$, par l'inf et le sup on dira qu'il est réticulé pour la relation d'ordre $\leq$. Noter aussi que si $f \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ il s'ensuit que les fonctions

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = -\min(f, 0), \quad |f| = f^+ + f^- \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$$

La proposition suivante nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que la mesurabilité des fonctions f^+ , f^- et $|f|$ entraîne la mesurabilité de la fonction f .

Proposition 44. *Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. f est mesurable.
2. f^+ et f^- sont mesurables.
3. Les sous-ensembles $F^+ = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq 0\}$ et $F^- = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq 0\}$ sont mesurables et $|f|$ est mesurable

Démonstration. 1) $\implies$ 2) D'après ce qui précède, si $f \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ les fonctions qui lui sont associées $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = -\min(f, 0) \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.

2) $\implies$ 3) Si f^+ et $f^- \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ son mesurables on aura $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$. En plus, les sous-ensembles de niveau :

$$F^+ = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbf{E}; -\min(f(x), 0) = f^-(x) = 0\}$$

et

$$F^- = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbf{E}; \max(f(x), 0) = f^+(x) = 0\}$$

sont mesurables.

3) $\implies$ 1) D'abord, noter que $\mathbf{E} = F^+ \cup F^-$ et que les restrictions de f sur les parties mesurables F^+ et F^- sont égales à $f_{F^+} = f|_{F^+}$ et $f_{F^-} = f|_{F^-}$. Ainsi, comme $|f| : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée mesurable on en déduit que les fonctions $f_{F^+} : (F^+, \mathcal{T}_{F^+}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_{F^-} : (F^-, \mathcal{T}_{F^-}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables. Finalement, le lemme de recollement implique que $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable. $\square$

Remarque 4 (Mise en garde). *La mesurabilité de la fonction valeur absolue seule $|f|$ ne garantit pas la mesurabilité de la fonction f . Pour voir ce fait supposons qu'il existe une partie non mesurable $A \notin \mathcal{T}$, donc son complémentaire n'est pas mesurable $A^c \notin \mathcal{T}$. Dans ces conditions, la fonction définie par les expressions suivantes :*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

n'est pas mesurable, car les sous-ensembles

$$F^+ = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq 0\} = A \quad \text{et} \quad F^- = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq 0\} = A^c$$

ne sont pas mesurables. En revanche, la fonction valeur absolue $|f| = 1$ est mesurable (constante).

Exercice 59. Soient f et $g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Montrer que le sous-ensembles $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > g(x)\}$ est mesurable.

Exercice 60. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = f^{-1}([a, +\infty[) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in A$, $[x, +\infty[\subseteq A$.
- 2) Montrer que si $b = \inf A \in \mathbb{R}$ alors l'intervalle $]b, +\infty[\subseteq A \subseteq [b, +\infty[$.
- 3) En déduire que les combinaisons linéaires finies de fonctions monotones sont boréliennes.
- 4) Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout réel $a > 0$ la fonction, $f_a(x) = \frac{[af(x)]}{a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, est mesurable étagée.

Exercice 61. Soient u et $v : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. Montrer que pour toute fonction continue $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \Phi(u(x), v(x))$ est mesurable sur $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.

2.3.5 Suite de fonctions mesurables

Dans cette partie, on se propose de montrer que l'algèbre des fonctions mesurables est stable par passage à la limite simple.

Proposition 45. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f_n \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ une suite de fonctions mesurables. Alors, les fonctions, $\sup(f_n)$, $\inf(f_n)$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ sont mesurables. En conséquence, si la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbf{E}$ alors sa limite simple, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, est mesurable.

Démonstration. 1) Montrons que la borne supérieure $\sup f_n \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ est mesurable.

En effet, la mesurabilité des fonctions f_n implique que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ les sous-ensembles de niveau $\{x \in \mathbf{E}, f_n(x) > c\} \in \mathcal{T}$ sont mesurables. De plus, puisque le sous-ensemble de niveau de $\sup f_n$

$$\{x \in \mathbf{E}, \sup f_n(x) > c\} = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}, f_n(x) > c\}$$

est mesurable. Donc, la fonction $\sup(f_n) \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ est mesurable.

2) Noter que la borne inférieure $\inf(f_n) = -\sup(-f_n) \in \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ est mesurable.

3) Partant de 1) et 2) on conclut que $\liminf f_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{p \geq n} f_p$ et $\limsup f_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{p \geq n} f_p$ sont des fonctions mesurables.

4) Enfin, si la suite de fonctions f_n converge simplement sur $\mathbf{E}$ on aura $\lim f_n = \liminf f_n = \limsup f_n$ est mesurable sur $\mathbf{E}$. $\square$

Corollaire 8. Le domaine de convergence simple d'une suite de fonctions mesurables, $f_n : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$, est un sous-ensemble mesurable :

$$D(f_n) = \{x \in \mathbf{E}; \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \text{ existe}\} = \{x \in \mathbf{E}; \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\}$$

Exercice 62. Soit $f_n : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que si $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ désigne la limite simple alors que le domaine de convergence simple de (f_n) est égal à :

$$D(f_n) = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \{x \in \mathbf{E}, |f_p(x) - f(x)| < r\}$$

Exercice 63. Soit $f_n : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que les deux sous-ensembles suivants sont mesurables :

$$I = \{x \in \mathbf{E}; \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbf{E}; (f_n(x)) \text{ est bornée}\}$$

Exercice 64. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$f_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right)$$

Montrer alors que la fonction dérivée $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

2.3.6 Les fonctions étagées mesurables et les approximations

Définition 24. Une fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite étagée si son image $f(\mathbf{E}) \subset \overline{\mathbb{R}}$ est finie.

Soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction étagée et $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ désigne l'ensemble de ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Noter que si on pose $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ on en déduit que la fonction étagée s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques :

$$f = a_1 \chi_{A_1} + \dots + a_n \chi_{A_n} \quad \text{où} \quad \mathbf{E} = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{avec} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

Inversement, prenons $A_1, \dots, A_n$ une famille de parties non vides non nécessairement disjointes deux à deux ; mais on suppose $\mathbf{E} = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Avec ces données pour toute famille de scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ la combinaison linéaire $g = \alpha_1 \chi_{A_1} + \dots + \alpha_n \chi_{A_n}$ est une fonction étagée ; car son image

$$f(\mathbf{E}) \subseteq \{\alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n ; (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n\}$$

est un ensemble fini de cardinal au plus égal à 2^n . Donc, comme ci-dessus, on pourra réécrire la fonction étagée g sous la forme $g = a_1 \chi_{B_1} + \dots + a_m \chi_{B_m}$ avec $m \leq 2^n$, $\mathbf{E} = B_1 \cup \dots \cup B_m$ et $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

D'où la proposition :

Proposition 46. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Le sous-espace vectoriel réel des fonctions étagées mesurables, noté $\mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathcal{T}) \subset \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$, est égal au sous-espace vectoriel réel engendré par la famille de fonctions caractéristiques mesurables $\{\chi_A ; A \in \mathcal{T}\}$.

Remarque 5 (Mise en garde). Une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques non mesurables peut être mesurable ! Par exemple, étant un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ dans lequel on suppose qu'il existe une partie non mesurable, $A \notin \mathcal{T}$, on voit alors que la fonction $\chi_A + \chi_{A^c} = 1$ est mesurable mais les fonctions caractéristiques χ_A et χ_{A^c} ne sont pas mesurables.

Dans la suite du Cours, une fonction étagée mesurable $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ sera représentée par une combinaison linéaire de type suivant :

$$f = a_1 \chi_{A_1} + \dots + a_n \chi_{A_n} \quad \text{où} \quad A_i \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{E} = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{et tel que} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

Bien sûr, ici les coefficients réels a_i ne sont autres que les valeurs de la fonction étagée f supposés ordonnés : $a_1 < \dots < a_n$.

Le dernier résultat important de ce chapitre est la proposition suivante qui affirme que toute fonction mesurable est une limite simple de fonctions étagées mesurables.

Théorème 5 (Densité des fonctions étagées). Pour toute fonction mesurable, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow [0, +\infty]$ (positive), il existe une suite croissante de fonctions étagées mesurables, $f_n \leq f_{n+1}$, qui converge simplement sur $\mathbf{E}$ vers f .

En conséquence, toute fonction mesurable $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est limite simple d'une suite de fonctions étagées et mesurables. Si, en plus, f est bornée alors il existe une suite de fonctions étagées mesurables qui converge uniformément vers f sur $\mathbf{E}$.

Démonstration. 1) *Construction de la suite f_n* : Fixons une fonction mesurable, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Ensuite, considérons la fonction étagée, $f_n : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, définie par les expressions suivantes :

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{si } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 2, \dots, n2^n \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

Noter que si pour $k = 1, \dots, n2^n$ en posant $E_{n,k}(f) := \{x \in \mathbf{E}; \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}$ et $E_n(f) := \{x \in \mathbf{E}; f(x) \geq n\}$ on obtient une famille de parties mesurables disjointes deux à deux et telles que

$$f_n = \sum_{k=1}^{k=n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}(f)} + n \chi_{E_n(f)} \in \mathcal{E}(\mathbf{E}, \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{E}, \mathcal{F})$$

2) *La suite f_n est croissante sur $\mathbf{E}$* : En effet, en écrivant l'intervalle $E_{n,k}(f) = E_{n+1,2k}(f) \cup E_{n+1,2k+1}(f)$ on en déduit que :

$$\forall x \in E_{n,k}, f_n(x) = \begin{cases} \frac{2k-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x) & \text{si } x \in E_{n+1,2k}(f) \\ \frac{2k}{2^{n+1}} = f_n(x) & \text{si } x \in E_{n+1,2k+1}(f) \end{cases} \implies f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall x \in E_{n,k}(f)$$

Noter aussi que le sous-ensemble $E_n(f) = \{x \in \mathbf{E}; n \leq f(x) < n+1\} \cup E_{n+1}(f)$ et que l'intervalle

$$[n, n+1[= \bigcup_{i=1}^{i=2^{n+1}-1} \left[\frac{n2^{n+1} + i}{2^{n+1}}, \frac{n2^{n+1} + i + 1}{2^{n+1}} \right[$$

ce qui entraîne que le sous-ensemble mesurable

$$\{x \in \mathbf{E}; n \leq f(x) < n+1\} = \bigcup_{i=1}^{i=2^{n+1}-1} E_{n+1, n2^{n+1}+i+1}(f)$$

Par conséquent, pour tout $x \in E_n(f)$ on obtient :

$$f_n(x) = \begin{cases} n+1 = f_{n+1}(x) & \text{si } x \in E_{n+1}(f) \\ \frac{n2^{n+1} + i + 1}{2^{n+1}} & \text{si } x \in E_{n+1, n2^{n+1}+i+1}(f), \quad 1 \leq i \leq 2^{n+1} - 1 \end{cases}$$

Ceci montre, encore une fois, que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall x \in E_n(f)$. Donc, la suite f_n est croissante sur $\mathbf{E}$.

3) *La suite f_n converge simplement sur $\mathbf{E}$* : Pour $x \in \mathbf{E}$ fixé on distingue les deux cas :

$$f(x) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad f(x) = +\infty$$

i) Si $f(x) \geq 0$ est fini il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq f(x) \leq n_0$. Dans ce cas, pour tout entier $n \geq n_0$ il existe un entier $k(x) \in \mathbb{N}$ tel que

$$f(x) \in \left[\frac{k(x)-1}{2^n}, \frac{k(x)}{2^n} \right[\iff x \in E_{n,k(x)}(f) \implies 0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{E} \setminus \{x \in \mathbf{E}; f(x) = +\infty\}$ on a $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

ii) Si $x \in \{x \in \mathbf{E}; f(x) = +\infty\}$ cela entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in E_n(f)$; donc : $f_n(x) = n$. Par conséquent, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty, \forall x \in \{x \in \mathbf{E}; f(x) = +\infty\}$.

Conclusion : La suite de fonctions étagées mesurables f_n converge simplement sur $\mathbf{E}$ vers la fonction mesurable positive f .

iii) Supposons que la fonction f est bornée, donc ; il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leq f(x) \leq M, \forall x \in \mathbf{E}$.

Noter que sous cette condition, on voit que pour tous $x \in \mathbf{E}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n > M \geq f(x)$ on obtient, d'après l'expression de la fonction étagée $f_n(x)$, que $0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$. Par conséquent, la suite des fonctions étagées f_n convergent uniformément sur $\mathbf{E}$ vers la fonction mesurable f .

4) *Le cas général* $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: Dans ce cas on écrit $f = f^+ - f^-$, puis on applique ce qui précède aux fonctions positives f^+ et f^- . $\square$

Nous utiliserons maintenant le résultat du théorème de l'approximation des fonctions mesurables par les fonctions étagées pour caractériser les fonctions mesurables sur les espaces produits.

Proposition 47. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ des espaces mesurables. Si $f : (\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable alors ses fonctions partielles,

$$\forall y \in \mathbf{F}, x \in \mathbf{E} \mapsto f(x, y) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{E}, y \in \mathbf{F} \mapsto f(x, y)$$

sont mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ respectivement.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ une partie de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ mesurable. Noter alors que les fonctions partielles de la fonction caractéristique χ_A sont eux aussi des fonctions caractéristiques mesurables :

$$\forall y \in \mathbf{F}, \chi_A(-, y) = \chi_{A(-, y)} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{E}, \chi_A(x, -) = \chi_{A(x, -)} : \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

car les sections horizontales $A(-, y)$ et verticales $A(x, -)$ sont mesurables (voir la proposition 9).

Ainsi, grâce à cette remarque on conclut que les fonctions partielles des fonctions étagées sont mesurables. Par conséquent, si on prend une suite de fonctions étagées mesurables $f_n : (\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge simplement vers la fonction f , on obtient alors des suites de fonctions partielles mesurables $f_n(-, y)$ et $f_n(x, -)$ qui convergent simplement et respectivement vers $f(-, y)$ et $f(x, -)$, donc les fonctions partielles de f sont mesurables. $\square$

Exercice 65. Cet exercice propose une démonstration du théorème des approximations des fonctions mesurables par les fonctions étagées mesurables.

Sur la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ on définit une topologie dont la famille des ouverts, $\mathcal{T}_\infty$, constituée par les ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ union la famille des intervalles de type $]a, +\infty]$ et $[-\infty, b[$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

0) Montrer que l'espace topologique $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_\infty)$ est compact.

1) Montrer que la fonction $\psi : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ définie par les expressions suivantes :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = +\infty \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

est un homéomorphisme $\psi : ([0, +\infty], |\cdot|) \rightarrow ([0, 1], |\cdot|)$.

2) Étant donnée une fonction mesurable, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow [0, 1]$, on lui associe une suite de fonctions définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbf{E}), \quad f_n(x) = 2^{-n} [2^n f(x)]$$

i) Montrer que (f_n) est une suite croissante de fonctions étagées mesurable.

ii) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbf{E}$.

3) Conclure.

Exercice 66. Sur $\mathbb{R}$ on considère les deux suites de fonctions définies par les expressions :

$$f_n = \sum_{k=0}^{k=n} \chi_{[k, +\infty[} \quad \text{et} \quad g_n = \sum_{k=0}^{k=n} (k+1) \chi_{[k, k+1[}$$

- 1) Représenter graphiquement les suites de fonctions étagées f_n et g_n sur $\mathbb{R}^+$.
- 2) En déduire leurs limites simples sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 67. On identifie $\{0, 1\}$ au corps $\mathbb{Z}_2$. Ainsi, pour tout ensemble non vide $\mathbf{E}$; l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$ devient une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre commutative, associative et unitaire relativement aux lois $+$, $\times$ et la multiplication par les scalaires de $\mathbb{Z}_2$. On vous rappelle aussi que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est un anneau commutative associative unitaire lorsqu'on le munit par les lois Δ et $\cap$ (voir Cours chp. I). D'autre part, si pour toute partie $A \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$ on pose : $0 \cdot A = \emptyset$ et $1 \cdot A = A$ il en résulte que $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel, et que par suite $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$ devient une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre qui est commutative, associative et unitaire.

- 1) Montrer que toute algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est en fait une $\mathbb{Z}_2$ -sous algèbre de $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$. En déduire que toute algèbre finie de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est de cardinal 2^n .
- 2) Montrer que l'application indicatrice, $\chi : (\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2), +, \times, \cdot)$ est un homomorphisme d'algèbres injectif. En déduire que pour toute algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ la famille de fonctions indicatrices, $\mathcal{F}(\mathcal{A}) := \{\chi_A; A \in \mathcal{A}\}$, est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$.
- 3) Montrer que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est une σ -algèbre alors la famille $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ est stable par la limite simple.
- 4) Inversement, considérons une sous-algèbre de fonctions $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ qui est unitaire et stable par passage à la limite simple. Posons alors : $\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{E}), \chi_A \in \mathcal{F}\}$.
 - i) Montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre de parties sur l'ensemble $\mathbf{E}$.
 - ii) Montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une classe monotone sur l'ensemble $\mathbf{E}$.
 - iii) En déduire que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une σ -algèbre sur $\mathbf{E}$.
- 5) Conclure.

Mesures positives

3.1 Généralités sur les mesures positives

3.1.1 Définitions et exemples

Définition 25. Étant donné un ensemble non vide $\mathbf{E}$, un clan de parties $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ et une fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$; on dira que

1. μ est additive si : $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. μ est sous-additive si : $\forall A, B \in \mathcal{C}, \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
3. μ est σ -additive si pour toute suite de parties $(A_n) \subset \mathcal{C}$ dont les termes sont disjoints deux à deux (ie. $\forall n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$) et telle que l'union $\bigcup A_n \in \mathcal{C}$ alors, $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$.
4. μ est σ -sous-additive si pour toute suite de parties $(A_n) \subset \mathcal{C}$ dont la réunion $\bigcup A_n \in \mathcal{C}$ alors, $\mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n)$.

Avant de donner quelques exemples de fonctions d'ensembles nous allons d'abord tirer certaines de leurs propriétés à partir de la définition.

1) Toute fonction d'ensembles additive, $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$, est monotone. En effet, si $A, B \in \mathcal{C}$ telles que $A \subseteq B$ on aura $B \setminus A \in \mathcal{C}$ ce qui donne une réunion disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$

$$B = A \cup (B \setminus A) \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \implies \mu(A) \leq \mu(B)$$

En conséquence, si la valeur $\mu(A) \geq 0$ est finie on aura l'égalité :

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2) Si $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction d'ensembles additive on aura, par récurrence, pour toute famille finie de parties disjoints deux à deux $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$:

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

Plus généralement, pour toute famille finie de parties $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ non nécessairement disjointes deux à deux on a l'inégalité de la sous-additivité :

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

Pour établir cette inégalité il suffit de considérer la famille de parties disjointes définies par :

$$B_1 = A_1 \quad \text{et} \quad B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) \subset A_k, \quad \forall k = 2, \dots, n$$

Ainsi, puisque les $B_k \subseteq A_k$ et $A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$; la monotonie de μ implique :

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(B_1) + \dots + \mu(B_n) \leq \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

Noter alors que les fonctions d'ensembles additives sont nécessairement sous-additives. Prochainement, on verra des exemples de fonctions d'ensembles qui sont sous-additives mais non additives.

Définition 26. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable, donc $\mathcal{T}$ est une tribu (σ -algèbre) sur $\mathbf{E}$. Une fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ qui est σ -additive s'appelle mesure positive. De même, on dira que $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

1. Une mesure positive telle que $\mu(\mathbf{E}) < +\infty$ est dite mesure positive finie.
2. Une mesure positive finie telle que $\mu(\mathbf{E}) = 1$ s'appelle mesure probabilité.
3. S'il existe une suite de parties $(A_n) \subset \mathcal{T}$ telle que $\mathbf{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$, on dira que μ est une mesure positive σ -finie.

Ci-dessous, on donnera une liste d'exemples de mesures positives (resp. probabilités).

Exemple 22 (Le cardinal). Soit $\mathbf{E}$ un ensemble fini non vide, donc l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est une tribu. La fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui associe à chaque partie $A \subseteq \mathbf{E}$ son cardinal, $\mu(A) = \text{Card}(A)$, est une mesure positive finie. Car, on a $\mu(\mathbf{E}) = \text{Card}(\mathbf{E})$ est fini et si A et B sont des parties disjointes dans $\mathbf{E}$ on sait que

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Avec ces arguments on voit que la fonction d'ensembles, $\nu(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\mathbf{E})}$, est une mesure probabilité sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

Exemple 23 (Mesure de dénombrement). Sur $\mathbb{N}$ la fonction d'ensembles, $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$, définie par les expressions est une mesure positive sur $\mathbb{N}$:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}, \quad \mu(A) = \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette mesure est σ -finie; car les parties finies $A_n = \{0, 1, \dots, n\}$ recouvrent $\mathbb{N} = \bigcup A_n$.

Exemple 24 (Mesure de Dirac). Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{P}(\mathbf{E}))$ un espace mesuré non vide et $x \in \mathbf{E}$ un point fixé. La fonction d'ensembles $\delta_x : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par :

$$\forall A \subseteq \mathbf{E}, \quad \delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est une mesure positive de probabilité sur $\mathbf{E}$.

Observer que si on suppose l'ensemble $\mathbf{E}$ contient une suite infinie, $(x_n) \subseteq \mathbf{E}$, en prenant alors une suite positives $a_n \geq 0$ on lui associer une mesure positive sur l'ensemble $\mathbf{E}$ donnée par l'expression :

$$\forall A \subseteq \mathbf{E}, \quad \mu(A) = \sum_{n \geq 0} a_n \delta_{x_n}(A) \implies \forall n \in \mathbb{N}, \mu(\{x_n\}) = a_n$$

et qui vérifie les propriétés suivantes :

- i) La mesure positive μ devient finie si et seulement, si la série numérique $\mu(\mathbf{E}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge.
- ii) La mesure positive μ devient σ -finie si et seulement, si l'ensemble $\mathbf{E}$ est au plus dénombrable.

Exercice 68 (Probabilité de Poisson). Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$ la fonction d'ensembles,

$$\mu_\lambda = e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n$$

est une mesure probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exercice 69. Montrer que $\nu = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \delta_n$ est une mesure positive σ -finie sur $\mathbb{N}$. Est-elle finie ?

Exemple 25 (Mesure image directe). Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle que toute application $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ induit une tribu sur $\mathbf{F}$ définie par :

$$f_*(\mathcal{T}) := \{A \subseteq \mathbf{F}; \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

qui rend l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, f_*(\mathcal{T}))$ mesurable. Maintenant, noter que si pour toute partie $A \in f_*(\mathcal{T})$ on pose :

$$\mu_f(A) := \mu(f^{-1}(A))$$

on obtient ainsi une mesure positive sur $\mathbf{F}$, $\mu_f : f_*(\mathcal{T}) \rightarrow [0, +\infty]$, s'appelle mesure image de μ par f .

Noter que puisque $\mu_f(\mathbf{F}) = \mu(f^{-1}(\mathbf{F})) = \mu(\mathbf{E})$ on en déduit les faits suivants :

i) Si la mesure positive μ est finie alors la mesure image directe μ_f est aussi finie.

ii) Si μ est une mesure probabilité sur $\mathbf{E}$ alors la mesure image directe μ_f est une mesure probabilité sur $\mathbf{F}$.

Exemple 26 (Restriction d'une mesure). Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{T}$ une partie mesurable non vide. On pourra alors définir une mesure positive sur $\mathbf{E}$ notée, $\mu_{\lfloor A} : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$, et est définie par l'expression :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \quad \mu_{\lfloor A}(B) := \mu(A \cap B)$$

La mesure $\mu_{\lfloor A}$ s'appelle A -restriction de la mesure μ , elle vérifie les propriétés suivantes :

- 1) $\mu_{\lfloor A}(\mathbf{E}) = \mu(A)$, donc $\mu_{\lfloor A}$ est une mesure finie si et seulement si $\mu(A)$ est un nombre réel fini.
- 2) $\forall B \in \mathcal{T}, B \subseteq A \implies \mu_{\lfloor A}(B) = \mu(B)$.
- 3) $\forall B \in \mathcal{T}, A \cap B = \emptyset \implies \mu_{\lfloor A}(B) = 0$.

Exemple 27 (La mesure trace). Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{T}$ une partie mesurable non vide. On rappelle que la tribu trace sur la partie mesurable A est donnée par :

$$\mathcal{T}_A = \{B \subseteq A; \quad B \in \mathcal{T}\}$$

Maintenant, la restriction de la mesure μ sur la tribu trace $\mathcal{T}_A$ induit une mesure positive sur la partie mesurable A , notée $\mu_A : \mathcal{T}_A \rightarrow [0, +\infty]$, donnée par :

$$\forall B \in \mathcal{T}_A, \quad \mu_A(B) = \mu(B)$$

3.1.2 Fonctions additives sur les semi-anneaux

Dans cette partie, on donnera des exemples de fonctions additives définies sur des semi-anneaux de parties, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$. Dans la partie 2 et 3, on montrera que ces fonctions additives se prolongent sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$ en des mesures positives.

D'abord, rappelons que les éléments du clan engendré par un semi-anneau $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, s'écrivent comme une union disjointe $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ avec les $A_i \in \mathcal{A}$ et telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Grâce à cette propriété du clan engendré $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, étant donnée une fonction d'ensembles additive $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$, en posant :

$$\mu_{\mathcal{C}}(A) := \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

on obtient ainsi une fonction d'ensembles $\mu_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow [0, +\infty]$ qui est bien définie et additive. En effet, si on a une autre union disjointes : $A = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ avec $B_j \in \mathcal{A}$ et telles que $B_i \cap B_j = \emptyset$ on aura pour tout indice $j = 1, \dots, m$:

$$B_j = A_1 \cap B_j \cup \cdots \cup A_n \cap B_j \quad \text{où } A_i \cap B_j \in \mathcal{A} \implies \mu(B_j) = \mu_{\mathcal{C}}(B_j) = \mu(A_1 \cap B_j) + \cdots + \mu(A_n \cap B_j)$$

De là on voit qu'on a :

$$\mu(B_1) + \cdots + \mu(B_m) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Par conséquent, la valeur $\mu_{\mathcal{C}}(A)$ ne dépend pas de la décomposition de la partie $A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ en une réunion disjointe d'éléments du semi-anneau $\mathcal{A}$.

On donnera maintenant une liste d'exemples de fonctions d'ensembles dont la définition exploite le principe détaillé ci-dessus.

Exemple 28 (Mesure des longueurs sur $\mathbb{R}$). *On rappelle que la famille des intervalles de type :*

$$I_d = \{]a, b[\subset \mathbb{R}; a < b\}$$

est un semi-anneau qui engendre un clan sur $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}(I_d)$, dont les éléments sont des parties $I \subset \mathbb{R}$ qui s'écrivent sous forme d'une réunion finie disjointe d'intervalles éléments du semi-anneau I_d ie. :

$$I =]a_1, b_1[\cup \cdots \cup]a_n, b_n[\quad \text{où les } a_i < b_i < a_{i+1}$$

Avec cette propriété du clan engendré, on définit une fonction d'ensembles, $\lambda_1 : \mathcal{C}(I_d) \rightarrow [0, +\infty]$, par l'expression suivante :

$$\lambda_1(I) := \sum_{i=1}^n \text{long}(]a_i, b_i[) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

qui est naturellement additive. En effet, dans la suite de ce chapitre, on verra que la fonction d'ensembles $\lambda_1 : \mathcal{C}(I_d) \rightarrow [0, +\infty]$, se prolonge en mesure positive notée aussi, $\lambda_1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$, connue par mesure de Borel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 29 (Mesure des volumes sur $\mathbb{R}^m$). *On rappelle que la famille des pavés de type*

$$P_d = \left\{ \prod_{i=1}^m]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^m; a_i < b_i \right\}$$

est un semi-anneau qui engendre un clan $\mathcal{C}(P_d)$ dont les éléments sont réunion finie de pavés disjoints :

$$(\forall I \in \mathcal{C}(P_d)) (\exists I_1, \dots, I_n \in P_g), \quad I = I_1 \cup \cdots \cup I_n \quad \text{où } I_i = \prod_{j=1}^m]a_i^j, b_i^j[$$

Noter que la fonction d'ensembles, $\lambda_m : \mathcal{C}(P_d) \rightarrow [0, +\infty]$, définie par l'expression suivante :

$$\forall \lambda_m(I) = \sum_{i=1}^n \text{Vol}\left(\prod_{j=1}^m]a_i^j, b_i^j[\right) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (a_i^j - b_i^j)$$

est additive ; elle se prolonge en une mesure positive $\lambda_m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty]$ appelée mesure de Borel sur $\mathbb{R}^m$.

Exemple 30 (Mesure avec densité sur $\mathbb{R}$). Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante. Notons que pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble $\{f(x)/x < x_0\} \subseteq]-\infty, f(x_0)]$ est majoré par $f(x_0)$, donc il admet une borne supérieure qui coïncide avec la limite à gauche :

$$\sup\{f(x)/x < x_0\} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \Phi(x) = \Phi(x_0^-)$$

De même, puisque le sous-ensemble $\{f(x)/x > x_0\} \subseteq [f(x_0), +\infty[$ est minoré par $f(x_0)$, donc il admet une borne inférieure qui coïncide avec la limite à droite :

$$\inf\{f(x)/x > x_0\} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \Phi(x) = \Phi(x_0^+)$$

Partant de ces remarques, et sous des conditions qu'on va préciser ci-dessous ; nous allons définir des fonctions d'ensembles additives sur les clans $\mathcal{C}(I_d)$ et $\mathcal{C}(I_g)$ engendrés respectivement par les semi-anneaux $I_d = \{[a, b]; a < b\}$ et $I_g = \{[a, b[; a < b\}$.

i) Si $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction croissante continue à droite, alors en posant pour tout intervalle $[a, b] \in I_d$:

$$\mu_\Phi([a, b]) := \Phi(b) - \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \Phi(x) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

on obtient ainsi une fonction d'ensembles, notée encore $\mu_\Phi : \mathcal{C}(I_d) \rightarrow [0, +\infty]$, qui est additive.

ii) De même, si $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction croissante continue à gauche, alors en posant pour tout intervalle $[a, b[\in I_g$:

$$\mu_\Phi([a, b[) := \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \Phi(x) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

on obtient une fonction d'ensembles, notée encore $\mu_\Phi : \mathcal{C}(I_g) \rightarrow [0, +\infty]$, qui est additive.

Ci-dessous, on verra que toute fonction croissante $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue à droite (ou à gauche) induit une mesure positive notée aussi $\mu_\Phi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ que l'on appelle mesure positive de Borel-Stieltjes.

Exemple 31 (Mesure produit). Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S}, \nu)$ deux espaces mesurés. On munit le produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ par la tribu produit tensoriel $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ qui est engendrée par le semi-anneau $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$. Dans ces conditions, pour tout couple de parties mesurables $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{S}$ on pose :

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \in [0, +\infty]$$

tout en convenant que le produit¹ : $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

Ci-dessous, on verra que la fonction d'ensembles $\mu \times \nu : \mathcal{T} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ se prolonge en une mesure positive sur la tribu produit tensoriel, elle est notée :

$$\mu \otimes \nu : \mathcal{T} \otimes \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$$

et est appelée produit tensoriel des mesures positives μ et ν .

Exercice 70. Soit $\mathcal{C}$ un clan et $\mu : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction d'ensembles additive. Montrer que pour toute suite de parties disjoints $A_n \in \mathcal{C}$ telle que la réunion $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{C}$ on a l'inégalité :

$$\sum_{n \geq 0} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$$

1. Cette convention est compatible avec le fait que dans $\mathbb{R}^2$ l'aire d'un rectangle $I \times J$ est considérée nulle lorsque la longueur (mesure) de l'un de ses côtés I ou J est nulle. Ainsi, par exemple, l'aire d'un segment ou d'une droite illimitée est nulle !

Exercice 71. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Alors, pour toute suite de parties $(A_n) \subseteq \mathcal{T}$ on a les propriétés suivantes :

1. pour toute partie mesurable $A \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n$ on a : $\mu(A) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$.
2. pour toute partie mesurable $B \supseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n$ on a : $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n) \leq \mu(B)$.

Exercice 72. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $A \subset \mathbf{E}$ est dite localement fini si pour toute partie mesurable $B \in \mathcal{T}$ telle que $\mu(B) < +\infty$ on a $A \cap B \in \mathcal{T}$.

- 1) Montrer que la famille des parties localement finies, notée $\widehat{\mathcal{T}}$, est une tribu sur $\mathbf{E}$ qui contient $\mathcal{T}$.
- 2) Montrer que si la mesure μ est σ -finie alors $\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{T}}$.
- 3) Montrer que la fonction d'ensembles, $\widehat{\mu} : \widehat{\mathcal{T}} \rightarrow [0, +\infty]$, définie par les expressions suivantes est une mesure positive :

$$\widehat{\mu}(A) := \begin{cases} \mu(A) & \text{si } A \in \mathcal{T} \\ +\infty & \text{si } A \in \widehat{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T} \end{cases}$$

Exercice 73. Sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ on définit la fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ par :

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini} \end{cases}$$

Montrer que μ est une mesure positive σ -finie.

Exercice 74. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesuré. Montrer que pour toute famille finie de mesures positives $\mu_1, \dots, \mu_n : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ et pour toute famille de réels positifs $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ la combinaison linéaire, $a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$, est une mesure positive sur $\mathbf{E}$.

Exercice 75 (Mesure conditionnelle). Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie mesurable non vide $B \in \mathcal{T}$ telle que $0 < \mu(B) < +\infty$ on définit une fonction d'ensembles, $\mu(\cdot/B) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A/B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

Montrer que $\mu(\cdot/B)$ est mesure de probabilité sur $\mathbf{E}$ appelée probabilité conditionnelle sachant B .

Exercice 76. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé (ie. μ une probabilité).

- 1) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$.
- 2) Montrer que la famille de parties, $\mathcal{T}_\mu := \{A \in \mathcal{T}; \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$, est une tribu.

Exercice 77. Soient $\mathbf{E}$ un ensemble infini, et $\mathcal{T}$ désigne la tribu engendrée sur $\mathbf{E}$ par la famille des singletons, $\{\{x\}; x \in \mathbf{E}\}$.

- 1) Montrer qu'une partie $A \in \mathcal{T}$ (mesurable) si et seulement, si A ou A^c est au plus dénombrable.
- 2) Montrer que la fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie comme suit est une mesure positive :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A \text{ est non dénombrable} \end{cases}$$

Exercice 78. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble infini, et $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ la famille des parties finies de $\mathbf{E}$. Pour toute fonction, $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$, on définit une fonction d'ensembles $\mu_f : \mathcal{F}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ par l'expression suivante :

$$\forall A \in \mathcal{F}(\mathbf{E}), \quad \mu_f(A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

- 1) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbf{E})$ est un clan. Est-il un σ -clan ?
- 2) Montrer que μ_f est une fonction d'ensembles additive. Est-elle σ -additive ?

Exercice 79. On définit deux fonctions d'ensembles, μ et $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}^*$, par les expressions suivantes² :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \quad \mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infinie} \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction d'ensembles, $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est additive. Est-elle une mesure ?

2) Montrer que la fonction d'ensembles, $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est une mesure.

Exercice 80. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que toute la suite de parties A_n qui vérifie la condition $\mu(A_n \cap A_m) = 0, \forall m \neq n$, entraîne

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$$

Exercice 81. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{T}$ une partie mesurable non vide. Montrer que la mesure positive obtenue par restriction, $\mu_{\lfloor A} : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$, qui est définie par :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \quad \mu_{\lfloor A}(B) := \mu(A \cap B)$$

est l'unique mesure positive $\mu : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie la propriété

$$1) \forall B \in \mathcal{T}, B \subseteq A \implies \mu_{\lfloor A}(B) = \mu(A) \quad \text{et} \quad 2) \forall B \in \mathcal{T}, B \subseteq A^c \implies \mu_{\lfloor A}(B) = 0$$

Exercice 82. Étant donné un espace mesuré, $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$, on définit deux sous-familles de parties de la tribu $\mathcal{T}$ appelées famille de parties de mesure nulle par rapport à μ (resp. μ -négligeables) :

$$\mathcal{N}(\mu) := \{A \in \mathcal{T}; \quad \mu(A) = 0\} \quad \text{resp.} \quad \mathcal{N}_0(\mu) := \{B \subset \mathbf{E}; \exists A \in \mathcal{N}(\mu), B \subseteq A\}$$

Montrer que $\mathcal{N}(\mu)$ et $\mathcal{N}_0(\mu)$ sont des σ -clan sur $\mathbf{E}$.

Exercice 83. Dans un espace métrique $(\mathbf{E}, d)$ on appelle ensemble de type G_δ (resp. F_σ) si il est intersection (resp. réunion) dénombrable d'ouverts (resp. fermés) de $(\mathbf{E}, d)$.

On définit la distance d'un point $x \in \mathbf{E}$ à une partie non vide $A \subset \mathbf{E}$ par la borne inférieure :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); \forall a \in A\}$$

1) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement, si $x \in \overline{A}$ (l'adhérence de la partie A).

2) Montrer que pour tout réel $r > 0$ la partie $\{x \in \mathbf{E}; d(x, A) < r\}$ est ouverte dans $(\mathbf{E}, d)$.

3) Pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on désigne par $\overset{\circ}{A}$ son intérieur dans $(\mathbf{E}, d)$. Montrer que

$$\overline{A} = \bigcap_{n \geq 1} \{x \in \mathbf{E}; d(x, A) < 1/n\} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{A} = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in \mathbf{E}; d(x, A^c) \geq 1/n\}$$

4) En déduire que les ouverts (resp. fermés) sont des ensembles de type G_δ (resp. F_σ) dans $(\mathbf{E}, d)$.

5) On désigne par $\mathcal{T}_d$ (resp. $\mathcal{F}_d$) la famille des ouverts (resp. fermés) de l'espace métrique $(\mathbf{E}, d)$.

i) Montrer que les classes monotones engendrées par les familles $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{F}_d$ coïncident ie. :

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}_d) = \mathcal{M}(\mathcal{F}_d)$$

2. On vous rappelle que la somme : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

ii) Montrer que la famille de parties, $\mathcal{M}_c = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_d), A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_d)\}$, est une classe monotone. En déduire que $\mathcal{M}(\mathcal{T}_d)$ est stable par le passage au complémentaire.

iii) Montrer que la famille de parties, $\mathcal{M}_o = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_d), \forall O \in \mathcal{T}_d \implies O \cap A \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_d)\}$, est une classe monotone. En déduire que $\mathcal{M}(\mathcal{T}_d)$ est stable par les intersections et les réunions finies.

iv) En déduire que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$ coïncide avec les classes monotones engendrées par les familles $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{F}_d$ ie. :

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}_d) = \mathcal{M}(\mathcal{F}_d) = \mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$$

6) On désigne par $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbf{E}; A \text{ de type } F_\sigma \implies A \text{ de type } G_\delta\}$. Montrer que les affirmations suivantes sont vraies :

1. $\mathcal{F}_d \subset \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$.

En déduire que la classe monotone engendrée : $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d)$.

7) **Application :** Ici, on suppose que μ_1 et $\mu_2 : \mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d) \rightarrow [0, +\infty]$ deux mesures positives sur $\mathbf{E}$.

i) Montrer que la famille, $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T}_d) ; \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$, est une classe monotone sur $\mathbf{E}$.

ii) En déduire que si les mesures μ_1 et μ_2 sont finies et coïncident sur les fermés (resp. ouverts) ; elles sont égales partout.

iii) Montrer que le résultat de ii) reste vraie lorsque les mesures μ_1 et μ_2 sont σ -finies.

iv) On suppose $\mathbf{E} = \mathbb{R}^m$ muni de sa distance euclidienne. Montrer que si les mesures μ_1 et μ_2 sont σ -finies et coïncident sur les compacts de $\mathbb{R}^m$; elles sont égales partout.

Exercice 84. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu_1)$ et $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Pour toute partie $A \in \mathcal{T}$ on pose :

$$\mu(A) = \inf\{\mu_1(A \cap B) + \mu_2(A \cap B^c); \forall B \in \mathcal{T}\} \quad \text{et} \quad \nu(A) = \sup\{\mu_1(A \cap B) + \mu_2(A \cap B^c); \forall B \in \mathcal{T}\}$$

1) Montrer que μ et ν sont des mesures positives sur $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ telles que

$$\mu \leq \inf(\mu_1, \mu_2) \leq \max(\mu_1, \mu_2) \leq \nu$$

2) Soient μ' et $\nu' : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ des mesures positives telles que $\mu' \leq \inf(\mu_1, \mu_2) \leq \max(\mu_1, \mu_2) \leq \nu'$. Montrer qu'on a : $\mu' \leq \mu \leq \inf(\mu_1, \mu_2) \leq \max(\mu_1, \mu_2) \leq \nu \leq \nu'$

3) Conclure.

3.1.3 Continuité des mesures positives

Dans cette partie, nous allons caractériser la σ -additivité des fonctions d'ensembles additive par la notions de continuité précisée dans la définition suivante :

Définition 27. Soient $\mathcal{T}$ une tribu et $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction d'ensembles.

1. On dira que la fonction d'ensembles μ est continue inférieurement au point $A \in \mathcal{T}$ si pour toute suite croissante $A_n \subseteq A_{n+1} \in \mathcal{T}$ telle que

$$A = \bigcup_{n \geq 0} A_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$$

2. On dira que la fonction d'ensembles μ est continue supérieurement au point $A \in \mathcal{T}$ si pour toute suite décroissante $A_{n+1} \subseteq A_n \in \mathcal{T}$ telle que

$$A = \bigcap_{n \geq 0} A_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(A) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right)$$

Théorème 6 (Continuité). Dans un espace mesuré $(E, \mathcal{T}, \mu)$ les affirmations suivantes sont vraies :

1. Continuité inférieure : Pour toute suite croissante de parties mesurables, $A_n \subseteq A_{n+1} \in \mathcal{T}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sup_{n \geq 0} \mu(A_n)$$

2. Continuité supérieure : Soit $A_{n+1} \subseteq A_n \in \mathcal{T}$ une suite décroissante de parties mesurables. S'il existe un indice $n_0 \geq 0$ tel que, $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = \inf_{n \geq 0} \mu(A_n)$$

En conséquence, si μ est une mesure finie (ou probabilité) alors pour toute suite monotone de parties mesurables, $A_n \in \mathcal{T}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n\right)$$

Démonstration. 1) Etant donnée une suite croissante $A_n \in \mathcal{T}$, posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Ceci nous donne une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ qui sont disjoints et dont les réunions partielles sont égales : $A_0 \cup \dots \cup A_n = B_0 \cup \dots \cup B_n, \forall n \geq 0$. Ainsi, par la σ -additivité de la mesure positive μ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu(B_n) \\ &= \mu(A_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \mu(B_k) \\ &= \mu(A_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{k=n} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) \\ &= \mu(A_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

2) Soit $A \in \mathcal{T}$ une suite décroissante telle que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$. Comme ci-dessus, en posant $B_0 = A_{n_0}$ et $B_n = A_{n_0+n} \setminus A_{n_0+n+1}$ pour tout $n \geq 1$ on obtient une suite disjointe d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que

$$A_{n_0} = \left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)$$

Ainsi, par σ -additivité de la mesure μ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mu(A_{n_0}) &= \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) + \sum_{n \geq 0} \mu(B_n) \\ &= \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \mu(B_k) \\ &= \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} (\mu(A_{n_0+k}) - \mu(A_{n_0+k+1})) \\ &= \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)) \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right)$. □

Remarque 6. Dans la seconde affirmation du théorème précédent l'hypothèse : $\exists n_0 \geq 0, \mu(A_{n_0}) < +\infty$ est nécessaire. Par exemple, si on considère la mesure de dénombrement $\mu(A) = \text{Card}(A)$ on voit que la suite de parties $A_n = \{m \in \mathbb{N}; m \geq n\}$ est décroissante, de mesure infini et ayant une intersection vide $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \emptyset$. Or, ceci donne la contradiction

$$\mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = +\infty$$

Le théorème suivant nous montre que la continuité inférieure (resp. supérieure) est une condition suffisante pour qu'une fonction d'ensembles additive (resp. finie) soit σ -additive.

Théorème 7 (Réciproque). Sur un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ on a les affirmations suivantes :

1. Toute fonction d'ensembles, $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$, qui est additive et continue inférieurement ; est une mesure positive sur $\mathbf{E}$.
2. Toute fonction d'ensembles, $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$, qui est additive μ , finie et continue supérieurement ; est une mesure positive sur $\mathbf{E}$.

Démonstration. 1) Supposons que la fonction d'ensembles, $\mu : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow [0, +\infty]$, est additive et qu'elle est continue inférieurement. C'est-à-dire, pour toute suite croissante $A_n \in \mathcal{T}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$.

Considérons alors une suite de parties disjointes deux à deux $A_n \in \mathcal{T}$ et posons pour tout $n \geq 0$, $B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n$. Ainsi, puisque la suite $B_n \in \mathcal{T}$ est croissante on aura par continuité inférieure de la fonction d'ensembles μ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$$

D'autre part, comme μ est additive et les A_n sont disjoints on aura,

$$\mu(B_n) = \mu(A_0) + \dots + \mu(A_n) \implies \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$$

Par conséquent, puisque maintenant μ est σ -additive sur $\mathcal{T}$; c'est une mesure positive sur $\mathbf{E}$.

2) Supposons que la fonction d'ensembles μ est finie et est continue supérieurement. Considérons une suite disjointe $A_n \in \mathcal{T}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons : $B_n = \bigcup_{p \geq n} A_p, \forall n \in \mathbb{N}$.

Avec ces notations, on voit que la suite B_n est décroissante et que $\bigcap_{n \geq 0} B_n = \emptyset$, donc par continuité supérieure de μ on aura : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n) = 0$. D'autre part, puisque les A_n sont disjoints il s'ensuit que :

$$A_n = B_n \setminus B_{n+1} \implies \mu(A_n) = \mu(B_n) - \mu(B_{n+1}) \implies \sum_{p=0}^{p=n} \mu(A_p) = \mu(B_0) - \mu(B_{n+1})$$

Ainsi, quand l'entier n tend vers l'infini, on obtient : $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n) = \mu(B_0) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$. Par conséquent, μ est une mesure positive finie sur $\mathbf{E}$. □

Proposition 48. Dans tout espace mesuré, $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$, on a les propositions suivantes :

1. Pour toute suite, $A_n \in \mathcal{T}$, on a : $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.
2. Pour toute suite, $A_n \in \mathcal{T}$, telle que pour un certain indice n_0 on a, $\mu\left(\bigcup_{n \geq n_0} A_n\right) < +\infty$, alors :

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$$

3. Si la suite de parties $A_n \in \mathcal{T}$ converge, avec $\mu(\bigcup A_n) < +\infty$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n)$.
 En particulier, si μ est une mesure finie (ou probabilité) alors pour toute suite de parties convergente, $A_n \in \mathcal{T}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n)$.

Démonstration. 1) Rappelons que $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_n$ et que la suite de parties $B_n = \bigcap_{p \geq n} A_p$ est croissante. Donc, d'après le théorème de continuité inférieure on obtient :

$$\mu(\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_n) = \sup_{n \geq 0} \mu(B_n)$$

D'autre part, comme pour tout $p \geq n$ on a $B_n \subseteq A_p$; donc par monotonie de la mesure positive μ :

$$\mu(B_n) \leq \mu(A_p), \forall p \geq n \implies \mu(B_n) \leq \inf_{p \geq n} \mu(A_p)$$

Par conséquent, $\mu(\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sup_{n \geq 0} \left(\inf_{p \geq n} \mu(A_p) \right) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$.

2) Supposons qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\bigcup_{p \geq n_0} A_p) < +\infty$. Noter que puisque la suite $C_n = \bigcup_{p \geq n} A_p$ est décroissante il s'ensuit que la mesure $\mu(C_n) < +\infty, \forall n \geq n_0$. Donc, si on applique le théorème de continuité supérieure on peut écrire :

$$\mu(\limsup A_n) = \mu(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p) = \inf_{n \geq 0} \mu(\bigcup_{p \geq n} A_p)$$

D'autre part, comme pour tout entier $p \geq n$ on a, $A_p \subseteq \bigcup_{p \geq n} A_p$, on en déduit que

$$\mu(A_p) \leq \mu(\bigcup_{p \geq n} A_p) \implies \sup_{p \geq n} \mu(A_p) \leq \mu(\bigcup_{p \geq n} A_p)$$

Par conséquent, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$. □

Exemple 32. Grâce au théorème de continuité et sa réciproque, ici on donnera une justification de l'hypothèse de continuité à gauche (resp. à droite) faite sur les fonctions croissantes, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour qu'elles induisent des fonctions d'ensembles $\mu_\phi : I_g \rightarrow [0, +\infty]$ (resp. $\mu_\phi : I_d \rightarrow [0, +\infty]$) définies par l'expression suivante :

$$\forall [a, b[\in I_g \quad \mu_\phi([a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ resp. } \forall]a, b] \in I_d, \quad \mu_\phi(]a, b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

soient prolongeables en une mesure positive sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En effet, par exemple, si on suppose que la fonction d'ensembles $\mu_\phi([a, b])$ se prolonge en une mesure positive sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors sous cette hypothèse, pour un réel $\varepsilon < 2(b - a)$ en écrivant l'intervalle $[a, b[$ sous la forme d'une réunion dénombrable disjointe de la forme :

$$[a, b[= [a, b - \frac{\varepsilon}{2} [\cup \bigcup_{n \geq 1} [b - \frac{\varepsilon}{2^n}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} [$$

on obtient par la σ -additivité de la mesure positive μ_ϕ :

$$\begin{aligned} \mu_\phi([a, b]) &= \mu_\phi([a, b - \frac{\varepsilon}{2}]) + \sum_{n \geq 1} \mu_\phi([b - \frac{\varepsilon}{2^n}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}]) \\ \Phi(b) - \Phi(a) &= \left(\Phi(b - \frac{\varepsilon}{2}) - \Phi(a) \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\Phi(b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) - \Phi(b - \frac{\varepsilon}{2^n}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(b - \frac{\varepsilon}{2^n}) - \Phi(a) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(b - \frac{\varepsilon}{2^n}) = \Phi(b)$ il s'ensuit que la fonction croissante Φ doit être continue à gauche en tout point $b \in \mathbb{R}$. Autrement dit, si la fonction d'ensembles $\mu_\Phi : I_g \rightarrow [0, \infty]$ se prolonge en une mesure positive sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors il est nécessaire que la fonction croissante Φ soit continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

Dans le reste de cette partie on donnera quelques applications intéressantes du théorème de continuité des mesures positives.

Proposition 49 (Premier lemme de Borel-Cantelli). *Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si pour une suite de parties mesurables $A_n \in \mathcal{T}$ la série numérique, $\sum \mu(A_n) < +\infty$, converge alors la mesure*

$$\mu(\limsup A_n) = 0$$

Démonstration. Noter que si la suite numérique, $\sum \mu(A_n) < +\infty$, converge il en résulte que la suite des restes d'ordre n tend vers zéro. Donc,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_0 \implies \sum_{p \geq n} \mu(A_p) < \varepsilon \implies \forall n \geq n_0, \mu\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right) < \varepsilon$$

Ainsi, puisque la limite supérieure $\limsup A_n \subseteq \bigcup_{p \geq n} A_p$ il s'ensuit que $\mu(\limsup A_n) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Par conséquent, la mesure $\mu(\limsup A_n) = 0$. $\square$

Pour énoncer le second lemme de Borel-Cantelli on aura besoin de la notion de parties (événements) indépendantes relativement à une mesure probabilité.

Définition 28. *Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé. Une famille de parties mesurables $\mathcal{F} = \{A_i, i \in I\}$ est dite μ -indépendante si pour toute sous-famille finie de parties $A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{F}$ on a :*

$$\mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \mu(A_{i_1}) \times \dots \times \mu(A_{i_n})$$

Observer que pour tout couple de parties mesurables A et $B \in \mathcal{T}$ qui sont μ -indépendantes on pourra écrire :

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(B^c) &= \mu(A)(1 - \mu(B)) \\ &= \mu(A) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A \setminus (A \cap B)) \\ &= \mu(A \cap B^c) \end{aligned}$$

Donc, les parties A et B^c sont également indépendantes, il en est de même pour les paires de parties $\{A^c, B\}$ et $\{A^c, B^c\}$. En effet, par récurrence on pourra montrer que si une famille finie de parties mesurables $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\} \subset \mathcal{T}$ est μ -indépendante alors il en est de même pour la famille de parties $\{B_1, \dots, B_n\}$ où $B_j = A_{i_j}$ ou $B_j = A_{i_j}^c$.

Proposition 50 (Deuxième lemme de Borel-Cantelli). *Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé. Si $(A_n) \subseteq \mathcal{T}$ est une suite de parties indépendantes dont la série numérique associée, $\sum \mu(A_n) = +\infty$, diverge alors*

$$\mu(\limsup A_n) = 1$$

En conséquence, pour toute suite de parties indépendantes, $B_n \in \mathcal{T}$, sa limite supérieure vérifie :

$$\mu(\limsup B_n) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \mu(\limsup B_n) = 1$$

Démonstration. Supposons que la série $\sum \mu(A_n)$ diverge et montrons qu'on a :

$$\mu\left(\left(\limsup A_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p^c\right) = 0 \iff \mu(\limsup A_n) = 1$$

Observer que pour tous les entier $m \geq n$ la famille de parties complémentaires, $\{A_n^c, \dots, A_m^c\}$, sont indépendentes, donc on pourra écrire :

$$\forall m \geq n, \quad \mu\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right)^c \leq \mu(A_n^c \cap \dots \cap A_m^c) = (1 - \mu(A_n)) \cdots (1 - \mu(A_m))$$

Ainsi, si on applique l'inégalité $1 - t \leq e^{-t}$, $\forall t \geq 0$, on en déduit que :

$$\forall m \geq n, \quad \mu\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right)^c \leq \exp\left(-\sum_{p=n}^{p=m} \mu(A_p)\right) \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right)^c \leq \exp\left(-\sum_{p \geq n} \mu(A_p)\right)$$

$$\text{D'où : } \mu\left(\left(\limsup A_n\right)^c\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right)^c = 0. \quad \square$$

3.2 Mesure extérieure

3.2.1 Définition et théorème d'existence

Définition 29. On appelle mesure extérieure sur un ensemble $\mathbf{E}$ la donnée d'une fonction d'ensembles, $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2. $\forall A, B \subseteq \mathbf{E}, A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
3. $\forall (A_n) \subset \mathcal{P}(\mathbf{E}), \quad \mu^*\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n)$.

Supposons que nous avons une mesure extérieure μ^* sur un ensemble $\mathbf{E}$, et prenons une partie $A \subset \mathbf{E}$ telle que il existe une suite de parties $A_n \subset \mathbf{E}$ vérifiant :

$$A \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n \implies \mu^*(A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n)$$

Ainsi, suite à cette implication on déduit l'inégalité suivante qui va justifier l'énoncé du prochain théorème dû au mathématicien grec A. Caratheodory :

$$\mu^*(A) \leq \inf\left\{\sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n) ; \forall A_n \subseteq \mathbf{E}, A \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n\right\}$$

Théorème 8 (A. Caratheodory). Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une famille de parties telle que $\emptyset, \mathbf{E} \in \mathcal{C}$, et soit $h : \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction d'ensembles telle que $h(\emptyset) = 0$. Alors, la fonction d'ensembles définie par l'expression suivante est une mesure extérieure sur l'ensemble $\mathbf{E}$:

$$\forall A \subseteq \mathbf{E}, \quad \mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{n \geq 0} h(A_n) ; \forall A_n \in \mathcal{C}, A \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n\right\}$$

et $\mu^*(A) = +\infty$ si la partie A ne peut pas être recouverte par les éléments de la famille $\mathcal{C}$.

Démonstration. Il est évident que $\mu^*(\emptyset) = 0$. De même, si $A \subseteq B$ et $A_n \in \mathcal{C}$ est une suite telle que $B \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n$ on aura donc $A \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Autrement dit, la famille des suites de parties

$$\{(A_n) \subseteq \mathcal{C} ; B \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n\} \subseteq \{(A_n) \subseteq \mathcal{C} ; A \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n\}$$

En conséquence, si on passe à la borne inférieure sur toutes les sommes $\sum_{n \geq 0} h(A_n)$ on obtient l'inégalité de monotonie : $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Maintenant, prenons une suite de parties $A_n \subseteq \mathbf{E}$. Noter que si pour une certaine partie A_n on a $\mu^*(A_n) = +\infty$; l'égalité de la sous-additivité est alors évidente : $\mu^*\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n) = +\infty$.

Et, si pour tout $n \geq 0$ le réel $\mu^*(A_n) < +\infty$ est fini, dans ce cas; fixons un réel $\varepsilon > 0$ et appliquons le principe de la caractérisation de la borne inférieure pour trouver des suites de parties $A_{n,m} \in \mathcal{C}$ telles que $A_n \subseteq \bigcup_{m \geq 0} A_{n,m}$ avec :

$$\sum_{m \geq 0} h(A_{n,m}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \mu^*(A_n) \implies \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} h(A_{n,m}) + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n)$$

Ainsi, comme la réunion $\bigcup_{n \geq 0} A_n \subseteq \bigcup_{n,m \geq 0} A_{n,m}$, le passage à l'inf nous donne par définition de l'expression de la fonction d'ensembles μ^* que :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) + \varepsilon \leq \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu^*\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n)$$

Par conséquent, la fonction d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure extérieure. $\square$

Dans la littérature sur la théorie de la mesure on trouve la notion de prémesure que l'on définit de la manière suivante :

Définition 30. Soient $\mathcal{A}$ est une algèbre sur l'ensemble $\mathbf{E}$ et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction d'ensembles. On dira que μ est une prémesure sur l'algèbre $\mathcal{A}$ si on a les conditions suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Si $A_n \in \mathcal{A}$ est une suite disjointe dont la réunion $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}$ alors $\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$.

Proposition 51. Soient $\mathcal{A}$ est une algèbre sur l'ensemble $\mathbf{E}$ et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ une prémesure. Alors, la mesure extérieure $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ associée à la prémesure μ par le théorème de A. Caratheodory prolonge μ . C'est-à-dire, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$.

Démonstration. Noter que par définition de l'expression de la mesure extérieure μ^* donnée ci-dessus; on aura pour toute partie $A \in \mathcal{A}$, $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

Pour établir l'inégalité inverse, prenons une suite de parties $A_n \in \mathcal{A}$ telle que $A \subseteq \bigcup A_n$ et pour tout entier $n \geq 0$ posons : $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subseteq A_n$ ce qui nous donne une suite disjointe $B_n \in \mathcal{A}$ (algèbre) dont la réunion $\bigcup B_n = \bigcup A_n$. Ainsi, en observant que la réunion $A = \bigcup_{n \geq 0} (A \cap B_n)$ est disjointe avec $A \cap B_n \in \mathcal{A}$; la σ -additivité de la prémesure μ entraîne que

$$\mu(A) = \sum_{n \geq 0} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A \cap A_n) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$$

Donc, si on passe à l'inf sur tous les recouvrements de A par les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$ on obtient l'inégalité inverse : $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. $\square$

Exercice 85 (Image directe). Soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application. Montrer que si μ^* est une mesure extérieure sur $\mathbf{E}$ alors la fonction d'ensembles définie par l'expression suivante est une mesure extérieure sur $\mathbf{F}$:

$$\mu_f^*(A) := \mu^*(f^{-1}(A)), \forall A \subseteq \mathbf{F}$$

Exercice 86. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on pose :

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E); \forall E \in \mathcal{T}, A \subseteq E\}$$

- 1) Montrer que pour tout $A \subseteq \mathbf{E}$ il existe une partie $A_0 \in \mathcal{T}$ telle que $A \subseteq A_0$ et $\mu^*(A) = \mu(A_0)$.
- 2) Montrer que $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure extérieure.

3.2.2 Mesurabilité au sens de A. Caratheodory

Définition 31. Soit $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ une mesure extérieure. On dira que la partie $A \subseteq \mathbf{E}$ est μ^* -mesurable au sens de Carathéodory si :

$$\forall X \subseteq \mathbf{E}, \quad \mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c)$$

Théorème 9 (A. Caratheodory). Soit $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ une mesure extérieure. Alors, la famille des parties de $\mathbf{E}$ qui sont μ^* -mesurables, que l'on désigne par :

$$\mathcal{T}(\mu^*) := \{A \subseteq \mathbf{E}; \forall X \subseteq \mathbf{E}, \quad \mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c)\}$$

est une tribu sur $\mathbf{E}$ telle que la restriction $\mu|_{\mathcal{T}(\mu^*)} : \mathcal{T}(\mu^*) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure positive sur $\mathbf{E}$.

Démonstration. i) La famille $\mathcal{T}(\mu^*)$ des parties μ^* -mesurables est stable par le passage au complémentaire, car si $A \in \mathcal{T}(\mu^*)$ alors en échangeant la position de A par A^c on obtient la relation de mesurabilité au sens de A. Caratheodory.

ii) Prenons deux parties A et $B \in \mathcal{T}(\mu^*)$. Noter que par la sous-additivité de la mesure extérieure μ^* on obtient l'inégalité suivante :

$$X = X \cap (A \cup B) \cup X \cap (A \cup B)^c \implies \mu^*(X) \leq \mu^*(X \cap (A \cup B)) + \mu^*(X \cap (A \cup B)^c)$$

D'autre part, par définition de la μ^* -mesurabilité on peut écrire $\forall X \subseteq \mathbf{E}$,

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \\ &= \left(\mu^*(X \cap A \cap B) + \mu^*(X \cap A \cap B^c) \right) + \left(\mu^*(X \cap A^c \cap B) + \mu^*(X \cap A^c \cap B^c) \right) \end{aligned}$$

Ainsi, en observant que $X \cap (A \cup B) = X \cap (A \cap B) \cup X \cap (A \cap B^c) \cup X \cap (A^c \cap B) \cup X \cap (A^c \cap B^c)$ la sous-additivité de la mesure extérieure μ^* nous donne l'inégalité réciproque,

$$\mu^*(X \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(X \cap A \cap B) + \mu^*(X \cap A \cap B^c) + \mu^*(X \cap A^c \cap B)$$

que l'on combine avec la dernière égalité pour obtenir :

$$\mu^*(X) \geq \mu^*(X \cap (A \cup B)) + \mu^*(X \cap (A \cup B)^c)$$

Donc, la réunion $A \cup B \in \mathcal{T}(\mu^*)$.

iii) Maintenant, supposons que les parties A et $B \in \mathcal{T}(\mu^*)$ sont en plus disjointes, $A \cap B = \emptyset$; donc par μ^* -mesurabilité on peut écrire :

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Ceci montre alors que la fonction d'ensembles μ^* est additive sur la famille de parties mesurables $\mathcal{T}(\mu^*)$.

iv) Soit $A_n \in \mathcal{T}(\mu^*)$ une suite que l'on peut supposer disjointe. En effet, si on pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$, ceci nous donne suite disjointe dont la réunion $\bigcup B_n = \bigcup A_n$. En plus,

les $B_n \in \mathcal{T}(\mu^*)$ car on a vu que la famille $\mathcal{T}(\mu^*)$ est stable par la complémentation et l'union ce qui implique qu'elle est stable par l'intersection et la différence.

Prenons donc une suite disjointes de parties $A_n \in \mathcal{T}(\mu^*)$ et posons $C_n = A_0 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{T}(\mu^*)$ pour avoir une suite croissante telle que $A = \bigcup A_n = \bigcup C_n$. Dans ces conditions, la mesurabilité permet d'écrire pour tout $X \subseteq \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned}\mu^*(X \cap C_n) &= \mu^*((X \cap C_n) \cap A_n) + \mu^*((X \cap C_n) \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(X \cap A_n) + \mu^*(X \cap C_{n-1}) \quad \text{car } A_m \subseteq A_n^c, \forall m \neq n\end{aligned}$$

Cette expression nous donne par récurrence que $\mu^*(X \cap C_n) = \sum_{k=1}^{k=n} \mu^*(X \cap A_k)$. D'autre part, comme on a $A^c \subseteq C_n^c$; par monotonie de la mesure extérieure μ^* on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\mu^*(X) = \mu^*(X \cap C_n) + \mu^*(X \cap C_n^c) &\geq \left(\sum_{k=1}^{k=n} \mu^*(X \cap A_k) \right) + \mu^*(X \cap A^c) \\ &\geq \left(\sum_{n \geq 0} \mu^*(X \cap A_n) \right) + \mu^*(X \cap A^c) \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (3.1) \\ &\geq \mu^*(X \cap \left(\bigcup A_n \right)) + \mu^*(X \cap A^c) \quad (\mu^* \text{ sous-additive}) \\ &\geq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \geq \mu^*(X)\end{aligned}$$

Ceci montre que la partie $A = \bigcup A_n$ est μ^* -mesurable, et par conséquent, la famille des parties μ^* -mesurables au sens de A. Caratheodory est une tribu. En outre, si dans l'inégalité (1) on prend la partie $X = \bigcup A_n$ on en déduit que la mesure extérieure μ^* est σ -additive, $\mu^*(\bigcup A_n) = \sum \mu^*(A_n)$, sur la tribu $\mathcal{T}(\mu^*)$. Autrement dit, la restriction de $\mu^* : \mathcal{T}(\mu^*) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure positive sur $\mathbf{E}$. $\square$

Corollaire 9. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de partie sur un ensemble $\mathbf{E}$ et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ une prémesure. Alors, la tribu des parties de $\mathbf{E}$ qui sont μ^* -mesurables au sens de Caratheodory contient la tribu engendrée par l'algèbre $\mathcal{A}$ ie. : $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mu^*)$. En particulier, la mesure extérieure μ^* prolonge la prémesure μ en une mesure positive sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$.

Démonstration. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $X \subseteq \mathbf{E}$. Noter que par définition de la mesure extérieure μ^* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $A_n \in \mathcal{A}$ telle que $X \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n$ avec

$$\sum_{n \geq 0} \mu(A_n) < \mu^*(X) + \varepsilon$$

D'autre part, observer que puisque $X \cap A \subseteq \bigcup_{n \geq 0} (A_n \cap A)$ et $X \cap A^c \subseteq \bigcup_{n \geq 0} (A_n \cap A^c)$ on pourra écrire,

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n \geq 0} \mu(A_n \cap A^c) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) < \mu^*(X) + \varepsilon$$

Ainsi, en faisant tendre $\varepsilon > 0$ vers zéro on obtient $\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leq \mu^*(X)$. Par conséquent, toutes les parties $A \in \mathcal{A}$ sont μ^* -mesurables au sens de Caratheodory, c'est-à-dire $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(\mu^*)$.

Enfin, puisque $\mathcal{T}(\mu^*)$ est une tribu il s'ensuit que la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mu^*)$. $\square$

Pour fini cette partie on va démontrer un théorème de coïncidence des deux mesures en utilisant la continuité inférieure et supérieure des mesures positives, et on va utiliser aussi les classes monotones.

Théorème 10 (Unicité de prolongement de Hahn). *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de parties sur un ensemble $\mathbf{E}$, et $\mu : (\mathbf{E}, \mathcal{A}) \rightarrow [0, +\infty]$ désigne une prémesure σ -finie ie. :*

$$\exists (A_n) \subseteq \mathcal{A}, \quad \mathbf{E} = \bigcup_{n \geq 0} A_n \quad \text{telle que} \quad \mu(A_n) < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La prémesure μ se prolonge de façon unique en une mesure positive sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$.

Démonstration. Noter que d'après le corollaire précédent, la prémesure μ se prolonge en une mesure positive sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mu^*)$; où μ^* désigne la mesure extérieure sur $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ définie à partir de la prémesure μ par le procédé de A. Caratheodory.

Supposons alors qu'il existe deux mesures positives μ_1 et $\mu_2 : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow [0, +\infty]$ qui prolongent la prémesure μ et telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A), \forall A \in \mathcal{A}$. De même, supposons que la suite A_n donnée par le théorème est croissante³.

Avec ces données, considérons la famille de parties $\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu_1(A) = \mu_2(A)\} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

1) Le cas des mesures positives finies : $\mu_1(\mathbf{E}) < +\infty$ et $\mu_2(\mathbf{E}) < +\infty$.

D'abord, noter que par hypothèse l'algèbre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Montrons alors que la famille de parties $\mathcal{M}$ est une classe monotone sur l'ensemble $\mathbf{E}$. En effet, si $B_n \in \mathcal{M}$ désigne une suite de parties croissante on aura par continuité inférieure des mesures positives,

$$\mu_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_1(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_2(B_n) = \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$$

De la même façon, puisque les mesures μ_1 et μ_2 sont finies; alors grâce à la continuité supérieure des mesures positives on montre que pour toute suite décroissante $C_n \in \mathcal{M}$ l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \mathcal{M}$.

Donc, $\mathcal{M}$ est une classe monotone sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

Ainsi, puisque l'algèbre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ il s'ensuit que la classe monotone engendrée $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$. Donc, d'après le lemme fondamental des classes monotones, la σ -algèbre engendrée $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Par conséquent, $\mu_1 = \mu_2$ sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$.

2) Le cas général. L'idée ici, consiste à associer à la suite croissante $A_n \in \mathcal{A}$ deux suites de mesures positives définies par le principe de restriction :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall B \in \sigma(\mathcal{A})), \quad \mu_n^{(1)}(B) = \mu_1(A_n \cap B) \quad \text{et} \quad \mu_n^{(2)}(B) = \mu_2(A_n \cap B)$$

Noter que $\mu_n^{(1)}(\mathbf{E}) = \mu_1(A_n) < +\infty$ et $\mu_n^{(2)}(\mathbf{E}) = \mu_2(A_n) < +\infty$, donc les mesures positives $\mu_n^{(1)}$ et $\mu_n^{(2)}$ sont finies, de plus elles coïncident sur l'algèbre $\mathcal{A}$, car :

$$\forall B \in \mathcal{A} \implies \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap B \in \mathcal{A} \implies \mu_1(A_n \cap B) = \mu_2(A_n \cap B) \implies \mu_n^{(1)}(B) = \mu_n^{(2)}(B)$$

Ainsi, puisque les suites de mesures positives finies $\mu_n^{(1)}$ et $\mu_n^{(2)}$ coïncident sur l'algèbre $\mathcal{A}$; elles coïncident donc sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$. De même, puisque pour toute partie $B \in \sigma(\mathcal{A})$ la suite de parties $A_n \cap B \in \sigma(\mathcal{A})$ est croissante et converge vers $B = \bigcup (A_n \cap B)$; ceci permet d'écrire que

$$\mu_1(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_1(A_n \cap B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_2(A_n \cap B) = \mu_2(B)$$

Par conséquent, les mesures positives μ_1 et μ_2 coïncident sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$. $\square$

3. Remarquer que si on prend la suite $B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ (algèbre) on aura $\mu(B_n) \leq \mu(A_0) + \dots + \mu(A_n) < +\infty$ avec $\mathbf{E} = \bigcup B_n$.

3.2.3 Mesures et tribus complètes

Définition 32. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Une partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ telle que $\mu(A) = 0$ est dite de mesure nulle.
2. Une partie $A \subseteq \mathbf{E}$ est dite μ -négligeable si il existe une partie mesurable $B \in \mathcal{T}$ de mesure nulle et telle que $A \subseteq B$.
3. On dira que la mesure μ est complète sur la tribu $\mathcal{T}$ (ou $\mathcal{T}$ est complète pour μ) si toutes les parties μ -négligeables sont $\mathcal{T}$ -mesurables, c'est-à-dire ; pour toute partie de mesure nulle $A \in \mathcal{T}$ on a,

$$\forall B \subseteq A \implies B \in \mathcal{T}$$

On dira aussi que $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré complet.

La proposition suivante est un exercice facile laissé au soin de l'étudiant :

Proposition 52. Dans un espace mesuré $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ les propriétés suivantes sont vraies.

1. Si la partie $A \subseteq \mathbf{E}$ est μ -négligeable alors toute partie $B \subseteq A$ est également μ -négligeable.
2. Si les termes de la suite de parties $A_n \in \mathcal{T}$ sont de mesure nulle (resp. μ -négligeables) alors la réunion $\bigcup A_n \in \mathcal{T}$ est de mesure nulle (resp. μ -négligeable).

Le théorème suivant achève l'énoncé du théorème de A. Caratheodory.

Théorème 11. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble muni d'une mesure extérieure, $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$. Alors, l'espace mesuré $(\mathbf{E}, \mathcal{T}(\mu^*), \mu^*)$ est complet.

Démonstration. Soit $A \subseteq \mathbf{E}$ une partie telle que $\mu^*(A) = 0$. Donc, par sous-additivité de la mesure extérieure μ^* on aura :

$$\mu^*(X) \leq \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) = \mu^*(X \cap A^c) \quad \text{car} \quad 0 \leq \mu^*(X \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$$

Ainsi, comme par monotonie de μ^* on a aussi $\mu^*(X \cap A^c) \leq \mu^*(X)$ on en déduit que pour toute partie $X \subseteq \mathbf{E}$ on a la condition de Caratheodory, $\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c)$ qui entraîne $A \in \mathcal{T}(\mu^*)$. Par conséquent, la mesure positive μ^* est complète. $\square$

Le théorème suivant nous donne la méthode pratique permettant de compléter une positive donnée.

Théorème 12 (Complétion). Etant donné un espace mesuré $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$; on pose :

$$\mathcal{N}(\mu) = \{N \in \mathcal{T}; \mu(N) = 0\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{T}}(\mu) := \{B \cup A; \text{ où } A \in \mathcal{T} \text{ et } \exists N \in \mathcal{N}(\mu), B \subseteq N\}$$

Alors, on a les propositions suivantes :

1. $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$ est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$.
2. La fonction d'ensembles, $\overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$ où $A \in \mathcal{T}$ et $B \subseteq \mathbf{E}$ une partie μ -négligeable ; est une mesure positive sur $\mathbf{E}$ qui est complète sur la tribu $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$.
3. Le couple $(\overline{\mathcal{T}}(\mu), \overline{\mu})$ est la plus petite complétion de $(\mathcal{T}, \mu)$.

Démonstration. 1) Noter que la famille de parties $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$ est visiblement stable par les réunions dénombrables. Montrons alors qu'elle est également stable par le passage aux complémentaires.

Soit $X \in \overline{\mathcal{T}}(\mu)$, donc il existe des parties $A \in \mathcal{T}$ et des parties $B \subseteq N \in \mathcal{N}(\mu)$ telles que $X = A \cup B$. Observer que si on remplace B par $B_1 = B \setminus A$ et N par $N_1 = N \setminus A \in \mathcal{N}(\mu)$ on obtient

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \cap (A \cap B) = A \cup B_1 \quad \text{tel que} \quad A \cap N_1 = A \cap (N \setminus A) = \emptyset \quad \text{avec} \quad B_1 \subseteq N_1$$

Ainsi, avec ces notations on voit que :

$$A \cup B = (A \cup N_1) \cap (N_1^c \cup B_1) \implies (A \cup B)^c = (A \cup N_1)^c \cup (N_1 \cap B_1^c)$$

Ainsi, puisque $(A \cup N_1)^c \in \mathcal{T}$ et $N_1 \cap B_1^c \subseteq N_1 \in \mathcal{N}(\mu)$; on en déduit que le complémentaire $(A \cup B)^c \in \overline{\mathcal{T}}(\mu)$. Donc, $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$ est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

2) D'abord, noter que la fonction d'ensembles $\bar{\mu}(A \cup B) := \mu(A)$ est bien définie sur $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$. Car, avec les notations ci-dessus, si on a $A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2$ avec $B_i \subseteq N_i \in \mathcal{N}(\mu)$ on voit que

$$A_1 \subseteq A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 \subseteq A_2 \cup N_2 \implies \mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$$

Ainsi, en échangeant la partie A_1 par la partie A_2 dans la dernière implication; on déduit que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ et que par suite $\bar{\mu}(A_1 \cup B_1) = \bar{\mu}(A_2 \cup B_2)$.

La σ -additivité se $\bar{\mu}$ se vérifie de la manière suivante : on prend une suite disjointe $A_n \cup B_n$ avec $A_n \in \mathcal{T}$ et les B_n sont μ -négligeables. Ainsi, comme les A_n sont disjoints et $\bigcup B_n$ est μ -négligeable on obtient :

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n \geq 0} (A_n \cup B_n)\right) = \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) = \sum_{n \geq 0} \bar{\mu}(A_n \cup B_n)$$

Par conséquent, la fonction d'ensembles $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{T}}(\mu) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure positive qui prolonge la mesure positive μ ie. $\bar{\mu}(A) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{T}$.

3) Considérons une partie $A \cup B \in \overline{\mathcal{T}}(\mu)$ avec $A \in \mathcal{T}$ et $B \subseteq N \in \mathcal{N}(\mu)$. Noter alors que si on suppose $\bar{\mu}(A \cup B) = \mu(A) = 0$; on aura dans ces conditions, $A \cup B \subseteq A \cup N \in \mathcal{N}(\mu)$. Ainsi, comme la partie $A \cup B$ est μ -négligeable; elle appartient donc à la tribu $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$. Par conséquent, la mesure $\bar{\mu}$ est complète sur la tribu $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$.

Enfin, supposons que la mesure positive $\bar{\mu}$ est complète sur une tribu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ qui contient la tribu $\mathcal{T}$. Alors, sous l'hypothèse de complétude sur $\mathcal{S}$ on voit que toutes les parties μ -négligeables appartiennent à $\mathcal{S}$; il s'ensuit que la tribu $\overline{\mathcal{T}}(\mu) \subseteq \mathcal{S}$. Donc, $\overline{\mathcal{T}}(\mu)$ la plus petite tribu qui rend la mesure positive μ complète. $\square$

Pour finir cette section, on résume les résultats prouvés et discutés. Ci-dessus, étant une algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ et une prémesure σ -finie $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ nous avons établi les affirmations suivantes :

1. La prémesure μ induit une mesure extérieure $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ définie par l'expression :

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum \mu(A_n), \forall A_n \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigcup A_n\right\}$$

2. La famille de parties qui vérifient la condition de μ^* -mesurabilité au sens de Caratheodory,

$$\mathcal{T}(\mu^*) = \{A \subseteq \mathbf{E}; \mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c), \forall X \subseteq \mathbf{E}\}$$

est une tribu sur $\mathbf{E}$ et qui contient la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$.

3. La restriction de la mesure extérieure $\mu^* : \mathcal{T}(\mu^*) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure positive complète qui coïncide avec la prémesure μ sur l'algèbre $\mathcal{A}$.
4. L'unique prolongement de la prémesure μ en une mesure positive sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$ est égale à la restriction de la mesure extérieure μ^* sur la tribu $\sigma(\mathcal{A})$.
5. Puisque la tribu des parties μ^* -mesurables est complète elle contient donc la complétion de la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$. C'est-à-dire, avec les notions ci-dessus, on a $\overline{\sigma(\mathcal{A})} \subseteq \mathcal{T}(\mu^*)$ et aussi la mesure complétée $\bar{\mu}^* = \mu^*$.

Problème : Etant donnée une prémesure positive σ -finie ; a-t-on l'égalité des tribus complètes :

$$(\overline{\sigma(\mathcal{A})}, \overline{\mu_*}) = (\mathcal{T}(\mu_*), \mu_*^*)?$$

La proposition suivante fournit une réponse affirmative à la question posée ; sa démonstration sera admise.

Proposition 53. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ une prémesure σ -finie. Alors, la complétion de la tribu engendrée $\overline{\sigma(\mathcal{A})}$ coïncide avec la tribu de Caratheodory $\mathcal{T}(\mu^*)$ où μ^* est la mesure extérieure associée à la prémesure μ . Autrement dit, on a $\overline{\sigma(\mathcal{A})} = \mathcal{T}(\mu^*)$.

Exercice 87. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide. Montrer que la fonction d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \{0, 1\}$ définie par les expressions,

$$\forall A \subseteq \mathbf{E}, \quad \mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

est une mesure extérieure dont la tribu des parties μ^* -mesurables est $\{\emptyset, \mathbf{E}\}$.

3.3 Discussions et compléments

3.3.1 Caractérisation de la mesure de Lebesgue

Sur le semi-anneau des pavés de l'espace euclidien réel à m -dimension, $P_g = \{\prod_{i=1}^{i=m} [a_i, b_i] ; a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, nous avons vu que la fonction volume

$$\lambda_m(\prod_{i=1}^{i=m} [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{i=m} (b_i - a_i)$$

est additive sur P_g . Donc, d'après les résultats développés ci-dessus, la fonction d'ensembles λ_m se prolongue sur la tribu borélienne de l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$ en une mesure positive appelée mesure de Borel que l'on a désignée par le même symbole : $\lambda_m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty]$. Arrivant à ce stade la complétion de la tribu borélienne s'impose ; c'est ce que va introduire la définition suivante.

Définition 33. La complétion de la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ par rapport à la mesure de Borel λ_m s'appelle tribu de Lebesgue $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^m)$, de même, la mesure positive complète qui lui est associée s'appelle mesure positive de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$; elle est désignée par le même symbole : $\lambda_m : \mathcal{L}_0(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty]$.

Théorème 13 (Unicité de la mesure de Borel-Lebesgue). Soit $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty]$ une mesure positive qui vérifie les deux propriétés,

1. $\mu([0, 1]^m) = 1$;
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)), \quad \mu(A + x) = \mu(A)$;

Alors, pour tout pavé $\prod_{i=1}^{i=m} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^m$, $\mu(\prod_{i=1}^{i=m} [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{i=m} (b_i - a_i)$. C'est-à-dire, la mesure positive μ coïncide avec la mesure de Borel $\mu = \lambda_m$.

Démonstration. Ici, on donnera une démonstration en dimension $m = 1$ qui se généralise à la dimension supérieure $m \geq 2$.

i) **La mesure μ est σ -finie.** Par la propriété 2) qui exprime l'invariance de la mesure μ par translation on conclut que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\mu([n, n+1]) = \mu([0, 1] + n) = \mu([0, 1]) = 1$$

Ceci entraîne donc que la mesure μ est σ -finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; car $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$.

ii) **La mesure des points**, $\mu(\{x\}) = 0$. Observer que l'invariance par translation permet d'établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu(\{x\}) = \mu(\{0\} + x) = \mu(\{0\})$$

Montrons alors que $\mu(\{0\}) = 0$. En effet, puisque pour tout entier $n > 0$ on a la réunion disjointe des singletons $\{\frac{1}{n}\} \cup \{\frac{2}{n}\} \cup \dots \cup \{\frac{n}{n}\} \subset [0, 1]$ il s'ensuit que

$$\mu(\{\frac{1}{n}\} \cup \{\frac{2}{n}\} \cup \dots \cup \{\frac{n}{n}\}) = n\mu(\{0\}) \leq \mu([0, 1]) = 1 \implies n\mu(\{0\}) \leq 1 \implies \mu(\{0\}) = 0$$

iii) **La mesure des intervalles**, $\mu([a, b]) = b - a$. Puisque maintenant on sait que les points sont de mesure nulle cela entraîne que la μ -mesure des intervalles ne change pas lorsque on ferme ou lorsqu'on ouvre leurs extrémités :

$$\mu([a, b]) = \mu(]a, b]) = \mu([a, b[) = \mu(]a, b[)$$

De même, notons que par l'invariance par translation on observe que pour tout segment $[a, b]$ on a,

$$\mu([a, b]) = \mu([0, b - a] + a) = \mu([0, b - a])$$

Ceci monte que le calcul de la mesure des segments de type $[a, b]$ se ramène à celui des segments de type $[0, x]$ avec $x > 0$. En effet, si on part de l'observation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu([0, x]) = \mu(]0, x]) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{k=n} \left[\frac{(k-1)x}{n}, \frac{kx}{n}\right]\right) = n\mu\left(]0, \frac{x}{n}]\right)$$

on en déduit que pour $x = 1$ la mesure $\mu([0, \frac{1}{n}]) = \frac{1}{n}$. Plus généralement, pour tout couple de rationnels $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ on déduit que

$$\mu\left(\left[\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right]\right) = \mu\left(\left[\frac{pq'}{qq'}, \frac{p'q}{qq'}\right]\right) = \mu\left(\bigcup_{k=pq'+1}^{k=p'q} \left[\frac{(k-1)}{qq'}, \frac{k}{qq'}\right]\right) = (p'q - pq')\mu\left(]0, \frac{1}{qq'}]\right) = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}$$

Enfin, pour tout couple de réels $a < b$ en fixant des suites monotones de nombres de rationnels telles que $a < r'_{n+1} \leq r'_n < r_n \leq r_{n+1} < b$ avec $r'_n \rightarrow a$ et $r_n \rightarrow b$; on obtient ainsi une suite croissante d'intervalles $I_n =]r'_n, r_n[$ dont l'union $\bigcup I_n = [a, b]$. Donc, par continuité inférieure des mesures positives on obtient :

$$]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]r'_n, r_n[\implies \mu([a, b]) = \mu(]a, b]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(]r'_n, r_n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n - r'_n) = b - a$$

Par conséquent, puisque mesure positive μ coïncident avec la mesure de Borel λ_1 sur les intervalles de type $]a, b]$; elles sont donc égales sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

3.3.2 L'ensemble de G. Cantor

Dans la démonstration ci-dessus, nous avons vu que les singletons de $\mathbb{R}$ ont une mesure nulle par rapport à la mesure de Borel λ_1 , donc en raison de la σ -additivité des mesures positives on conclut que toutes parties dénombrables de $\mathbb{R}$ sont également de mesure nulle. Par exemple, on a :

$$\lambda_1(\mathbb{N}) = \lambda_1(\mathbb{Z}) = \lambda_1(\mathbb{Q}) = \lambda_1(\{x_n \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}\}) = 0$$

Cette conséquence nous conduit à se demander : existe-t-il une partie non dénombrable qui soit mesurable et de mesure nulle par rapport à la mesure de Borel λ_1 ?

Ci-dessous, nous allons construire l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0, 1]$ qui est compact, d'intérieur vide et non dénombrable, en plus sa mesure est nulle par rapport à la mesure de Borel λ_1 .

Étape 0 : On pose $C_0 = [0, 1]$.

Étape 1 : On pose $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ ce qui nous donne une partie compacte ayant deux composantes connexes compactes de longueur $\frac{1}{3}$. La partie compacte C_1 est alors obtenue en découpant C_0 en trois segments de longueurs égales, puis on a supprimé la composante du milieu. Noter aussi que sa mesure $\lambda_1(C_1) = \frac{2}{3}$.

Étape 2 : On applique l'opération de l'étape 1 sur les composantes connexes de C_1 pour obtenir la partie compacte

$$C_2 = [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, \frac{3^2}{3^2}]$$

Dans cette étape on note que la partie compacte C_2 est constituée par 2^2 composantes connexes de même longueur $\frac{1}{3^2}$. De plus, noter que la mesure $\lambda_1(C_2) = \frac{2^2}{3^2}$.

Étape 3 : En continuant ce processus par récurrence; on obtient une suite de parties compactes C_n ayant 2^n composantes connexes de même longueur $\frac{1}{3^n}$, donc la mesure $\lambda_1(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$.

Étape 4 : La suite des parties compactes (C_n) est décroissante, donc son intersection $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ n'est pas vide mais sa mesure de Borel est nulle, car par continuité de λ_1 on voit que

$$\lambda_1(C) = \lambda_1\left(\bigcap_{n \geq 0} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$$

L'ensemble $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ s'appelle ensemble de Cantor, on montre qu'il est non dénombrable et bijectif avec $[0, 1]$.

Exercice 88. Montrer que l'ensemble de Cantor $C \subset [0, 1]$ est d'intérieur vide relativement à la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Exercice 89. On fixe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, et pour tout réel $\varepsilon > 0$ on pose

$$W_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{3^{n+1}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{3^{n+1}}[$$

1) Vérifier que la longueur $\lambda_1(W_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

2) En déduire qu'il existe dans $\mathbb{R}$ des ouverts denses dont la longueur est arbitrairement très petite.

3.3.3 Vitali : il existe une partie non borélienne dans $\mathbb{R}$.

Dans le segment $[0, 1]$ on considère la relation d'équivalence binaire $\mathcal{R}$ définie par,

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Noter que si on désigne par E le sous-ensemble de $[0, 1]$ dans lequel on met (on choisit) un seul représentant de chaque classe d'équivalence $\text{cl}(x) = \{y \in [0, 1] ; x - y \in \mathbb{Q}\}$ on en tire les deux remarques suivantes :

1) $\forall p, q \in \mathbb{Q}, \quad (E + p) \cap (E + q) = \emptyset \iff p \neq q$

2) $[0, 1] \subset \bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (E + p) \subset [-1, 2]$

Ainsi, si on suppose que le sous-ensemble $E \subseteq [0, 1]$ est un borélien, la monotonie et la σ -additivité de la mesure de Borel permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$1 \leq \lambda_1\left(\bigcup_{p \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (E + p)\right) = \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda_1(E + p) \leq 3$$

Ceci est alors absurde, car $\lambda_1(E + p) = \lambda_1(E) > 0$ et l'ensemble des indices $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ de la somme précédente est infini. Par conséquent, la partie E n'est pas borélienne.

Pour avoir des exemples de parties non boréliennes dans $\mathbb{R}^m$ il suffit qu'on considère le produit cartésien

$$E \times [0, 1]^{m-1} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

Conclusion : pour tout entier $m \geq 1$ la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est strictement incluse dans l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$. En outre, la mesure de Lebesgue λ_m ne se prolonge pas sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ en une mesure positive qui soit invariante par translation.

Remarque 7. On montre que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est non dénombrable mais bijective avec $\mathbb{R}$. En revanche, la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^m)$ est en bijection avec l'ensemble de toutes les parties $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$.

3.3.4 Mesures de Borel

La mesure de Borel-Lebesgue λ_m étudiée ci-dessus sur l'espace topologique euclidien $\mathbb{R}^m$ possède des propriétés importantes que nous énumérerons ci-dessous :

- 1) La mesure λ_m prend des valeurs finies sur les parties compactes de $\mathbb{R}^m$. C'est-à-dire, pour toute partie compacte $K \subseteq \mathbf{E}$ le réel $\lambda_m(K) < +\infty$.
- 2) Pour toute partie borélienne $A \subseteq \mathbb{R}^m$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une partie compacte $K \subset \mathbb{R}^m$ (resp. ouverte $U \subseteq \mathbb{R}^m$) telles que $K \subseteq A \subseteq U$ vérifiant les inégalités $\lambda_m(A \setminus K) < \varepsilon$ et $\lambda_m(U \setminus A) < \varepsilon$.
- 3) Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ l'expression suivante,

$$\lambda_m^*(A) := \inf\{\lambda_m(U); A \subseteq U(\text{ouvert})\}$$

est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^m$ dont la tribu des parties λ_m^* -mesurables au sens de Caratheodory coïncide avec la tribu complète de Lebesgue $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^m)$.

Ces propriétés de la mesure de Lebesgue λ_m sont aussi vérifiées par une très large classe de mesures positives dites de Borel-Radon

Définition 34. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé localement compact.

1. Une mesure positive μ sur $\mathbf{E}$ est dite de Borel si elle est définie sur tribu qui contient la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.
2. Une mesure positive de Borel μ qui est finie sur les parties compactes de $\mathbf{E}$ s'appelle mesure positive de Radon.
3. Si pour toute partie borélienne $A \subseteq \mathbf{E}$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une partie compacte $K \subseteq A$ (resp. ouverte $U \supset A$) telles que $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$ on dira que μ est une mesure régulière.

L'étude des mesures positives régulières sur un espace topologique séparé et localement compact fera l'objet d'un chapitre indépendant.

Calcul intégrale au sens de Lebesgue

4.1 Le principe μ -presque partout : μ -p.p

Définition 35. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une proposition logique $x \in \mathbf{E} \mapsto \mathcal{P}(x) \in \{V, F\}$ est dite μ -presque partout vraie si le sous-ensemble $\{x \in \mathbf{E}; \mathcal{P}(x) = F \text{ est fausse}\}$ est μ -négligeable. Dans ce cas, on écrit $\forall x \in \mathbf{E}, \mathcal{P}(x) = V \quad \mu$ -p.p.

Voici quelques exemples sur lesquels on va appliquer le principe de μ -presque partout vrai.

1) **Convergence μ -p.p** : Soit $f_n : (\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions telles que le sous-ensemble,

$$D = \{x \in \mathbf{E}; (f_n(x)) \text{ diverge}\}$$

Noter que le sous-ensemble D est défini au moyen de la proposition logique $\mathcal{P}(x)$: la suite numérique $(f_n(x))$ est divergente. Quand la partie D est μ -négligeable on dira que la suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction f μ -presque partout sur $\mathbf{E}$, et on écrit $f_n \rightarrow f \quad \mu$ -p.p.

2) **Egalité μ -p.p** : Étant données deux fonctions f et $g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$; on leur associe le sous-ensemble $A(f, g) = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq g(x)\}$. Ici, la partie $A(f, g)$ est définie par la proposition logique $\mathcal{P}(x)$: au point $x \in \mathbf{E}$, $f(x) \neq g(x)$. Lorsque la partie $A(f, g)$ est μ -négligeable on dira que les fonctions f et g sont égales μ -presque partout sur l'ensemble $\mathbf{E}$ et on écrit $f = g \quad \mu$ -p.p.

De même, si pour un couple de parties A et $B \subseteq \mathbf{E}$ les fonctions caractéristiques $\chi_A = \chi_B \quad \mu$ -p.p on dira alors que les parties A et B sont égales μ -presque partout, et on écrit $A = B \quad \mu$ -p.p.

Exercice 90. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et A, B deux parties de $\mathbf{E}$.

1) Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $A = B \quad \mu$ -p.p ;
2. $\chi_{A \setminus B} = \chi_{B \setminus A} = 0 \quad \mu$ -p.p
3. $A \Delta B$ est μ -négligeable.

2) En déduire que pour tout couple de parties mesurables X et $Y \subseteq \mathbf{E}$ on a l'équivalence :

$$X = Y \quad \mu$$
-p.p $\iff \mu(X \Delta Y) = 0$

Exemple 33. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si A et B sont des parties μ -négligeables alors pour toute partie $C \subseteq \mathbf{E}$ on a l'égalité :

$$A \cup C = B \cup C \quad \mu$$
-p.p

Par exemple, dans l'espace mesuré de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}$ on a les égalités :

$$A \cap \mathbb{Q} = \emptyset, \quad \lambda_1\text{-p.p.} \quad \text{et} \quad A \cup \mathbb{Q} = A \setminus \mathbb{Q} = A, \quad \lambda_1\text{-p.p.}$$

Exemple 34. Dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ on a les égalités μ -presque partout des fonctions suivantes :

$$\chi_{\mathbb{Q}} = 0 \quad \mu\text{-p.p.}, \quad \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = 1 \quad \mu\text{-p.p.},$$

Exemple 35. Dans l'espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda_1)$, la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\chi_{\{1\}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi, comme le singleton $\{1\}$ est λ_1 -négligeable on pourra alors dire que la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction nulle λ_1 -p.p. sur $[0, 1]$. Donc, on écrit : $f_n \rightarrow 0$ λ_1 -p.p. sur $[0, 1]$.

Exemple 36. Rappelons que la fonction partie entière, $x \in \mathbb{R} \mapsto [x] \in \mathbb{Z}$, est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par conséquent, puisque le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ est de mesure nulle par rapport à la mesure de Borel λ_1 on pourra affirmer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto [x] \in \mathbb{Z}$ est λ_1 -p.p. continue sur $\mathbb{R}$. De façon générale, si le sous-ensemble de discontinuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est λ_1 -négligeable on dira que f est λ_1 -p.p. continue sur $\mathbb{R}$.

4.2 Intégrale supérieure de Lebesgue

Dans le reste de ce chapitre, on va travailler avec la convention ¹ : $0 \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times 0 = 0$.

4.2.1 Le cas d'une fonction étagée positive

Définition 36. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, une fonction étagée mesurable positive où les réels $a_i \geq 0$, et les parties A_i forment une partition de $\mathbf{E}$ (ie. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ avec $\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i$). L'intégrale supérieure au sens de Lebesgue de la fonction étagée mesurable f audessus d'une partie mesurable $A \in \mathbf{E}$ est donnée par l'expression :

$$\int_A^* f d\mu := \sum_{i=1}^{i=n} a_i \mu(A_i \cap A)$$

Partant de la définition de l'intégrale supérieure d'une fonction étagée mesurable positive on tire les expressions suivantes :

- 1) $\forall B \in \mathcal{T}, \quad \int_{\mathbf{E}}^* \chi_B d\mu = \mu(B).$
- 2) $\forall A, B \in \mathcal{T}, \quad \int_A^* \chi_B d\mu = \mu(A \cap B) = \int_{\mathbf{E}}^* \chi_B \chi_A d\mu.$
- 3) $(\forall f \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}))(\forall A \in \mathcal{T}), \quad \int_A^* f d\mu = \int_{\mathbf{E}}^* f \chi_A d\mu$

Proposition 54. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions étagées $\mathcal{T}$ -mesurables positives. Alors, la correspondance $f \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu \in [0, +\infty]$ est une forme linéaire qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Cette convention est introduite pour régler la question du calcul de l'aire d'un rectangle dont la largeur e tend vers zéro tandis que sa longueur L tend vers $+\infty$; on va la justifier ci-dessous en utilisant le théorème de Beppo Levi connu par : théorème de convergence monotone.

1. $(\forall f, g \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}))(\forall \alpha \in \mathbb{R}), \quad \int_{\mathbf{E}}^* (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu + \int_{\mathbf{E}}^* g d\mu$
2. $\forall f, g \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad f \leq g \implies \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu \leq \int_{\mathbf{E}}^* g d\mu.$
3. $\forall f \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad f \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu = 0 \implies f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.}$
4. $\forall f, g \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad f = g \text{ } \mu\text{-p.p.} \implies \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu = \int_{\mathbf{E}}^* g d\mu.$
5. $\forall A \in \mathcal{T}, \mu(A) = 0 \implies \forall f \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad \int_A^* f d\mu = 0.$

Démonstration. Exercice. □

Notons que grâce à la linéarité de l'intégrale supérieure de Lebesgue on pourra démontrer que l'intégrale d'une fonction étagée mesurable et positive ne dépend pas de son expressions.

Plus précisément, étant donnée, $f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, où les parties mesurables A_i ne sont nécessairement disjoints deux à deux, on aura alors,

$$\int_{\mathbf{E}}^* f d\mu = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \mu(A_i)$$

En effet, si on pose $f(\mathbf{E}) = \{b_1, \dots, b_m\}$ et $B_i = f^{-1}(\{b_i\})$ on obtient une partition de $\mathbf{E}$. Cela permet d'écrire f sous sa forme standard $f = \sum_{i=1}^{i=m} b_i \chi_{B_i} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i}$.

Ainsi, comme pour tout $i = 1, \dots, n$ on a :

$$A_i = (A_i \cap B_1) \cup \dots \cup (A_i \cap B_m) \quad \text{et} \quad b_j \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i \cap B_j}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=n} a_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{j=n} a_j \mu\left((A_j \cap B_1) \cup \dots \cup (A_j \cap B_m)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} a_j \sum_{i=1}^{i=m} \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} a_j \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} \int_{\mathbf{E}} a_j \chi_{A_j \cap B_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{i=m} \int_{\mathbf{E}}^* b_i \chi_{B_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{i=m} b_i \mu(B_i) \end{aligned}$$

4.2.2 Le cas d'une fonction mesurable positive

Définition 37. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ l'intégrale supérieure sur A d'une fonction mesurable positive, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, est donnée par l'expression :

$$\int_A^* f d\mu = \sup \left\{ \int_A^* g d\mu; \forall g \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), g \leq f \right\}$$

Partant de cette définition on tire les remarques suivantes :

- 1) Pour toute partie mesurable, $A \in \mathcal{T}$, $\int_A^* f d\mu = \int_{\mathbf{E}}^* f \chi_A d\mu$.
- 2) Soient f et $g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ des fonctions mesurables telles que $f \leq g$. Noter que puisque on a l'inclusion :

$$\{h \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}); h \leq f\} \subseteq \{h \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}); h \leq g\}$$

il s'ensuit qu'on a l'inégalité

$$\sup \left\{ \int_A^* h d\mu; \forall h \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), h \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int_A^* h d\mu; \forall h \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), h \leq g \right\}$$

Autrement dit, on a l'inégalité :

$$\int_A^* f d\mu \leq \int_A^* g d\mu$$

- 3) Rappelons que dans le chapitre 2 on a vu que toute fonction mesurable positive $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ est la limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées $g_n \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R})$. Ainsi, par monotonie de l'intégrale supérieure, on voit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n \leq g_{n+1} \leq f \quad \implies \quad \forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbf{E}}^* g_n d\mu \leq \int_{\mathbf{E}}^* g_{n+1} d\mu \leq \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu$$

Ces inégalités motivent le théorème suivant démontré par Beppo Levi.

Théorème 14 (Convergence monotone de Beppo Levi). Si $f_n : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement μ -presque partout vers une fonction mesurable positive $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, alors ; pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A^* f_n d\mu = \int_A^* \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_A^* f d\mu$$

Démonstration. Dans cette preuve on suppose que $A = \mathbf{E}$, le cas général s'en déduit facilement.

- 1) Avec les données du théorème on pourra écrire pour tout entier $n \geq 0$,

$$f_n \leq f_{n+1} \leq f \quad \implies \quad \int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu \leq \int_{\mathbf{E}}^* f_{n+1} d\mu \leq \inf_{\mathbf{E}}^* f d\mu \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu \leq \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu$$

- 2) Considérons une fonction étagée mesurable $g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ telle que $g \leq f$, et pour tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$ posons :

$$E_n(\varepsilon) := \{x \in \mathbf{E}; \varepsilon g(x) \leq f_n(x)\} \in \mathcal{T}$$

Noter alors que la suite de parties mesurables $E_n(\varepsilon)$ est croissante et qu'on a $\bigcup_{n \geq 0} E_n(\varepsilon) = \mathbf{E}$. Car presque partout $x \in \mathbf{E}$ la suite numérique $f_n(x)$ est croissante et converge vers $f(x)$, donc pour n assez grand on aura $\varepsilon g(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$; donc $x \in E_n(\varepsilon)$. Ainsi, avec ces notations on peut écrire

$$\int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu \geq \int_{\mathbf{E}}^* f_n \chi_{E_n} d\mu = \int_{E_n}^* f_n d\mu \geq \varepsilon \int_{E_n}^* g d\mu \quad \implies \quad \sup_{n \geq 0} \int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu \geq \varepsilon \sup_{n \geq 0} \int_{E_n}^* g d\mu$$

D'autre part, observer que si on écrit la fonction étagée $g = \sum_{k=1}^{k=m} a_k \chi_{A_k}$ on en déduit que l'intégrale supérieure

$$\int_{E_n}^* g d\mu = \sum_{k=1}^{k=m} a_k \mu(E_n \cap A_k)$$

donc par continuité inférieure de la mesure positive μ on obtient par passage à la limite :

$$\sup_{n \geq 0} \int_{E_n} g d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{k=m} a_k \mu(E_n \cap A_k) \right) = \sum_{k=1}^{k=m} a_k \mu(A_k) = \int_{\mathbf{E}} g d\mu$$

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 0} \int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu &\geq \varepsilon \sup_{n \geq 0} \int_{E_n} g d\mu \\ &\geq \varepsilon \sup_{n \geq 0} \int_{\mathbf{E}} g \chi_{E_n} d\mu \\ &= \varepsilon \sup_{n \geq 0} \left(\sum_{k=1}^{k=m} a_k \mu(E_n \cap A_k) \right) \\ &= \varepsilon \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{k=m} a_k \mu(E_n \cap A_k) \right) \\ &= \varepsilon \sum_{k=1}^{k=m} a_k \mu(A_k) \\ &= \varepsilon \int_{\mathbf{E}} g d\mu \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre le réel ε vers un dans la dernière inégalité on conclut que

$$\forall g \in \mathcal{E}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad g \leq f \implies \sup_{n \geq 0} \int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu \geq \int_{\mathbf{E}} g d\mu$$

Enfin, en passant à la borne supérieure sur les fonctions étagées $g \leq f$ on obtient l'inégalité inverse

$$\int_{\mathbf{E}} f d\mu \leq \sup_{n \geq 0} \int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu$$

Ceci achève la preuve du théorème de Beppo Levi. $\square$

Corollaire 10 (Lemme de Fatou). Soit $f_n : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors, pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ on a,

$$\int_A^* \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_A^* f_n d\mu$$

Démonstration. Observer que la suite de fonctions mesurables $g_n = \inf\{f_k; k \geq n\}$ est croissante, puis appliquer le théorème de Beppo Levi. $\square$

La proposition suivante qui donne quelques propriétés remarquables de l'intégrale supérieure se démontre par application du théorème de la convergence monotone de Beppo Levi.

Proposition 55. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{M}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions mesurables $\mathcal{T}$ -mesurables positives. Alors, la fonction $f \in \mathcal{M}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ est une forme linéaire qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\forall f, g \in \mathcal{M}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}))(\forall \alpha \in \mathbb{R}^+), \quad \int_{\mathbf{E}}^* (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu + \int_{\mathbf{E}}^* g d\mu$
2. $\forall f, g \in \mathcal{M}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad f \leq g \implies \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu \leq \int_{\mathbf{E}}^* g d\mu.$
3. $\forall f, g \in \mathcal{M}^+(\mathbf{E}, \mathbb{R}), \quad f = g \text{ } \mu\text{-p.p.} \implies \int_{\mathbf{E}}^* f d\mu = \int_{\mathbf{E}}^* g d\mu.$

Exemple 37. Dans un espace mesuré $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ fixons une partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ de mesure finie (i.e. $\mu(A) < +\infty$). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ posons :

$$f_n(x) := n\chi_A(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Il est clair que la suite de fonctions mesurables $f_n = n\chi_A$ est croissante et converge simplement sur $\mathbf{E}$ vers la fonction,

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

qu'on notera $f = (+\infty)\chi_A$. Donc, si on applique le du théorème de Beppo Levi on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}}^* \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

Ainsi, comme pour tout $n \geq 0$ l'intégrale $\int_{\mathbf{E}}^* f_n d\mu = n\mu(A)$; on en déduit que si la mesure $\mu(A) = 0$ il s'ensuit que

$$\int_{\mathbf{E}}^* (+\infty)\chi_A d\mu = 0 \implies (+\infty) \times \mu(A) = 0$$

Noter que le calcul qu'on vient de développer peut être considéré comme une justification de la règle de calcul intégrale fixée ci-dessus, $(\pm\infty) \times 0 = 0 \times (\pm\infty)$, admise en calcul intégrale au sens de Lebesgue.

Exemple 38. On se propose de calculer l'intégrale au sens de Lebesgue d'une fonction mesurable positive, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{P}(\mathbf{E})) \rightarrow \mathbb{R}^+$ par rapport à la mesure de Dirac, δ_{x_0} où $x_0 \in \mathbf{E}$.

1) Pour toute partie $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$, $\int_{\mathbf{E}} \chi_A d\delta_{x_0} = \delta_{x_0}(A) = \chi_A(x_0)$.

2) Si $f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i}$ est positive on aura donc,

$$\int_{\mathbf{E}}^* f d\delta_{x_0} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \delta_{x_0}(A_i) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i}(x_0) = f(x_0)$$

3) Par le théorème de la convergence monotone on déduit alors que pour toute fonction positive, $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ l'intégrale supérieure,

$$\int_{\mathbf{E}}^* f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

C'est-à-dire, on choisit une suite croissante de fonctions étagées $g_n : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui converge simplement vers f , et ainsi par le théorème de Beppo Levi on aura,

$$\int_{\mathbf{E}} f d\delta_{x_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} g_n d\delta_{x_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x_0) = f(x_0)$$

Exercice 91. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne (mesurable). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{(f(x))^2 + 1/n^2}}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

- 1) Calculer la limite simple de la suite f_n .
- 2) Vérifier que la suite f_n est croissante.
- 3) Calculer la limite de la suite numérique, $\int_{[0,1]}^* f_n d\lambda_1$.

Exercice 92. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} n^\alpha \chi_{[n, n+2^{-n}]}$$

- 1) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne.
- 2) Calculer l'intégrale de Lebesgue supérieure, $\int_{\mathbb{R}}^* f(x) d\lambda_1$, (finie).
- 3) On considère les suites numériques $u_n = n$ et $v_n = n + (\frac{3}{4})^n$. Calculer les valeurs $f(u_n)$ et $f(v_n)$.
- 4) Conclure selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.2.3 Le cas général

Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle que toute fonction mesurable $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ induit les fonctions mesurables positives définies par :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{et} \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0) \quad \implies \quad f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Ainsi, dans ces conditions, pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ on pourra définir les intégrales supérieures des fonctions mesurables positives f^+ , f^- et $|f|$:

$$\int_A^* f^+ d\mu, \quad \int_A^* f^- d\mu \quad \text{et} \quad \int_A^* |f| d\mu$$

Définition 38. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. On dira que la fonction f est μ -intégrable au sens de Lebesgue sur la partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ si les intégrales supérieures $\int_A^* f^+ d\mu$ et $\int_A^* f^- d\mu$ sont finies. Dans ce cas l'intégrale de f sur la partie mesurable A est donnée par l'expression :

$$\int_A f d\mu := \int_A^* f^+ d\mu - \int_A^* f^- d\mu \in \mathbb{R}$$

Noter d'abord, que selon la définition de la μ -intégrabilité au sens de Lebesgue on voit qu'une fonction mesurable positive, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, est μ -intégrable au sens de Lebesgue sur une partie mesurable $A \in \mathcal{T}$, si son intégrale supérieure $\int_A^* f d\mu$ est finie. Dans ce cas, on aura,

$$\int_A f d\mu = \int_A^* f d\mu$$

Proposition 56. Une fonction mesurable, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, est μ -intégrable au sens de Lebesgue si et seulement, si sa valeur absolue $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue.

Démonstration. En effet, si les intégrales supérieures $\int_A^* f^+ d\mu$ et $\int_A^* f^- d\mu$ sont finies il en résulte que $|f|$ est μ -intégrable ; car l'intégrale supérieure suivante est finie,

$$\int_A^* |f| d\mu = \int_A^* f^+ d\mu + \int_A^* f^- d\mu$$

Inversement, du fait que les fonctions mesurables positives f^+ et f^- vérifient les inégalités suivantes $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$ il s'ensuit que si l'intégrale supérieure de $|f|$ sur A est finie, alors les intégrales supérieures $\int_A^* f^+ d\mu$ et $\int_A^* f^- d\mu$ sont finies. Donc, f est intégrable au sens de Lebesgue sur A . $\square$

Corollaire 11. Soit $g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une fonction positive μ -intégrable. Alors, toute fonction mesurable $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ telle que $|f| \leq g$ μ -p.p est μ -intégrable.

Démonstration. Exercice. $\square$

Les affirmations suivantes sont faciles à établir, leur justification est laissée au soin de l'étudiant.

1) Pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ la fonction caractéristique χ_A est μ -intégrable si et seulement si la mesure $\mu(A)$ est finie, et on a :

$$\int_E \chi_A d\mu = \mu(A)$$

2) Pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ et pour toute fonction mesurable $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ qui est μ -intégrable sur $\mathbf{E}$ on a les propriétés :

i) $\int_A f d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \chi_A d\mu;$

ii) $|\int_A f d\mu| \leq \int_A |f| d\mu;$

iii) Si $f \geq 0$ μ -presque partout et telle que $\int_{\mathbf{E}} f d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ -p.p.

3) Pour tout couple de fonctions μ -intégrables f et $g : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on a les propriétés suivantes :

i) Si $f = g$ μ -presque partout alors $\int_{\mathbf{E}} f d\mu = \int_{\mathbf{E}} g d\mu.$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \int_{\mathbf{E}} (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int_{\mathbf{E}} f d\mu + \int_{\mathbf{E}} g d\mu$

iii) Si $f \leq g$ μ -presque partout alors $\int_{\mathbf{E}} f d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} g d\mu.$

Exemple 39. Ici, on considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{Card})$. Prenons alors une fonction mesurable, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (une suite de nombres réels positifs) et voyons sous quelle condition elle soit Card-intégrable ?

D'abord, observer que la fonction, $f = \sum_{n \geq 0} f(n) \chi_{\{n\}}$, cela permet de l'obtenir comme la limite de la

suite de suite croissante de fonctions étagées, $g_n = \sum_{k=0}^{k=n} f(k) \chi_{\{k\}}.$

Ainsi, comme l'intégrale au sens de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{N}} g_n d\text{Card} = \sum_{k=0}^{k=n} f(k)$$

le théorème de la convergence monotone implique que la fonction f (suite) est Card-intégrable au sens de Lebesgue, si et seulement, si sa série numérique associée $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge².

Par conséquent, une fonction (suite) réelle $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ est Card-intégrable au sens de Lebesgue, si et seulement, si la série numérique qui lui est associée $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge absolument.

2. Le résultat de ce exemple, interprète le symple de sommation d'une série numérique $\sum_{n \geq 0}$ comme une intégrale au sens de Lebesgue.

Exercice 93. Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ on lui associe la mesure de Dirac $\delta_x : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que l'expression $\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} \delta_x$ définit une mesure positive sur $\mathbb{R}^m$.
- 2) Calculer l'intégrale supérieure au sens de Lebesgue d'une fonction étagée, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.
- 3) En déduire la caractérisation des fonctions μ -intégrables au sens de Lebesgue.

Exercice 94. Sur $\mathbb{R}$ muni de tribu borélienne on considère la mesure positive, $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, définie par,

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \delta_n$$

où δ_n désigne la mesure de Dirac.

- 1) Montrer que pour toute partie mesurable $A \subseteq \mathbb{R}$ on a, $\mu(A) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \chi_A(n)$.
- 2) En déduire que pour toute fonction étagée mesurable et positive, $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, l'intégrale supérieure de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}}^* g d\mu = \sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n^2}$$

- 3) Donner une caractérisation des fonctions mesurables (de signe quelconque) qui sont μ -intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
- 4) Les fonctions suivantes sont-elles μ -Lebesgue intégrables sur $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_2(x) = |x|^s, \quad s \in \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 95. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante ; où $\mathbb{R}^+$ est muni par sa mesure de Lebesgue.

- 1) Montrer que pour tous les réels positifs $a < b$ on a : $f(a)\chi_{[a,b]}(x) \leq f(x) \leq f(b)\chi_{[a,b]}(x), \forall x \in [a, b]$.
- 2) En déduire que, $\forall a < b, \quad (b-a)f(a) \leq \int_{[a,b]} f d\lambda_1 \leq f(b)(b-a)$.
- 3) Une fonction croissante, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, est-elle λ_1 -intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 96. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction μ -intégrable.

- 1) Montrer que la fonction d'ensemble définie ci-dessous est une mesure positive sur $\mathbf{E}$:

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \widehat{\mu}_f(A) := \int_A f d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \chi_A d\mu$$

- 2) On se propose de démontrer la proposition $\mathcal{P} : \forall A \in \mathcal{T}, \mu(A) = 0 \implies \widehat{\mu}_f(A) = 0$.
 - i) Montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie pour toute fonction f qui est étagée positive et μ -intégrable.
 - ii) En utilisant le théorème de convergence monotone (Beppo Levi); montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie pour toutes les fonctions μ -intégrables.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > n\}$ et $B_n = \mathcal{C}_{\mathbf{E}}^{A_n} = A_n^c$ (complémentaire).
 - i) Montrer que la suite de fonctions $f_n = f \chi_{B_n}$ est croissante, et calculer sa limite simple sur $\mathbf{E}$.
 - ii) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} f d\mu$.
 - iii) Établir l'inégalité : $n\mu(A_n) \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu - \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu$.
 - iv) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mu(A_n) = 0$.
- 4) Montrer que le résultat de iii) ne garantit pas la μ -intégrabilité de f .

4.3 Comparaison entre l'intégrale de Riemann et de Lebesgue

Dans ce paragraphe, on munit $\mathbb{R}$ par la mesure de Lebesgue λ_1 . Considérons alors une fonction continue positive, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et munissons le segment $[a, b]$ par l'équipartage $x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a)$ avec $k = 0, \dots, 2^n$. De plus, posons

$$m_k(f) = \inf\{f(x); x \in [x_k, x_{k+1}[\} \quad \text{où} \quad k = 0, \dots, 2^n - 1$$

Ainsi, avec ces notations on obtient une suite croissante de fonctions étagées mesurables et convergent uniformément vers f ; elles sont définies par l'expression :

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k(f) \chi_{[x_k, x_{k+1}[}$$

Noter alors que l'intégrale supérieure de la suite f_n est égale à la valeur :

$$\int_{[a,b]}^* f_n d\lambda_1 = \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k(f)(x_{k+1} - x_k)$$

qui coïncide avec la somme de Riemann de la fonction f associée à l'équipartage x_k . En suite, noter que si on applique le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) on obtient la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]}^* f_n d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} m_k(f)(x_{k+1} - x_k) \implies \int_{[a,b]}^* f d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx$$

Ainsi, en conséquence de ce qui précède on conclut qu'une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable relativement à la mesure de Lebesgue λ_1 , en plus, son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann.

En effet, Lebesgue a démontré un théorème qui caractérise les fonctions λ_1 -mesurables qui sont Riemann intégrables. Voici son énoncé :

Théorème 15 (Lebesgue). *Une fonction bornée, $f : ([a, b], \mathcal{B}([a, b])) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, est intégrable au sens de Riemann si, et seulement, si f est continue λ_1 -p.p. Elle est alors λ_1 -intégrable au sens de Lebesgue et ses deux intégrales coïncident ie. :*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda_1 = \int_a^b f(x) dx$$

Notons que le théorème de Lebesgue s'étend uniquement aux intégrales généralisées qui sont absolument convergentes au sens de Riemann, mais pas aux intégrales généralisées de Riemann semi-convergentes.

Exemple 40. On se propose de calculer la limite de la suite numérique $\int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx} dx$ où $s \in]0, 1[$.

1) Noter que si pour tous $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose, $f_n(x) = \frac{nx^s}{1+nx}$, on obtient ainsi une suite croissante de fonctions mesurables (continues) et positives sur $[0, 1]$.

Les fonctions f_n sont alors Lebesgue intégrables, en plus, comme elle converge simplement sur $[0, 1]$ vers fonction mesurable,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} x^{s-1} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

le théorème de la convergence monotone (Th. Beppo Levi) implique donc qu'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx^s}{1+nx} dx = \int_{[0,1]}^* f(x) dx = \frac{1}{s}$$

Exercice 97. Sur $\mathbb{R}^+$ on considère la fonction f qui est définie par les expressions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1 - x) \frac{e^{-x}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Démontrer que la fonction f est borélienne.

2) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ on pose : $P_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{i=n} \frac{x^k}{(k+2)!}$.

i) Vérifier que la suite P_n est croissante et calculer sa limite simple sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Calculer l'intégrale de Lebesgue $\int_{\mathbb{R}^+} P_n(x) d\lambda_1(x)$.

iii) En déduire que la fonction f est λ_1 -intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 98 (Formule de transfère). Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application. On rappelle que sur l'espace mesurable $(\mathbf{F}, f_*(\mathcal{T}))$ on a défini une mesure positive (mesure image directe) par (voir chapitre 2),

$$\forall A \in f_*(\mathcal{T}) = \{B \subseteq \mathbf{F} ; f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}, \quad \mu_f(A) := \mu(f^{-1}(A))$$

1) Montrer que pour toute partie mesurable $A \in f_*(\mathcal{T})$ la fonction composée : $\chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$.

2) En déduire que pour toute fonction étagée mesurable, $g : (\mathbf{F}, f_*(\mathcal{T})) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, l'intégrale supérieure

$$\int_{\mathbf{F}}^* g d\mu_f = \int_{\mathbf{E}}^* g \circ f d\mu$$

3) Caractériser les fonctions mesurables, $g : (\mathbf{F}, f_*(\mathcal{T})) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, qui sont μ_f -intégrables.

4.4 Théorème de convergence domaine

Théorème 16 (Convergence domainée de Lebesgue). Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions μ -intégrables qui converge simplement vers $f : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ μ -p.p. S'il existe une fonction $g : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ qui soit μ -intégrable et telle que $|f_n| \leq g$ μ -p.p, alors :

1. f est μ -intégrable sur $\mathbf{E}$;
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} f d\mu$;
3. $\int_{\mathbf{E}} |f_n - f| d\mu = 0$.

Démonstration. 1) Par la condition de domination, $|f_n| \leq g$ μ -p.p, et l'hypothèse de convergence simple on conclut que $|f| \leq g$ μ -p.p. Donc, f est μ -intégrable comme g .

2) Encore de la condition de domination, $|f_n| \leq g$ μ -p.p, on déduit que $g - f_n$ et $g + f_n$ sont positives μ -presque par tout. Ainsi, grâce au lemme de Fatou on déduit qu'on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g - f_n) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} (g - f_n) d\mu \\ \int_{\mathbf{E}} (g - f) d\mu &\leq \int_{\mathbf{E}} g d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} (-f_n) d\mu \\ \int_{\mathbf{E}} g d\mu - \int_{\mathbf{E}} f d\mu &\leq \int_{\mathbf{E}} g d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu \end{aligned}$$

D'où, l'inégalité

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu$$

ii) De même, par le lemme de Fatou on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g + f_n) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} (g + f_n) d\mu \\ \int_{\mathbf{E}} (g + f) d\mu &\leq \int_{\mathbf{E}} g d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu \\ \int_{\mathbf{E}} g d\mu + \int_{\mathbf{E}} f d\mu &\leq \int_{\mathbf{E}} g d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu \end{aligned}$$

Ainsi, par la dernière inégalité on déduit que

$$\int_{\mathbf{E}} f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu$$

Ceci démontre que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} f d\mu$.

3) Partant de l'inégalité de domination on voit que, $|f_n - f| \leq 2g$ μ -p.p. Ainsi, si on applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives $(2g - |f_n - f|)$ on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (2g - |f_n - f|) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} (2g - |f_n - f|) d\mu \\ 2 \int_{\mathbf{E}} g d\mu &\leq 2 \int_{\mathbf{E}} g d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} |f_n - f| d\mu \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} |f_n - f| d\mu = 0$. □

Le théorème suivant se déduit immédiatement à partir du théorème de convergence dominée. Il est très utile sur les espaces mesurés de mesure finie, en particulier, il est très utile sur les espaces probabilisés,

Théorème 17 (Convergence bornée). Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et f_n est une suite bornée de fonctions mesurables qui convergent μ -p.p sur $\mathbf{E}$ vers une fonction f . Alors, pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ de mesure finie (ie. $\mu(A) < +\infty$) on a,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

En particulier, si $\mu(\mathbf{E}) < +\infty$ alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu$$

Démonstration. Remarquer que toute fonction mesurable "bornée", $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, est μ -intégrable sur toute partie mesurable de mesure finie : $|f| \leq M$ μ -p.p sur A implique $\int_A |f| d\mu \leq M\mu(A)$. □

Exercice 99. Calculer les limites suivantes en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} / dx$$

Indication : Ecrire $\int_0^n f(x) dx = \int_{[0, +\infty[} \chi_{[0, n]} f(x) dx$.

Exercice 100 (Important). Sur $\mathbb{R}$ on considère la suite de fonctions, $f_n = n(1 + (-1)^n) \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$.

1) Calculer la limite simple f de la suite de fonctions f_n .

2) Calculer les intégrales de Lebesgue : $u_n = \int_{\mathbb{R}} f_n dx$.

3) La suite numérique, u_n , est-elle convergente ? Conclure.

Exercice 101. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et f_n une suite de fonctions μ -intégrables sur $\mathbf{E}$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$(1) \quad f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-p.p.} \quad \text{et} \quad (2) \quad \int_{\mathbf{E}} |f_n| d\mu \rightarrow \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$$

1) Calculer la limite simple de la suite de fonctions $g_n = |f_n| - |f_n - f|$.

2) Vérifier qu'on a : $|g_n| \leq |f|$ μ -p.p.

3) En déduire la limite de la suite numérique : $\int_{\mathbf{E}} f_n d\mu$.

4) Montrer que pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ la suite numérique, $\int_A f_n d\mu$, converge.

Exercice 102. 1) Calculer la limite simple de la suite de fonctions, $f_n(x) = \sqrt{n \sin(x/n)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

2) Trouver la nature de convergence de la suite numérique, $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$. (Indication : on pourra utiliser $0 \leq \sin(x) \leq x$, $x \in [0, \pi/2]$).

Exercice 103. Pour tout réel $\alpha > 0$ on définit l'intégrale d'Euler, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

1) Montrer que l'intégrale généralisée $\Gamma(\alpha)$ converge.

2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} dt = \Gamma(\alpha)$.

Exercice 104. Cet exercice vous invite à appliquer le théorème de convergence dominée pour calculer des intégrales de Lebesgue au moyen des séries numériques.

Montrer que les intégrales proposées ci-dessous existent au sens de Lebesgue, puis les calculer.

$$1) \int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1-x} \ln(1/x) dx = \sum_{n \geq 0} \frac{9}{(3n+4)^2}.$$

$$2) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\sqrt{x}) dx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

$$3) \int_0^\pi \left[\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \sin(nx)}{a^n} \right] dx = \frac{2a(1+a^2)}{(a^2-1)^2}, \quad a > 0.$$

4.5 Inégalité de Markov et ses conséquences

Théorème 18 (Inégalité de Markov). Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction μ -intégrable. Alors, pour tout réel $a > 0$ on a l'inégalité de Markov :

$$\mu(\{x \in \mathbf{E}; |f(x)| > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$$

En conséquence, les affirmations suivantes sont vraies :

1. Le sous-ensemble de niveau mesurable $B(a) = \{x \in \mathbf{E}; |f(x)| > a\}$ est de mesure finie.

2. Le sous-ensemble $B_\infty = \{x \in \mathbf{E}; f(x) = \pm\infty\}$ est de mesure nulle.

Démonstration. Pour $a > 0$ posons $B(a) = \{x \in \mathbf{E}; |f(x)| > a\}$, donc $B(a)$ est une partie mesurable. Noter aussi que l'inégalité

$$|f| \chi_{B(a)} \leq |f| \implies \int_{B(a)} |f| d\mu = \int_{\mathbf{E}} |f| \chi_{B(a)} d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$$

Ainsi, comme pour tout $x \in B(a)$ on a $a \leq |f(x)|$ on en déduit que

$$a\mu(B(a)) \leq \int_{B(a)} |f| d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu \implies \mu(\{x \in \mathbf{E}; |f(x)| > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$$

- 1) Puisque l'intégrale $\int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$ est finie ; l'inégalité de Markov implique donc que la mesure de l'ensemble de niveau $B(a) = \{x \in \mathbf{E}; |f(x)| > a\}$ est finie ; elle ne dépasse pas la valeur $\frac{1}{a} \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$.
- 2) Puisque la suite de parties mesurables $B(n) = \{x \in \mathbf{E}; |f(x)| \geq n\}$ est décroissante et de mesure finie ; l'inégalité de Markov, $\mu(B_n) \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$, combinée à la continue supérieure de la mesure positive μ (Voir chp. 2) impliquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B(n)) = \mu(\bigcap_{n \geq 1} B(n)) = \mu(\{x \in \mathbf{E}; f(x) = \pm\infty\}) = 0$. $\square$

Le théorème de Markov nous permet de caractériser les fonctions positives nulles μ -presque par tout.

Proposition 57. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une fonction μ -intégrable positive. Alors, pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ l'intégrale $\int_A f d\mu = 0$ si et seulement, si $f = 0$ μ -p.p. sur A .

Démonstration. 1) D'abord observer que si $f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i}$ est une fonction étagée nulle μ -p.p sur une partie mesurable A il s'ensuit que toutes les parties $A \cap A_i$ sont de mesure nulle, et donc ; l'intégrale

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \mu(A \cap A_i) = 0$$

Maintenant, si f est mesurable positive et μ -p.p nulle sur $A \in \mathcal{T}$ on aura par définition

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A g d\mu; 0 \leq g \leq f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p} \right\} = 0$$

Inversement, supposons que l'intégrale $\int_A f d\mu = 0$. Sous cette condition, on aura pour tout entier $n > 0$ l'inégalité de Markov,

$$\mu(\{x \in A; \frac{1}{n} < f(x)\}) \leq n \int_A f d\mu = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(\{x \in A; \frac{1}{n} < f(x)\}) = 0$$

Ainsi, comme la partie mesurable $\{x \in A; f(x) > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in A; f(x) > \frac{1}{n}\}$ on en déduit que la partie $\{x \in A; f(x) > 0\}$ est de mesure nulle. Par conséquent, la fonction f est nulle μ -presque par tout sur la partie mesurable A . $\square$

Exercice 105. Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction μ -intégrable.

- 1) Pour tout réel $\lambda > 0$ on pose : $A_\lambda = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \lambda\} \in \mathcal{T}$.
- i) Etablir l'inégalité de Markov : $\mu(A_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbf{E}} f(x) d\mu$.
- ii) En déduire que la partie A_λ est de mesure finie.
- 2) Montrer que la partie $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \frac{1}{n}\}$.
- 3) En déduire que la partie mesurable $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\}$ est σ -finie.
- 4) Vérifier que l'intersection dénombrable $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{x \in \mathbf{E}; |f(x)| = +\infty\}$.
- 5) En déduire que la partie mesurable, $\{x \in \mathbf{E}; f(x) = +\infty\}$, est de mesure nulle.

Exercice 106. Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe une suite de parties mesurables et disjointes deux à deux, $A_n \in \mathcal{T}$, telle que $\mathbf{E} = \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Et, soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction μ -intégrable fixée.

1) Montrer qu'on a l'expression, $\int_{\mathbf{E}} d\mu = \sum_{n \geq 0} \int_{A_n} f d\mu$.

2) Pour tout entier $n \geq 0$ on pose $B_n = \{x \in \mathbf{E}; n \leq |f(x)| < n+1\}$. Montrer que la série numérique de terme général $n\mu(B_n)$ converge et on a : $\sum_{n \geq 0} n\mu(B_n) \leq \int_{\mathbf{E}} |f| d\mu$.

Exercice 107 (Fonction de répartition). Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Étant donnée une fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ qui est μ -intégrable on lui associe une fonction de répartition relativement à la mesure μ , elle est définie par l'expression :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) := \mu(\{x \in \mathbf{E} ; f(x) > t\})$$

1) Montrer que la fonction de répartition, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est décroissante continue à droite sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = \mu(\mathbf{E})$. (Remarquer que $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > -\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > -n\}$).

3) Montrer que si la mesure μ est finie, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$.

4) Soit $A \in \mathcal{F}$ une partie mesurable de mesure finie (ie. $\mu(A) < +\infty$).

i) Déterminer la fonction de répartition F associée à la fonction caractéristique χ_A .

ii) Montrer que $\int_0^{+\infty} F(t) dt = \mu(A)$.

5) Soit $f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \chi_{A_i}$ une fonction étagée positive μ -intégrable telle que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

a) Montrer que la fonction de répartition F associée à la fonction étagée f est donnée par les expressions suivantes :

$$F(t) = \begin{cases} \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n) = F(0) & \text{si } 0 \leq t < a_1 \\ \mu(A_2) + \mu(A_3) + \dots + \mu(A_n) = F(a_1) & \text{si } a_1 \leq t < a_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mu(A_n) = F(a_{n-1}) & \text{si } a_{n-1} \leq t < a_n \\ 0 = F(a_n) & \text{si } t \geq a_n \end{cases}$$

b) Vérifier que l'intégrale, $\int_0^{+\infty} F(t) dt = \int_{\mathbf{E}} f d\mu$.

6) Montrer que pour toute fonction, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{F}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, qui est μ -intégrable on a la formule de Cavalieri :

$$\int_{\mathbf{E}} f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in \mathbf{E} ; f(x) > t\}) dt$$

Solution de la feuille de TD1 :

Ensembles et fonctions

Exercice 1.1 Cet exercice propose des formules qui concernent l'interaction du produit cartésien avec l'intersection et la réunion des ensembles.

- 1) $A \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$ et $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B)$.
- 2) $A \times \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$ et $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B)$.
- 3) $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n)$ et $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcap_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n)$.

Solution 1.1 Soit $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux ensembles. On rappelle que le produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ est un ensemble constitué par les couples d'éléments ordonnés (x, y) avec $x \in \mathbf{E}$ et $y \in \mathbf{F}$.

Le but de cet exercice est de comprendre comment le produit cartésien des ensembles se comporte avec l'intersection et l'union des familles de sous-ensembles $A_n \subseteq \mathbf{E}$ et $B_n \subseteq \mathbf{F}$.

1.1) Prenons un couple (x, y) élément de l'ensemble $A \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)$. Donc, par définition du produit cartésien et de la réunion on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in A \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) &\iff x \in A \text{ et } y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \\
 &\iff x \in A \text{ et } (\exists n \in \mathbb{N}, y \in B_n) \\
 &\iff \exists n \in \mathbb{N}, (x \in A \text{ et } y \in B_n) \\
 &\iff (x, y) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)
 \end{aligned}$$

Ceci démontre qu'on a : $A \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$.

1.2) Encore, une fois, prenons un couple (x, y) élément de l'ensemble $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B$. Donc, par

définition du produit cartésien et de la réunion on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B &\iff x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \text{ et } y \in B \\
 &\iff (\exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n) \text{ et } y \in B \\
 &\iff \exists n \in \mathbb{N}, (x \in A_n \text{ et } y \in B) \\
 &\iff (x, y) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B)
 \end{aligned}$$

Ceci démontre qu'on a : $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B)$.

2) Les expressions $A \times \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n)$ et $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B)$ se démontrent comme les précédentes, il suffit qu'on remplace le quantificateur universel $\forall$ qui caractérise l'union quelconque $\bigcup$ par le quantificateur $\exists$ qui caractérise l'intersection quelconque $\bigcap$.

3) Pour établir les deux expressions suivantes,

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcap_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n)$$

il suffit qu'on applique les expressions établies en 1) et 2).

$$\begin{aligned}
 \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B_m \right] \\
 &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B_m) \right] \\
 &= \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n)
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left[\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \times B_m \right] \\
 &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times B_m) \right] \\
 &= \bigcap_{m, n \in \mathbb{N}} (A_m \times B_n)
 \end{aligned}$$

Noter bien : Noter que les expressions ensemblistes établies ci-dessus restent vraies pour les familles quelconques de sous-ensembles qui ne sont pas nécessairement dénombrables ou finies.

Exercice 2.1 Soit $\mathbf{E}$ un ensemble. On vous rappelle que les limites inférieure et supérieure d'une suite de parties, $A_n \subseteq \mathbf{E}$, sont définies respectivement par :

$$\liminf A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p \quad \text{resp.} \quad \limsup A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p$$

On vous rappelle aussi que la suite (A_n) est dite convergente lorsque $\liminf A_n = \limsup A_n$; cette limite commune se note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

1) Montrer qu'une suite croissante de parties $A_n \subseteq \mathbf{E}$ converge vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n$.

- 2) Montrer qu'une suite décroissante de parties $A_n \subseteq \mathbf{E}$ converge vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.
- 3) Montrer qu'une suite de parties disjointes deux à deux (A_n) converge vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \emptyset$.
- 4) Etudier la convergence des suites de parties de $\mathbb{R}$: $A_n = \{1 + (-1)^n\}$, $B_n = \{\frac{1}{n}\}$, $C_n = [0, x + a_n[$, $D_n =]0, x - a_n]$ où $x > 0$ et $a_n > 0$ est une décroissante convergeant vers zéro.

Solution 2.1 1) Soit (A_n) une suite croissante de sous-ensembles ie. $A_n \subseteq A_{n+1}$. Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on aura

$$\bigcap_{p \geq n} A_p = A_n \quad \implies \quad \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \geq 0} A_n$$

De même, puisque (A_n) est croissante on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A_0 \cup \dots \cup A_n$; et par suite :

$$\bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \implies \quad \limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcup_{n \geq 0} A_n$$

Par conséquent, la suite croissante (A_n) converge et sa limite est égale à : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

2) Soit (A_n) une suite décroissante de sous-ensembles ie. $A_{n+1} \subseteq A_n$. Noter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A_0 \cap \dots \cap A_n$, ceci entarîne que

$$\bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \implies \quad \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p = \bigcap_{n \geq 0} A_n$$

D'autre part, par la décroissance de la suite A_n on voit que la réunion :

$$\bigcup_{p \geq n} A_p = A_n \quad \implies \quad \limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p = \bigcap_{n \geq 0} A_n$$

Par conséquent, une suite décroissante (A_n) converge avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

3) Rappelons qu'une suite de sous-ensembles $A_n \subseteq \mathbf{E}$ est dite disjointe si pour tout couple d'entiers $m \neq n$ on a $A_m \cap A_n = \emptyset$.

D'abors, observer que nous appliquons alors la définition des limites inf et sup en utilisant les quantificateurs universels on obtient :

$$x \in \liminf A_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p \quad \iff \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq n_0 \implies x \in A_n$$

Cette dernière équivalence montre qu'un point $x \in \mathbf{E}$ appartient au sous-ensemble $\liminf A_n$ si et seulement, si il appartient à tous les termes de la suite A_n apparir d'un certain rang n_0 . Par conséquent, si les termes A_n sont disjointes deux à deux il s'ensuit que $\liminf A_n = \emptyset$.

De même, par définition de la limite sup on peut écrire

$$x \in \limsup A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p \quad \iff \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N}), \quad p \geq n \implies x \in A_p$$

Pour comprendre la signification de cette équivalence on va l'appliquer aux entier $n \in \mathbb{N}$ comme suit :

- i) Prenons $n = 0$ il existe donc un $n_0 \geq 0$ tel que $x \in A_{n_0}$.
- ii) Prenon $n = n_0 + 1$ il existe donc un $n_1 \geq n_0 + 1 > n_0$ tel que $x \in A_{n_1}$.
- iii) Prenon $n = n_1 + 1$ il existe donc un $n_2 \geq n_1 + 1 > n_0$ tel que $x \in A_{n_2}$.

iv) En continuant par récurrence on conclut qu'il existe une suite infinie de parties telles que $x \in A_{n_k}$. Ainsi, suite à ce précédé on déduit qu'un point x appartient à $\limsup A_n$ si et seulement, si x appartient à une infinité de termes A_n de façon aléatoire (non nécessairement ordonnée). En conséquence, pour toute suite de parties disjointes sa limite sup : $\limsup A_n = \emptyset$.

Conclusion : une suite de parties disjointes, A_n converge vers l'ensemble vide : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \emptyset$.

Remarque 8. La notion de convergence des suites de parties est différente de la notion de convergence des suites numériques. Pour expliquer ce fait, considérons une suite infinie de nombres réels (x_n) qui converge vers un réel et dont les termes sont distingués deux à deux ; ceci nous donne alors une suite de singletons disjoints $\{x_n\}$; donc sa limite en tant que suite de sous-ensembles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{x_n\} = \emptyset \neq \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right\}$$

4) **Applications :** i) La suite de parties $A_n = \{1 + (-1)^n\} \subset \mathbb{R}$ ne contient que deux termes : $A_{2n+1} = \{0\}$ et $A_{2n} = \{2\}$. Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{p \geq n} A_p = \{0, 2\} \implies \limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p = \{0, 2\}$$

et

$$\bigcap_{p \geq n} A_p = \emptyset \implies \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p = \emptyset$$

En conséquence, la suite de parties $A_n = \{1 + (-1)^n\}$ diverge.

ii) La suite de parties $B_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ est disjointe, donc elle converge vers l'ensemble vide.

iii) Puisque la suite réelle $a_n > 0$ est décroissante on aura pour tout réel $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $x + a_{n+1} < x + a_n$, il s'ensuit donc que la partie $C_n = [0, x + a_n[\supset C_{n+1}$. Ainsi, comme la suite de parties C_n est décroissante, elle converge avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = \bigcap_{n \geq 0} C_n = \bigcap_{n \geq 0} [0, x + a_n[= [0, x + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n[$$

iv) De même, puisque $x - a_n < x - a_{n+1}$ il en résulte que la partie $D_n =]0, x - a_n] \subset D_{n+1}$; donc la suite de parties D_n est croissante. Par conséquent, elle converge avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = \bigcup_{n \geq 0} D_n = \bigcup_{n \geq 0}]0, x - a_n] =]0, x - \lim_{n \rightarrow -\infty} a_n[$$

Exercice 3.1 Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}$ une suite strictement décroissante avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} - \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha\} &= \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha_n\}; \\ - \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha\} &= \bigcap_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) < \alpha_n\}. \end{aligned}$$

Solution 3.1 Soit $\alpha_n \in \mathbb{R}$ une suite strictement décroissante avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

i) Montrons qu'on a l'égalité : $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha_n\}$.

En effet, puisque la suite α_n décroît vers le réel α , on aura pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha = \inf\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\} \leq \alpha_n \implies \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha_n\} \subseteq \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha\}$$

Par conséquent, la réunion : $\bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha_n\} \subseteq \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha\}$.

Inversement, prenons un point $x_0 \in \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha\}$, donc $f(x_0) > \alpha$. Ainsi, si on pose $\varepsilon = f(x_0) - \alpha > 0$; la caractérisation de l'inf permet de trouver un $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\alpha \leq \alpha_n < \varepsilon + \alpha \implies \alpha_n < \varepsilon + \alpha = f(x_0) \implies \exists n \in \mathbb{N}, x_0 \in \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha_n\}$$

Ce qui implique que le sous-ensemble $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha\} \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \alpha_n\}$.

ii) Montrons qu'on a l'égalité : $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha_n\}$.

En effet, comme $\alpha \leq \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$ il s'ensuit que le sous-ensemble

$$\{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha\} \subseteq \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha_n\}, \forall n \in \mathbb{N} \implies \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha_n\}$$

Inversement, si un point $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha_n\}$ on aura, par définition de l'intersection :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y \in \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha_n\} \implies \forall n \in \mathbb{N}, f(y) \leq \alpha_n \implies f(y) \leq \alpha \implies y \in \{x \in \mathbf{E}; f(x) \leq \alpha\}$$

Exercice 4.1 Soit $f_n : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions.

1) Pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ montrer qu'on a les expressions suivantes :

$$- \{x \in \mathbf{E}; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) > c\}.$$

$$- \{x \in \mathbf{E}; \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) < c\}.$$

2) Calculer les limites inférieure et supérieure de la suite : $A_n = \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) > c\}$.

3) Pour une fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ donner une interprétation de la partie :

$$D = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \{x \in \mathbf{E}; |f_p(x) - f(x)| < r\}$$

Solution 4.1 Soit $f_n : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions.

1) i) Montrons que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbf{E}; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) > c\}$.

Noter que par définition de la borne supérieure d'une suite, si un point $x \in \mathbf{E}$ vérifie

$$c < f_n(x) \implies c < \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \implies \{x \in \mathbf{E}; c < f_n(x)\} \subseteq \{x \in \mathbf{E}; c < \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\}$$

Par conséquent, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) > c\} \subseteq \{x \in \mathbf{E}; c < \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\}$.

Inversement, fixons un point $y \in \{x \in \mathbf{E}; c < \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\}$; donc $c < \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(y)$. Ainsi, comme la borne supérieure est le plus petit de tous les majorants de la suite numérique $\{f_n(y); n \in \mathbb{N}\}$ on conclut que le réel c n'est pas un majorant de cette suite, donc il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$c < f_{n_0}(y) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(y) \implies y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; c < f_n(x)\}$$

Par suite, puisque l'inclusion réciproque est vraie on conclut qu'on a l'égalité :

$$\{x \in \mathbf{E}; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) > c\}$$

ii) L'égalité $\{x \in \mathbf{E}; \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbf{E}; f_n(x) < c\}$ se démontre comme la précédente, il suffit qu'on remplace sup par inf et plus petit majorant par plus grand minorant.

2) i) Calculons $\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} \{x \in \mathbf{E}; f_p(x) > c\}$.

Noter que d'après ce qui précède on peut écrire :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; \sup_{p \geq n} f_p(x) > c\} = \{x \in \mathbf{E}; \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \geq c\}$$

ii) De la même façon on voit que :

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} \{x \in \mathbf{E}; f_p(x) > c\} = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; \inf_{p \geq n} f_p(x) \geq c\} = \{x \in \mathbf{E}; \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \geq c\}$$

3) Prenons un point $x \in D = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \{x \in \mathbf{E}; |f_p(x) - f(x)| < r\}$. Cette affirmation on peut la traduire avec les quantificateurs comme suit :

$$(\forall r \in \mathbb{Q}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), p \geq n \implies |f_p(x) - f(x)| < r$$

Noter qu cette expression logique nous rappelle la définition de la convergence de la suite numérique $f_n(x)$ exprimée par les $\varepsilon > 0$ rationnels. Mais, comme $\mathbb{Q}_+^*$ est dense dans $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit que la partie $D \subseteq \mathbf{E}$ n'est autre que le domaine de convergence simple de la suite de fonctions f_n vers la fonction f .

Exercice 5.1 Montrer que les fonctions caractéristiques vérifient les propriétés suivantes :

- 1) $(\forall A, B \subseteq \mathbf{E}), A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$.
- 2) $(\forall A, B \subseteq \mathbf{E}), \chi_{A \cap B} = \chi_A \times \chi_B, \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B, \chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \times \chi_B$.
- 3) $\forall A \subseteq \mathbf{E}, \chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.
- 4) $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction caractéristique si et seulement, si $f(1 - f) = 0$.
- 5) Pour toute suite de sous-ensembles $A_n \subseteq \mathbf{E}$ montrer qu'on a les expressions suivantes :

1. i) $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j} = \chi_{\bigcup_{j \geq n} A_j}$ et ii) $\inf_{j \geq n} \chi_{A_j} = \chi_{\bigcap_{j \geq n} A_j}$.
2. i) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$ et ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \chi_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n}$.

6) En déduire que la suite de fonctions caractéristiques, χ_{A_n} , converge simplement si et seulement si la suite de sous-ensembles A_n converge.

7) Démontrer que le domaine de convergence simple de la série de fonctions, $\sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}$, est égal au sous-ensemble : $\left(\limsup A_n \right)^c = \liminf \left(A_n \right)^c$.

Solution 5.1 On rappelle que pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on définit sa fonction caractéristique par les expressions :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Pour l'ensemble vide on pose $\chi_\emptyset = 0$; et pour l'ensemble $\mathbf{E}$ on pose $\chi_{\mathbf{E}} = 1$.

Étant donnée deux parties A et B de l'ensemble $\mathbf{E}$ on se propose ci-dessous de voir l'interaction des fonctions caractéristiques avec les opérations ensemblistes : $\cap, \cup, \Delta$ et la complémentation.

1) Supposons que $A \subseteq B$, donc pour tout $x \in A$ on aura $\chi_A(x) = 1$, et comme $A \subseteq B$ on aura aussi $\chi_B(x) = 1$; ce qui entraîne $\chi_A(x) = \chi_B(x), \forall x \in A \subseteq B$.

D'autre part, si on prend $x \notin A$ on obtient $\chi_A(x) = 0 \leq \chi_B(x)$; car $\chi_B \geq 0$. Ainsi, on voit que sur l'ensemble $\mathbf{E}$ on aura $\chi_A \leq \chi_B$ lorsque $A \subseteq B$.

Inversement, supposons que $\chi_A \leq \chi_B$. Dans ce cas, observer que pour tout $x \in A$ on aura $\chi_A(x) = 1 \leq \chi_B(x)$; donc $\chi_B(x) = 1$ et par suite $x \in B$. C'est-à-dire, $A \subseteq B$.

2) i) Pour tout couple de parties A et $B \subseteq \mathbf{E}$ l'expression $\chi_{A \cap B} = \chi_A \times \chi_B$ est évidente.

ii) Partant de l'union disjointe $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ on vérifie aisément la relation :

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B$$

iii) De même, puisque $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est une union disjointe il s'ensuit par une vérification rapide que :

$$\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \times \chi_B$$

3) $\forall A \subseteq \mathbf{E}, \chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ est évidente.

4) Si $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction caractéristique, elle ne prend que les valeurs 0 et 1. Donc, le produit $f(1 - f) = 0$ est vrai sur $\mathbf{E}$.

Inversement, si une fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la relation $f(1 - f) = 0$ sur $\mathbf{E}$, alors en posant

$$A = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\} \implies f = \chi_A$$

5) Fixons une suite de sous-ensembles $A_n \subseteq \mathbf{E}$.

1-i) D'abord, observer que si on prend $x \in \bigcup_{j \geq n} A_j$ il existe alors un $j \geq n$ tel que $x \in A_j$, donc $\chi_{A_j}(x) = 1$. Ainsi, comme $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j}(x) \leq 1$ on aura $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j}(x) = 1, \forall x \in \bigcup_{j \geq n} A_j$.

De même, si on prend $x \in \left(\bigcup_{j \geq n} A_j\right)^c = \bigcap_{j \geq n} (A_j)^c$ on aura pour tout $j \geq n$, $\chi_{A_j}(x) = 0$, donc $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j}(x) = 0$. Ceci démontre que la fonction $\sup_{j \geq n} \chi_{A_j} = \chi_{\bigcup_{j \geq n} A_j}$.

1-ii) L'expression $\inf_{j \geq n} \chi_{A_j} = \chi_{\bigcap_{j \geq n} A_j}$ se démontre comme 1-i); il suffit qu'on remplace $\bigcup$ par $\bigcap$ et $\sup$ par $\inf$.

Les expressions 2-i) et 2-ii) se déduisent de 1-i) et 1-ii).

6) La convergence simple de la suite de fonctions χ_{A_n} est équivalente à dire qu'on a l'égalité :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} \iff \chi_{\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \chi_{\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n} \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Donc, la suite de fonctions caractéristiques, χ_{A_n} , converge simplement si et seulement si la suite de sous-ensembles A_n converge.

7) Désignons par $D \subseteq \mathbf{E}$ le domaine de convergence simple de la série de fonctions, $\sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}$.

Soit $x \in D$. On rappelle que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}(x)$ converge si et seulement, si la suite des restes $R_n(x) = \sum_{p \geq n} \chi_{A_p}(x)$ converge vers zéro. Ceci se traduit pour $\varepsilon = 1/2$ par :

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), \quad n \geq n_0 \implies 0 \leq \sum_{p \geq n} \chi_{A_p}(x) < 1/2 \implies p \geq n \geq n_0, \quad \chi_{A_p}(x) = 0$$

Ainsi, de ces implications on voit que le point $x \in D \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p^c = \left(\limsup A_n \right)^c$.

Inversement, tout point $x \in \left(\limsup A_n \right)^c = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p^c$ donne une suite de restes $R_n(x) = \sum_{p \geq n} \chi_{A_p}(x)$ qui s'annule à partir d'un certain rang, donc x appartient au domaine de convergence simple $\bar{D}$.
Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}$ converge simplement sur la partie $\left(\limsup A_n \right)^c$.

Exercice 6.1 Montrer que l'application, $\chi : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, qui associe à tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbf{E}$ sa fonction caractéristique χ_A est injective. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est en bijection avec le sous-ensemble de fonctions :

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}, \{0, 1\}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}); f(1 - f) = 0\}$$

Application : Montrer que l'ensemble de toutes les suites telles que $u_n = 0$ ou 1 est non dénombrable.

Solution 6.1 En utilisant le 1) de l'exercice 5.1 on voit que l'égalité $\chi_A = \chi_B$ entraîne $A = B$. Donc, l'application, $\chi : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$, qui associe à tout sous-ensemble $A \subseteq \mathbf{E}$ sa fonction caractéristique χ_A est injective. D'autre part, observer que pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on a la relation $\chi_A(1 - \chi_A) = 0$. Par conséquent, l'image de l'application χ :

$$\chi(\mathcal{P}(\mathbf{E})) \subseteq \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}); f(1 - f) = 0\}$$

Inversiment, si une fonction non nulle $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la relation $f(1 - f) = 0$ on voit que si on pose

$$A = \{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\} \implies f = \chi_A \in \chi(\mathcal{P}(\mathbf{E}))$$

Autrement dit, on a $\chi(\mathcal{P}(\mathbf{E})) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R}); f(1 - f) = 0\}$.

Application : Rappelons que la donnée d'une suite d'éléments d'un ensemble $\mathbf{E}$ est équivalente à la donnée d'une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{E}$. En conséquence, l'ensemble de toutes les suites numériques (u_n) telles que $u_n = 0$ ou 1 est égal à l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ qui est bijectif avec l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ via l'application χ . Ainsi, en utilisant le résultat du Cours qui montre que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable on en déduit donc que l'ensemble des suites numériques (u_n) telles que $u_n = 0$ ou 1 est non dénombrable.

Exercice 7.1 Soit $\{p_1, \dots, p_m\}$ une famille de m -nombres premiers distingués deux à deux. En considérant, $f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$, montrer que le produit cartésien $\mathbb{N}^m$ est dénombrable.

Solution 7.1 Soit $\{p_1, \dots, p_m\}$ une famille de m -nombres premiers distingués deux à deux, et pour tout m -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ posons

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

ceci définit une fonction $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Supposons que pour un couple $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$ on a l'égalité :

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = f(\beta_1, \dots, \beta_m) \iff p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} = p_1^{\beta_1} \cdots p_m^{\beta_m}$$

Ainsi, puisque les nombres premiers $p_1, \dots, p_m$ sont distingués deux à deux ; le théorème de l'unicité de factorisation des entiers en puissances de nombres premiers montre qu'on a :

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m$$

Donc, la fonction f est injective et par suite le produit cartésien $\mathbb{N}^m$ est dénombrable.

Exercice 8.1 $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose,

$$\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} \mid \max(A) = n\}$$

- 1) Montrer que le cardinal $\text{Card}(\mathcal{F}_n(\mathbb{N})) = 2^n$.
- 2) Montrer que $\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \cap \mathcal{F}_m(\mathbb{N}) = \emptyset$ si et seulement si $n \neq m$.
- 3) Montrer que l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$. En déduire qu'il est dénombrable.
- 4) **Application :** L'ensemble de toutes les parties dénombrables de $\mathbb{N}$ est non dénombrable.

Solution 8.1 Avant le développement de la solution de l'exercice, on préfère donner un bref rappel sur le calcul du cardinal des ensembles finis. Les formules qu'on va rappeler ici sont en effet des exercices pour l'étudiant.

i) Soient $\mathbf{E}$ un ensemble fini, et $\mathbf{F}, \mathbf{G} \subseteq \mathbf{E}$ des sous-ensembles. On vérifie alors que le cardinal de la réunion

$$\text{Card}(\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) = \text{Card}(\mathbf{F}) + \text{Card}(\mathbf{G}) - \text{Card}(\mathbf{F} \cap \mathbf{G})$$

ii) Le cardinal de l'ensemble des parties de $\mathbf{E}$ est une puissance de deux, plus précisément on a :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbf{E})) = 2^{\text{Card}(\mathbf{E})}$$

iii) Le cardinal de deux ensembles finis $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ est égal au produit des cardinaux de ces ensembles :

$$\text{Card}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}) = \text{Card}(\mathbf{E}) \times \text{Card}(\mathbf{F})$$

Maintenant, passons à la solution de l'exercice 8.1.

Désignons par $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} \mid \max(A) = n\}$$

- 1) Montrons que le cardinal $\text{Card}(\mathcal{F}_n(\mathbb{N})) = 2^n$.

Notons que toute partie $A \subset \mathbb{N}$ qui appartient au sous-ensemble des parties $\mathcal{F}_n(\mathbb{N})$ contient l'entier n , car ; n est son plus grand élément. Ainsi, puisque la partie $A \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ on déduit que l'ensemble

$$\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) = \{A \in \mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n\}) / n \in A\}$$

Donc, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n-1\})$ est bijectif avec l'ensemble $\mathcal{F}_n(\mathbb{N})$ via l'application naturelle : $A \mapsto A \cup \{n\}$. Par conséquent,

$$\text{Card}(\mathcal{F}_n(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathcal{P}(\{0, 1, \dots, n-1\})) = 2^n$$

2) Observer que si une partie $A \in \mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \cap \mathcal{F}_m(\mathbb{N})$ on aura $\max(A) = n = m$ ce qui entraîne que $\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \cap \mathcal{F}_m(\mathbb{N}) = \emptyset$ si et seulement si $m \neq n$.

3) Dans 1) on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{N})$ est finie de cardinal 2^n , donc la réunion $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Inversement, si on se donne une partie finie A élément de $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ son plus grand élément $\max(A) = n \in A$, et donc $A \in \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$. D'où, $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$.

D'autre part, observer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ en posant $A_n = \{n\}$ on obtient une famille infinie d'ensembles finis telle que $\{A_n/n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Donc, l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ est infini.

Enfin, pour montrer que l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ est dénombrable il y a au moins deux méthodes que nous développerons ci-dessous.

Méthode 1 : On applique le résultat du cours qui affirme qu'une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable. Voici son énoncé :

Proposition 58. *Soit $\mathbf{E}$ un ensemble infini. Alors, pour toute suite de sous-ensembles dénombrables $A_n \subseteq \mathbf{E}$ la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \mathbf{E}$ est un sous-ensemble dénombrable.*

Démonstration. Posons $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $B_n = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subseteq A_n$. Noter que les sous-ensembles B_n sont disjoints deux à deux : $\forall n \neq m, B_m \cap B_n = \emptyset$, en plus, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Maintenant, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on fixe une bijection $f_n : A_n \rightarrow \mathbb{N}$ on voit que l'application $f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par l'expression :

$$\forall x \in B_n, \quad f(x) = (n, f_n(x)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

est injective. Donc, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un sous-ensemble dénombrable. $\square$

Méthode 2 : Rappelons que dans 2) nous avons vérifié que les sous-ensembles finis $\mathcal{F}_n(\mathbb{N})$ sont disjoints deux à deux. Donc, la réunion disjointe finie

$$E_n = \mathcal{F}_0(\mathbb{N}) \cup \mathcal{F}_1(\mathbb{N}) \cup \dots \cup \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$$

est un ensemble fini de cardinal

$$\text{Card}(E_n) = \text{Card}(\mathcal{F}_0(\mathbb{N})) + \dots + \text{Card}(\mathcal{F}_n(\mathbb{N})) = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

En conséquence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $E_n = \mathcal{F}_0(\mathbb{N}) \cup \mathcal{F}_1(\mathbb{N}) \cup \dots \cup \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$ est bijectif avec le sous-ensembles des entiers $F_n = \{1, 2, 3, \dots, 2^{n+1} - 1\}$.

De même, puisque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a l'inclusion $F_n \subseteq F_{n+1}$ on en déduit que la réunion $\bigcup_{n \geq 1} F_n = \mathbb{N}^*$ qui est en effet bijective avec la réunion $\bigcup_{n \geq 0} E_n = \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Enfin, pour construire une bijection entre la réunion disjointe $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$ et l'ensemble des entiers non nuls $\mathbb{N}^*$ on pourra procéder de la manière suivante :

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ fixons une bijection $f_n : \mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$;
2. Pour toute partie $A \in \mathcal{F}_n(\mathbb{N})$ posons $f(A) = f_n(A) + 2^n - 1$;
3. La correspondance, $f : \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}^*$, est une application bien définie qui vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{F}_n(\mathbb{N}), \quad 2^n \leq f(A) \leq 2^{n+1} - 1$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'image $f(\mathcal{F}_n(\mathbb{N})) = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ est de cardinal 2^n .

En partant de ce qui précède on vérifie aisément que l'application, $f : \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}^*$, est bijective (fais le !). Par conséquent, l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ est un ensemble dénombrable.

4) Désignons par $\mathcal{D}(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$ qui sont dénombrables (infinies). Noter alors qu'une partie $A \subseteq \mathbb{N}$ est soit finie, ou soit qu'elle est infinie mais; elle est dénombrable. Ceci montre que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{F}(\mathbb{N}) \cup \mathcal{D}(\mathbb{N})$.

Ainsi, comme l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable (voir le Cours, Chp I) et que d'après 3) l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ est infini dénombrable; on en déduit alors que l'ensemble des parties dénombrables $\mathcal{D}(\mathbb{N})$ est non dénombrable.

Solution de la feuille de TD2 : Ensembles et fonctions mesurables

Exercice 1.2 Soit $\mathbf{E}$ un ensemble. Montrer que pour toute partie $A \subset \mathbf{E}$ la famille de parties $\mathcal{C}(A) = \{B \subseteq \mathbf{E}; A \subseteq B \text{ ou } A \cap B = \emptyset\}$ est une tribu.

Solution 1.2 On se propose de vérifier que la famille de parties suivante est une tribu sur $\mathbf{E}$,

$$\mathcal{C}(A) = \{B \subseteq \mathbf{E}; A \subseteq B \text{ ou } A \cap B = \emptyset\}$$

- i) Noter que $\emptyset$ et $\mathbf{E} \in \mathcal{C}(A)$, car : $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \subset \mathbf{E}$.
- ii) Si la partie $A \subseteq B$ on aura l'intersection $B^c \cap A = \emptyset$; donc le complémentaire $B^c \in \mathcal{C}(A)$. De même, si on a $B \cap A = \emptyset$ on en déduit que la partie $A \subseteq B^c$; donc le complémentaire $B^c \in \mathcal{C}(A)$. Par conséquent, la famille de parties $\mathcal{C}(A)$ est stable par le passage au complémentaire.
- iii) Considérons une suite de parties $A_n \in \mathcal{C}(A)$. Noter que si il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset A_{n_0}$ il s'ensuit que $A \subseteq A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n \geq 0} A_n$; donc la réunion $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{C}(A)$. Encore, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'intersection $A_n \cap A = \emptyset$ on aura alors $A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} A_n \right) = \emptyset$; donc $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{C}(A)$.

Conclusion : la famille $\mathcal{C}(A)$ est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

Exercice 2.2 Soit $\mathbf{E}$ un ensemble muni de deux tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

- 1) Donner un exemple où la réunion $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ n'est pas une tribu. Que peut-on dire de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$?
- 2) On considère les trois familles de parties de $\mathbf{E}$ définies comme suit :

$$\Omega_1 = \{A \cup B; A \in \mathcal{T}_1 \text{ et } B \in \mathcal{T}_2\}, \quad \Omega_2 = \{A \cap B; A \in \mathcal{T}_1 \text{ et } B \in \mathcal{T}_2\}, \quad \Omega_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$$

Comparer les trois tribus engendrées $\sigma(\Omega_1)$, $\sigma(\Omega_2)$ et $\sigma(\Omega_3)$.

Solution 2.2 Soit $\mathbf{E}$ un ensemble muni de deux tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

1) i) Sur l'ensemble à trois éléments $\{0, 1, 2\}$ prenons les deux algèbres (tribus finies) :

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

Noter alors que la réunion $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ n'est pas une algèbre, car l'intersection $\{0, 2\} \cap \{1, 2\} = \{2\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

Ainsi, suite à ces exemples on conclut que la réunion de deux tribus n'est pas en général une tribu.

ii) L'intersection quelconque des tribus est toujours une tribu ; c'est un résultat vu dans le Cours. Donc, en particulier l'intersection de deux tribus $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ est une tribu.

2) On considère les trois familles de parties de $\mathbf{E}$ définies comme suit :

$$\Omega_1 = \{A \cup B; A \in \mathcal{T}_1 \text{ et } B \in \mathcal{T}_2\}, \quad \Omega_2 = \{A \cap B; A \in \mathcal{T}_1 \text{ et } B \in \mathcal{T}_2\}, \quad \Omega_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$$

i) Noter que la tribu $\mathcal{T}_1 \subset \Omega_1$, car si on prend $A \in \mathcal{T}_1$ et $B = \emptyset \in \mathcal{T}_2$ on voit que $A = A \cup \emptyset \in \Omega_1$. De la même façon, on voit que la tribu $\mathcal{T}_2 \subset \Omega_1$. D'où, $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \Omega_3 \subset \Omega_1$.

ii) Noter aussi que la tribu $\mathcal{T}_1 \subset \Omega_2$, car si on prend $A \in \mathcal{T}_1$ et $B = \mathbf{E} \in \mathcal{T}_2$ on obtient $A \cap \mathbf{E} = A \in \Omega_2$. De la même façon, on voit que $\mathcal{T}_2 \subset \Omega_2$. D'où, $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \Omega_3 \subset \Omega_2$.

iii) Maintenant, puisque la famille $\Omega_3 \subset \Omega_1$ et $\Omega_3 \subset \Omega_2$ le passage aux tribus engendrées nous donne :

$$\sigma(\Omega_3) \subseteq \sigma(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \sigma(\Omega_3) \subseteq \sigma(\Omega_2)$$

iv) D'autre part, comme les tribus $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont incluses dans la famille Ω_3 il s'ensuit que

$$(\forall A \in \mathcal{T}_1)(\forall B \in \mathcal{T}_2) \implies A \cup B \text{ et } A \cap B \in \sigma(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \sigma(\Omega_3) \implies \Omega_1 \subseteq \sigma(\Omega_3) \text{ et } \Omega_2 \subseteq \sigma(\Omega_3)$$

Enfin, le passage aux tribus engendrées donne les inclusions inverses : $\sigma(\Omega_1) \subseteq \sigma(\Omega_3)$ et $\sigma(\Omega_2) \subseteq \sigma(\Omega_3)$.

Conclusion : les trois tribus engendrées sont égales $\sigma(\Omega_1) = \sigma(\Omega_2) = \sigma(\Omega_3)$.

Exercice 3.2 1) Montrer que la tribu borélienne, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est engendrée par la famille des sections commençantes, $\mathcal{C} := \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$.

2) Montrer que la sous-famille des sections commençantes, $\mathcal{C}' := \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathcal{C}$, engendre également la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Pour tous réel $a \in \mathbb{R}$ et $i = 1, \dots, m$ les parties, $A_i(a) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_i > a\}$, s'appellent demi-espaces standards de $\mathbb{R}^m$. Montrer que dans $\mathbb{R}^m$ la famille de tous les demi-espaces standards engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Solution 3.2 On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est engendrée par les ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^m$ que l'on définit à partir de la distance euclidienne.

1) Les demi-droites de type $]a, +\infty[$ sont des ouverts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, donc $]a, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}$. Ainsi, comme la famille des sections commençantes $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ il en résulte que la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Inversement, puisque la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ est stable par passage au complémentaire on voit que la section finissante fermée $(]a, +\infty[)^c =]-\infty, a] \in \sigma(\mathcal{C})$. Par conséquent, pour tout couple de réels $a < b$ l'intersection : $] -\infty, b] \cap]a, +\infty[=]a, b] \in \sigma(\mathcal{C})$.

Ainsi, puisque maintenant la famille des intervalles de type $I_a = \{]a, b]; a < b\} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ on en déduit que la tribu engendrée $\sigma(I_a) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Finalement, si on applique le résultat vu dans le Cours affirmant que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_a)$ on en déduit qu'on a l'égalité $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Rappelons que tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite de nombres rationnelles que l'on peut choisir monotone. En effet, partant de la définition de la partie entière on obtient deux suites numériques :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [2^n x] \leq 2^n x < [2^n x] + 1 \implies x_n := \frac{[2^n x]}{2^n} \leq x < y_n := \frac{[2^n x]}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

i) La suite $x_n = \frac{[2^n x]}{2^n}$ est croissante. En effet, $\forall n \geq 0$:

$$2^{n+1} x_{n+1} = [2^{n+1} x] > 2^{n+1} x - 1 \geq 2[2^n x] - 1 = 2^{n+1} x_n - 1 \implies 2^{n+1} x_{n+1} \geq 2^{n+1} x_n$$

car $2^{n+1} x_n \in \mathbb{Z}$. Donc, la suite x_n est croissante.

ii) La suite $y_n = \frac{[2^n x]}{2^n} + \frac{1}{2^n}$ est décroissante. En effet, $\forall n \geq 0$:

$$2^n y_n = [2^n x] + 1 > 2^n x \implies 2^{n+1} y_n > 2^{n+1} x \geq [2^{n+1} x] \implies 2^{n+1} y_n \geq [2^{n+1} x] + 1 = 2^{n+1} y_{n+1}$$

Il ne reste qu'à diviser la dernière inégalité par 2^{n+1} pour déduire que la suite y_n est décroissante.

Maintenant, on se donne un réel $a \in \mathbb{R}$ et une suite de nombres rationnels décroissante $y_n > y_{n+1} > a$ convergent vers a . Avec ces données on voit que l'ouvert :

$$]a, +\infty[= \bigcup_{n \geq 1}]y_n, +\infty[\in \sigma(\mathcal{C}') \implies \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\} \subseteq \sigma(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Ainsi, comme la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C}')$ contient la famille d'ouverts $\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$ qui engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir le Cours) ; on aura donc l'égalité : $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Montrons que la famille des parties, $\mathcal{H}_m$, constituée par les demi-espaces standards de l'espace $A_i(a) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_i > a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $i = 1, \dots, m$; engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

D'abord, observer que les demi-espaces $A_i(a)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^m$, donc la famille

$$\mathcal{H}_m \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \implies \sigma(\mathcal{H}_m) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

Inversement, si on prend une famille de m -couples de réels tels que $a_i < b_i$ on voit que le pavé,

$$\prod_{i=1}^m]a_i, b_i[= \left(A_1(a_1) \cap A_1^c(b_1) \right) \cap \dots \cap \left(A_m(a_m) \cap A_m^c(b_m) \right) \in \sigma(\mathcal{H}_m)$$

Ainsi, puisque dans le Cours, on a vu la famille des pavés engendre la tribu borélienne $\mathbb{R}^m$ on aura donc l'égalité : $\sigma(\mathcal{H}_m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Exercice 4.2 Montrer que la famille des parties compactes, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$, de l'espace métrique euclidien $(\mathbb{R}^m, d_2)$ engendre la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^m$ ie. $\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Indication : Utiliser, $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B}_{d_2}(O, n)$.

Solution 4.2 Les compacts de $\mathbb{R}^m$ (espace métrique séparé) sont des fermés, donc la famille des compacts $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, par suite la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Inversement, prenons un fermé $F \subseteq \mathbb{R}^m$. Dans ce cas l'intersection $F \cap \overline{B}_{d_2}(O, n)$ est compacte dans $\mathbb{R}^m$. En plus, comme $F = \bigcup_{n \geq 1} \left(F \cap \overline{B}_{d_2}(O, n) \right)$ on en déduit que la famille des fermées $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^m))$.

Enfin, puisque la famille des fermées $\mathcal{F}$ engendre la tribu borélienne on conclut que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subseteq \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^m))$.

Exercice 5.2 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ une partie borélienne. Montrer que pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^m$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ les parties, $A + h = \{x + h; x \in A\}$ et $\lambda A = \{\lambda x; x \in A\}$, sont des boréliennes de $\mathbb{R}^m$.

Solution 5.2 Il y a deux méthodes pour développer la solution de l'exercice proposé. La première méthode utilise la mesurabilité des applications tandis la seconde méthode reste dans le cadre des tribus.

i) **Méthode de la mesurabilités.**

Observer que pour tous $h \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ les applications $x \mapsto T_h(x) = x + h$ et $x \mapsto M_\lambda(x) = \lambda x$ sont continues par rapport à la topologie usuelle de $\mathbb{R}^m$, donc elles sont mesurables. Par conséquent, pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ on aura :

$$\forall h \in \mathbb{R}^m, \left(T_{-h}\right)^{-1}(A) = A + h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \neq 0, \left(M_{1/\lambda}\right)^{-1}(A) = \lambda A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

Bien sûr, si $\lambda = 0$ on aura pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $0A = \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

ii) **La méthode des tribus :** Considérons la famille de parties boréliennes de $\mathbb{R}^m$ définie par :

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m); \forall h \in \mathbb{R}^m \implies A + h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\}$$

a) Noter que si $O \subseteq \mathbb{R}^m$ est un ouvert alors tous ses translatés $O + h$ sont des ouverts. Car, si un point $x \in O + h$ on aura $x - h \in O$. Ainsi, comme O est un ouvert il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de $\mathbb{R}^m$:

$$B(x - h, r) \subseteq O \implies B(x, r) \subseteq O + h$$

Suite à cette remarque on conclut que la famille $\mathcal{M}$ contient toutes les parties ouvertes de $\mathbb{R}^m$.

b) D'autre part, si on se donne une suite de parties $A_n \in \mathcal{M}$ on aura pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^m$,

$$\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) + h = \bigcup_{n \geq 0} (A_n + h) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \text{car} \quad \forall n, A_n + h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \implies \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{M}$$

Donc, la famille $\mathcal{M}$ est stable par les réunions dénombrables.

c) De même, noter que pour toute partie $A \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ le complémentaire $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. De plus, puisque pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^m$ la translation $A^c + h = (A + h)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$; car $A + h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ on en déduit que la partie complémentaire $A^c \in \mathcal{M}$. Donc, la famille $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire.

Conclusion : Puisque la famille $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m); \forall h \in \mathbb{R}^m \implies A + h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\}$ est une tribu contenue dans la tribu borélienne, et en même temps; elle contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^m$ donc elle est égale à la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Par conséquent, toutes les translatés d'une partie borélienne $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ sont des boréliens de $\mathbb{R}^m$.

En procédant comme ci-dessus; on vérifie que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ est stable par les homothéties.

Exercice 6.2 Soit $f : (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) \rightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{T})$ une application mesurable. Montrer que pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^m$ et pour tout scalaire $\lambda > 0$ les applications, $f_h, g_\lambda : (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)) \rightarrow (\mathbf{E}, \mathcal{T})$, définies par les expressions suivantes sont mesurables :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad f_h(x) = f(x - h) \quad \text{et} \quad g_\lambda(x) = f(x/\lambda)$$

Solution 6.2 Comme dans l'exercice précédent, pour tous $h \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ considérons les applications mesurables $x \mapsto T_h(x) = x + h$ et $x \mapsto M_\lambda(x) = \lambda x$ (elles sont continues). Ceci permet de voir que les fonctions $f_h = f \circ T_{-h}$ et $g_\lambda = f \circ M_{1/\lambda}$ sont composées par des fonctions mesurables, donc elles sont mesurables.

Exercice 7.2 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $F : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de composantes $f_1, \dots, f_m$.

- 1) Montrer que pour tout pavé ouvert $\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^m$ l'inverse : $F^{-1}(\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[) = \bigcap_{i=1}^{i=m} f_i^{-1}(]a_i, b_i[)$.
 - 2) En déduire que l'application $F : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est mesurable si et seulement, si ses composantes $f_i : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.
-

Solution 7.2 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $F : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application dont les composantes sont désignées par : $f_1, \dots, f_m$.

- 1) Soit $\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^m$ un pavé ouvert. Par définition de l'image inverse on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 x \in F^{-1}\left(\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[\right) &\iff F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[\\
 &\iff \forall i = 1, \dots, m; f_i(x) \in]a_i, b_i[\\
 &\iff \forall i = 1, \dots, m; a_i < f_i(x) < b_i \\
 &\iff \forall i = 1, \dots, m; x \in f_i^{-1}(]a_i, b_i[) \\
 &\iff x \in \bigcap_{i=1}^{i=m} f_i^{-1}(]a_i, b_i[)
 \end{aligned}$$

Ce qui démontre l'égalité ensembliste proposée.

2) Si l'application $F : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est mesurable il s'ensuit que les fonctions composées, $pr_i \circ F = f_i$, sont mesurables ; où $pr_i(x) = x_i$ désigne la i ème projection de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}$ qui est mesurable (Voir le Cour).

Inversement, si toutes les composantes $f_1, \dots, f_m$ sont mesurables sur $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on voit que pour tout indice $i = 1, \dots, m$ l'image inverse $f_i^{-1}(]a_i, b_i[) \in \mathcal{T}$, donc leur intersection

$$\bigcap_{i=1}^{i=m} f_i^{-1}(]a_i, b_i[) = F^{-1}\left(\prod_{i=1}^{i=m}]a_i, b_i[\right) \in \mathcal{T}$$

D'autre part, puisque les pavés ouverts de $\mathbb{R}^m$ engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ on en déduit que l'application F est mesurable sur $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Exercice 8.2 Etant donnée deux espaces mesurables $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ et une fonction $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$; on leur associe les familles de parties suivantes :

$$f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(A) \subseteq \mathbf{E}; A \in \mathcal{S}\}, \quad f_*(\mathcal{T}) := \{A \subseteq \mathbf{F}; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\} \quad \text{et} \quad f(\mathcal{T}) := \{f(A); A \in \mathcal{T}\}$$

- 1) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{S})$ et $f_*(\mathcal{T})$ sont des tribus sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ respectivement.
- 2) Montrer que $f(\mathcal{T})$ n'est pas en général une tribu sur $\mathbf{F}$. Justifier votre réponse.
- 3) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{S})$ est la plus petite tribu sur $\mathbf{E}$ qui rend $f : \mathbf{E} \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ mesurable.
- 4) Montrer que $f_*(\mathcal{T})$ est la plus grande tribu sur $\mathbf{F}$ qui rend $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbf{F}$ mesurable.
- 5) Montrer que pour toute famille de parties, $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{F})$, l'application $f : (\mathbf{E}, f^{-1}(\sigma(\Omega))) \rightarrow (\mathbf{F}, \sigma(\Omega))$ est mesurable. En déduire qu'on a la formule de transfère : $f^{-1}(\sigma(\Omega)) = \sigma(f^{-1}(\Omega))$.

Solution 8.2 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et $(\mathbf{F}, \mathcal{S})$ des espaces mesurables et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une fonction. On considère les familles de parties suivantes :

$$f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(A) \subseteq \mathbf{E}; A \in \mathcal{S}\}, \quad f_*(\mathcal{T}) := \{A \subseteq \mathbf{F}; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\} \quad \text{et} \quad f(\mathcal{T}) := \{f(A); A \in \mathcal{T}\}$$

1) i) Vérifions que la famille de parties $f^{-1}(\mathcal{S}) = \{f^{-1}(A) \subseteq \mathbf{E}; A \in \mathcal{S}\}$ est une tribu sur $\mathbf{E}$.

D'abord, noter que les parties $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ et $\mathbf{E} = f^{-1}(\mathbf{F}) \in f^{-1}(\mathcal{S})$. De même, si $A \in f^{-1}(\mathcal{S})$ il existe par définition une partie $B \in \mathcal{S}$ telle que $A = f^{-1}(B)$, donc par passage au complémentaire on obtient $A^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{S})$ car partie $B^c \in \mathcal{S}$ (tribu).

Noter aussi que si une suite de parties $A_n \in f^{-1}(\mathcal{S})$ il existe une autre suite de parties $B_n \in \mathcal{S}$ telle que $A_n = f^{-1}(B_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, comme la réunion

$$\bigcup_{n \geq 0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{S})$$

car le fait que $\mathcal{S}$ est une tribu cela entraîne que la réunion $\bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{S}$.

Conclusion ; $f^{-1}(\mathcal{S})$ est une tribu de parties sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

ii) Vérifions que la famille de parties $f_*(\mathcal{T}) = \{A \subseteq \mathbf{F}; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur $\mathbf{F}$.

L'ensemble vide $\emptyset \in f_*(\mathcal{T})$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$. De même, $\mathbf{F} \in f_*(\mathcal{T})$ car $f^{-1}(\mathbf{F}) = \mathbf{E} \in \mathcal{T}$. Noter aussi que si une partie $A \in f_*(\mathcal{T})$ on aura par définition $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$, donc par passage au complémentaire ; $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{T}$ (tribu). Donc, $A^c \in f_*(\mathcal{T})$; ce qui montre que $f_*(\mathcal{T})$ est stable par passage au complémentaire.

Enfin, si $A_n \in f_*(\mathcal{T})$ est une suite de parties on aura par définition $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{T}$. Donc, la réunion

$$f^{-1}\left(\bigcup A_n\right) = \bigcup f^{-1}(A_n) \in \mathcal{T} \implies \bigcup A_n \in f_*(\mathcal{T})$$

Conclusion : la famille de parties $f_*(\mathcal{T})$ est une tribu sur $\mathbf{F}$.

2) Si f n'est pas surjective on aura $f(\mathbf{E}) \neq \mathbf{F}$, dans ce cas $\mathbf{F} \notin f(\mathcal{T})$. En effet, même si f est surjective, en général on n'aura pas la stabilité par passage au complémentaire. Par exemple, la fonction $f(x) = x(x^2 - 3)$ est surjective telle que si on considère la partie $A = [\sqrt{3}, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on obtient :

$$f(A) = f([\sqrt{3}, +\infty[) = [0, +\infty[\quad \text{et} \quad f(A^c) = f(]-\infty, \sqrt{3}[) =]-\infty, 2[\implies (f(A))^c \neq f(A^c)$$

Conclusion : la famille des images directes $f(\mathcal{T})$ n'est pas une tribu en général.

3) Prenons $\mathcal{T}$ une tribu de parties sur l'ensemble $\mathbf{E}$ telle que l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ soit mesurable.

Noter que sous cette hypothèse la définition de la mesurabilité entraîne que pour toute partie $A \in \mathcal{S}$ l'image inverse $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Or, ceci montre que la tribu image inverse,

$$f^{-1}(\mathcal{S}) = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{T}$$

Ainsi, grâce à cette inclusion on conclut que l'image inverse $f^{-1}(\mathcal{S})$ est la plus petite tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$ qui rend l'application $f : \mathbf{E} \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ mesurable.

4) Comme dans la question précédente, on se donne une tribu quelconque $\mathcal{S}$ sur $\mathbf{F}$ et on suppose que l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, \mathcal{S})$ est mesurable, ceci implique que pour toute partie $A \in \mathcal{S}$ on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Ainsi, par définition de la tribu image on voit que :

$$\mathcal{S} \subseteq f_*(\mathcal{T}) = \{A \subseteq \mathbf{F}; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

Donc, la tribu image $f_*(\mathcal{T})$ est la plus grande tribu qu'on peut mettre sur l'ensemble $\mathbf{F}$ pour que l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbf{F}$ devient mesurable.

5) Soient $\Omega \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{F})$ une famille de parties et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application. Noter que dans ces conditions on obtient deux tribus engendrées : $\sigma(\Omega)$ est une tribu sur $\mathbf{F}$ et $\sigma(f^{-1}(\Omega))$ est une tribu sur $\mathbf{E}$.

Maintenant, puisque la famille de parties $f^{-1}(\Omega) \subseteq f^{-1}(\sigma(\Omega))$ on en déduit que la tribu qu'elle engendre $\sigma(f^{-1}(\Omega)) \subseteq f^{-1}(\sigma(\Omega))$. D'autre part, puisque l'application $f : (\mathbf{E}, \sigma(f^{-1}(\Omega))) \rightarrow (\mathbf{F}, \sigma(\Omega))$ est mesurable, car si $A \in \Omega$ donne $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\Omega) \subseteq \sigma(f^{-1}(\Omega))$. Ainsi, comme l'image inverse $f^{-1}(\sigma(\Omega))$ est la plus petite qui rend l'application $f : \mathbf{E} \rightarrow (\mathbf{F}, \sigma(\Omega))$ mesurable on en déduit que l'image inverse $f^{-1}(\sigma(\Omega)) \subseteq \sigma(f^{-1}(\Omega))$. Donc, on a l'égalité des tribus $f^{-1}(\sigma(\Omega)) = \sigma(f^{-1}(\Omega))$.

Exercice 9.2 Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

- 1) Pour tout $x \in \mathbf{E}$ on pose, $F(x) = (x, f(x)) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}$; c'est l'application graphe de f .
- i) Montrer que pour tout couple de parties mesurables $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a :

$$F^{-1}(A \times B) = A \cap f^{-1}(B)$$

- ii) En déduire que l'application graphe, $F : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, est mesurable.
- 2) La partie, $\mathbf{Gr}(f) := \{(x, f(x)); x \in \mathbf{E}\} \subset \mathbf{E} \times \mathbb{R}$, s'appelle graphe de la fonction f .
- i) Montrer que le complémentaire du graphe $\mathbf{Gr}(f)$ dans le produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ est donné par :

$$\mathbf{Gr}(f)^c = \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}(]r, +\infty[) \times]-\infty, r[\right) \bigcup \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}(]-\infty, r[) \times]r, +\infty[\right)$$

- ii) En déduire que le graphe $\mathbf{Gr}(f) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une partie mesurable.

Solution 9.2 Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

- 1) Pour tout $x \in \mathbf{E}$ on pose, $F(x) = (x, f(x)) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R}$; c'est la fonction graphe de f .
- i) Soit $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ des parties mesurables dans $\mathbf{E}$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Alors, par définition de l'image inverse d'une partie on peut écrire :

$$x \in F^{-1}(A \times B) \iff F(x) = (x, f(x)) \in A \times B \iff x \in A \text{ et } f(x) \in B \iff x \in A \cap f^{-1}(B)$$

Donc, l'image inverse $F^{-1}(A \times B) = A \cap f^{-1}(B)$.

- ii) Rappelons que la tribu produit tensoriel $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée sur $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$ par les rectangles $A \times B$ avec $A \in \mathcal{T}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Supposons alors que la fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, donc pour toute partie borélienne $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'image inverse $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Par suite, pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ on aura d'après i) : $F^{-1}(A \times B) = A \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Par conséquent, l'application graphe $F : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, est mesurable.

2) La partie, $\mathbf{Gr}(f) := \{(x, f(x)); x \in \mathbf{E}\} \subset \mathbf{E} \times \mathbb{R}$, s'appelle graphe de la fonction f .

i) Prenons un couple $(x, y) \notin \mathbf{Gr}(f)$, donc $f(x) \neq y$. Noter que cette condition nous donne l'une des deux inégalités $y < f(x)$ ou $f(x) < y$. Ainsi, par densité des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$ il existe un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $y < r < f(x)$ ou $f(x) < r < y$. Or, ceci implique que le complémentaire :

$$\mathbf{Gr}(f)^c \subseteq \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}([r, +\infty[) \times]-\infty, r[) \right) \bigcup \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}(]-\infty, r[) \times]r, +\infty[) \right)$$

En effet, cette inclusion est une égalité (l'inclusion réciproque est évidente).

ii) Puisque on vient de voir que le complémentaire $\mathbf{Gr}(f)^c \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on en déduit donc que le graphe $\mathbf{Gr}(f) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une partie mesurable dans le produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$.

Exercice 10.2 Soit $f_n : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que les sous-ensembles suivants sont mesurables :

- i) $I_+ = \{x \in \mathbf{E}; \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty\}$ et $I_- = \{x \in \mathbf{E}; \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty\}$.
- ii) $B = \{x \in \mathbf{E}; (f_n(x)) \text{ est bornée}\}$ et $C = \{x \in \mathbf{E}; (f_n(x)) \text{ est convergente}\}$.

Solution 10.2 Soit $f_n : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables.

i) a) Montrons que le sous-ensemble $I_+ = \{x \in \mathbf{E}; \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty\}$ est mesurable.

Soit $x \in I_+$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. Traduisons alors la limite à l'infini pour avoir la proposition

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_0 \implies f_n(x) > m$$

qui permet de déduire que le sous-ensemble I_+ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I_+ = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} f_p^{-1}(]m, +\infty[)$$

Ainsi, comme les f_n sont mesurables il s'ensuit que les sous-ensembles, $f_p^{-1}(]m, +\infty[) \in \mathcal{T}$, et par suite le sous-ensemble $I_+ \in \mathcal{T}$; car il est obtenu par les intersections et les réunions dénombrables d'éléments de la tribu $\mathcal{T}$.

i) b) De la même façon que dans i) a) on vérifie que le sous-ensemble

$$I_- = \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} f_p^{-1}(]-\infty, -m]) \in \mathcal{T}$$

ii) c) Montrons que le sous-ensemble $B = \{x \in \mathbf{E}; (f_n(x)) \text{ est bornée}\}$ est mesurable.

Noter que si $x \in B$ il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $-m \leq f_n(x) \leq m$. Donc, le sous-ensemble

$$B = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-m, m]) \in \mathcal{T}$$

ii) d) Montrons que le sous-ensemble $C = \{x \in \mathbf{E}; (f_n(x)) \text{ est convergente}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Observer que le sous-ensemble C on pourra le décrire aussi par :

$$C = \{x \in \mathbb{E}; \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\} = \left(\limsup f_n - \liminf f_n \right)^{-1}(\{0\})$$

Ainsi, comme d'après le Cours, les fonctions f_n sont mesurables implique que les limites $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ ce sont des fonctions mesurables. Donc, le sous-ensemble de niveau $C \in \mathcal{T}$ est mesurable.

Exercice 11.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. En utilisant la suite de fonctions,

$$f_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right)$$

montrer que la fonction dérivée $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

Solution 11.2 Puisque la fonction f est mesurable (borélienne) on en déduit que les fonctions f_n définies ci-dessus sont mesurables et convergent simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction dérivée f' ; cette dernière est donc mesurable (borélienne).

Exercice 12.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = f^{-1}([a, +\infty[) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $x \in A$, $[x, +\infty[\subseteq A$.
 - 2) Montrer que si $b = \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ alors l'intervalle $]b, +\infty[\subseteq A \subseteq [b, +\infty[$.
 - 3) En déduire que les combinaisons linéaires des fonctions monotones sont boréliennes.
 - 4) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Montrer que pour tout réel $a > 0$ la fonction, $f_a(x) = \frac{[af(x)]}{a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, est une fonction étagée mesurable où, $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, désigne la partie entière.
-

Solution 12.2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = f^{-1}([a, +\infty[) \neq \emptyset$. Fixons réel $x \in A$ et montrons que l'intervalle $[x, +\infty[\subseteq A$.

En effet, puisque $x \in A$ on aura $a \leq f(x)$. Ainsi, comme la fonction f est croissante, on en déduit que pour tout réel $y \geq x$ on aura : $a \leq f(x) \leq f(y)$; ce qui entraîne $y \in f^{-1}([a, +\infty[)$. D'où, $[x, +\infty[\subseteq A$.

- 2) Posons $b = \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$. Noter que par définition de l'inf, on aura pour tout réel $x \in A$, $b \leq x$; donc la partie $A \subseteq [b, +\infty[$.

Maintenant, prenons un réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $b < x$. Noter alors que par définition de l'inf il existe au moins un $y \in A$ tel que $b \leq y < x$. Car sinon, on aurait pour tout $y \in A$, $b < x \leq y$, or ceci contredit le fait que b est le plus grand de tous les minorants de la partie A . Ainsi, puisque nous sommes sûrs qu'il existe un $y \in A$ tel que $b \leq y \leq x$ on en déduit que $a \leq f(y) \leq f(x)$ (f est croissante et $y \in A$). Donc, le réel $x \in A$ et par suite tout l'intervalle $]b, +\infty[\subseteq A \subseteq [b, +\infty[$.

- 3) Noter que si la fonction f est croissante le résultat de 2) implique pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ l'image inverse $f^{-1}([a, +\infty[)$ est égale soit à l'ouvert $]b, +\infty[$ ou est égale au fermée $[b, +\infty[$; donc $f^{-1}([a, +\infty[)$ est un borélien de $\mathbb{R}$. En conséquence, les fonctions croissantes sont mesurables.

D'autre part, si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante il s'ensuit que son opposé $f = -g$ est croissante. Donc, toutes les fonctions décroissantes sont également des fonctions mesurables.

Enfin, comme on sait que l'ensemble de toutes les fonctions mesurables $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel, on conclut que toutes les combinaisons linéaires de fonctions monotones sont des fonctions mesurables.

- 4) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Noter alors que pour tout réel $a > 0$ la fonction $af(x)$ est également mesurable bornée. D'autre part, comme la partie entière $x \mapsto [x] \in \mathbb{Z}$ est croissante; elle est donc mesurable (d'après 3). Ainsi, par cette remarque on conclut que la fonction composée

$x \mapsto [af(x)] \in \mathbb{Z}$ est mesurable bornée sur $\mathbb{R}$; donc elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $\mathbb{Z}$. Par conséquent, pour tout réel $a > 0$ la fonction $f_a(x) = \frac{[af(x)]}{a}$ est une fonction étagée mesurable.

Exercice 13.2 Cet exercice propose une démonstration du théorème de l'approximation des fonctions mesurables par les fonctions étagées mesurables (voir le Cours).

Sur la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ on définit une topologie dont la famille des ouverts, $\mathcal{T}_\infty$, est constituée par les ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ union la famille des intervalles de type $]a, +\infty]$ et $[-\infty, b[$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

0) Montrer que l'espace topologique $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_\infty)$ est compact.

1) Montrer que la fonction $\psi : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ définie par les expressions suivantes :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = +\infty \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

est un homéomorphisme $\psi : ([0, +\infty], \mathcal{T}_\infty) \rightarrow ([0, 1], |\cdot|)$.

2) Étant donnée une fonction mesurable, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{F}) \rightarrow [0, 1]$, on lui associe une suite de fonctions définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbf{E}), \quad f_n(x) = 2^{-n} [2^n f(x)]$$

i) Montrer que (f_n) est une suite croissante de fonctions étagées mesurables.

ii) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbf{E}$.

3) Démontrer le théorème de l'approximation des fonctions mesurables par les fonctions étagées mesurables vu dans le Cours.

Solution 13.2 Sur la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ on définit une topologie dont la famille des ouverts, $\mathcal{T}_\infty$, est constituée par les ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ union la famille des intervalles de type $]a, +\infty]$ et $[-\infty, b[$ avec a et $b \in \mathbb{R}$ qui représentent les voisinages des points $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

0) Montrons que l'espace topologique $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_\infty)$ est compact.

D'abord, noter que l'espace topologique $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_\infty)$ est séparé, car les couples de points éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ on peut les séparer par les ouverts de $\mathbb{R}$ qui sont aussi des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$. De même, pour tout $x \neq +\infty$ (resp. $x \neq -\infty$) on peut les séparer par les ouverts $]x - 1, x + 1[$ et $]x + 2, +\infty[$ (resp. $] - \infty, x - 2[$).

Maintenant, supposons qu'on a un recouvrement ouvert de $\overline{\mathbb{R}} = \bigcup_{i \in I} O_i$. Donc, comme $\pm\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ il existe au moins deux indices $\{i_1, i_2\} \subset I$ et deux réels $a_1 < a_2$ tels que $[-\infty, a_1[\subseteq O_{i_1}$ et $]a_2, +\infty] \subseteq O_{i_2}$. Noter que suite à cette remarque on obtient un recouvrement ouvert du segment

$$[a_1, a_2] \subseteq \bigcup_{i \in J} O_i \subseteq \mathbb{R} \quad \text{où} \quad J = \{i \in I; \pm\infty \notin O_i\}$$

Ainsi, comme le segment $[a_1, a_2]$ est compact dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, il existe donc une famille finie d'ouverts $\{O_{i_3}, \dots, O_{i_n}\}$ qui le recouvre, donc on aura aussi : $\overline{\mathbb{R}} = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \dots \cup O_{i_n}$. Par conséquent, l'espace topologique $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_\infty)$ est compact.

1) La fonction $\psi : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ définie par les expressions suivantes :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = +\infty \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

est une bijection continue ; sa fonction réciproque est donnée par les expressions suivantes :

$$\psi^{-1}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 1 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in [0, 1[\end{cases}$$

elle même est continue de $([0, 1], |\cdot|)$ dans $([0, +\infty], \mathcal{T}_\infty)$. Donc, $\psi : ([0, +\infty], \mathcal{T}_\infty) \rightarrow ([0, 1], |\cdot|)$ est un homéomorphisme.

2) Soit $f : (\mathbf{E}, \mathcal{F}) \rightarrow [0, 1]$ une fonction mesurable ; elle est donc bornée. On considère la suite de fonctions définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbf{E}), \quad f_n(x) = 2^{-n} [2^n f(x)]$$

i) Avec les idées développées dans l'exercice précédent 12.2 on conclut que les fonctions

$$x \in \mathbf{E} \mapsto f_n(x) = \frac{[2^n f(x)]}{2^n} \in \mathbb{R}$$

sont mesurable étagées. Montrons alors qu'elles sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

Observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a : $2^{n+1} f_n(x) = 2[2^n f(x)]$. Donc, par définition de la partie entière on déduit les inégalités suivantes :

$$2^{n+1} f_n(x) \leq 2^{n+1} f(x) < [2^{n+1} f(x)] + 1 \implies 2^{n+1} f_n(x) \leq [2^{n+1} f(x)] = 2^{n+1} f_{n+1}(x)$$

Simplifiant la dernière inégalité par 2^{n+1} on conclut que la suite de fonctions (f_n) est croissante.

ii) Noter que la partie entière nous donne la double inégalité suivante : $(\forall x \in \mathbf{E})(\forall n \in \mathbb{N})$,

$$[2^n f(x)] \leq 2^n f(x) < [2^n f(x)] + 1 \implies 0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

3) Avec le résultat de 2) nous sommes en mesure de démontrer que toute fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées mesurables. En effet,

i) Si $f : \mathbf{E} \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable en la composant avec l'homéomorphisme $\psi : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$ on obtient une fonction mesurable, $\psi \circ f : \mathbf{E} \rightarrow [0, 1]$ qui est bornée. Donc, d'après 2), la suite de fonctions étagées mesurables

$$F_n(x) = 2^{-n} [2^n \psi \circ f(x)]$$

converge uniformément vers $f \circ \psi$ sur $\mathbf{E}$. D'autre part, puisque ψ^{-1} est continue de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty]$ il s'ensuit que la suite de fonctions mesurables étagées

$$f_n(x) = \psi^{-1}(F_n(x)) = \psi^{-1}\left(2^{-n} [2^n \psi \circ f(x)]\right)$$

converge simplement sur $\mathbf{E}$ vers la fonction f .

ii) Si $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable de signe quelconque, on applique alors l'étape i) sur la partie positive (resp. négative) f^+ (resp. f^-) pour trouver une suite de fonctions étagées mesurables f_n^+ (resp. f_n^-) qui converge simplement sur $\mathbf{E}$ vers f^+ (resp. f^-). Pour conclure, enfin, on prend la suite de fonctions étagées mesurables $f_n = f_n^+ - f_n^-$ qui converge simplement vers $f = f^+ - f^-$ sur $\mathbf{E}$.

Exercice 14.2 On identifie $\{0, 1\}$ au corps $\mathbb{Z}_2$. Ainsi, pour tout ensemble non vide $\mathbf{E}$; l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$ devient une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre unitaire relativement aux lois $+$, $\times$ et la multiplication par les scalaires de $\mathbb{Z}_2$. On vous rappelle aussi que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est un anneau commutative associative unitaire lorsqu'on le munit par les lois Δ (différence symétrique) et $\cap$ (voir Cours chp. I).

D'autre part, si pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$ on pose : $0 \cdot A = \emptyset$ et $1 \cdot A = A$ il en résulte que $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel, et que par suite $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$ devient une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre qui est commutative, associative et unitaire.

1) Montrer que toute algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est en fait une $\mathbb{Z}_2$ -sous algèbre de $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$. En déduire que toute algèbre finie de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est de cardinal 2^n .

2) Montrer que l'application indicatrice, $\chi : (\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2), +, \times, \cdot)$ est un homomorphisme d'algèbres injectif. En déduire que pour toute algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ la famille de fonctions indicatrices, $\mathcal{F}(\mathcal{A}) := \{\chi_A; A \in \mathcal{A}\}$, est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$.

3) Montrer que si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est une σ -algèbre alors la famille $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ est stable par la limite simple.

4) Inversement, considérons une sous-algèbre de fonctions $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ qui est unitaire et stable par passage à la limite simple et posons, $\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{E}), \chi_A \in \mathcal{F}\}$.

i) Montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre de parties sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

ii) Montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une classe monotone sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

iii) En déduire que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une σ -algèbre sur $\mathbf{E}$.

5) Conclure.

Solution 14.2 On identifie $\{0, 1\}$ au corps $\mathbb{Z}_2$. Ainsi, pour tout ensemble non vide $\mathbf{E}$; l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$ devient une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre unitaire relativement aux lois $+$, $\times$ et la multiplication par les scalaires de $\mathbb{Z}_2$. On vous rappelle aussi que l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ est un anneau commutative associative unitaire lorsqu'on le munit par les lois Δ (différence symétrique) et $\cap$ (voir Cours chp. I). D'autre part, si pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$ on pose : $0 \cdot A = \emptyset$ et $1 \cdot A = A$ il en résulte que $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel, et que par suite $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$ devient une $\mathbb{Z}_2$ -algèbre qui est commutative, associative et unitaire.

1) a) On rappelle qu'au chapitre I on a vu que toute algèbre de parties $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ est stable par l'intersection $\cap$ et la différence symétrique Δ . De plus, on vu qu'elle est stable par passage au complémentaire; car $\mathbf{E} \in \mathcal{A}$. Ceci implique donc que $(\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ est un sous-anneau unitaire de $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap)$. Et, si on tient compte de la multiplication externe du corps $\mathbb{Z}_2$ sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ rappelée ci-dessus; on conclut alors que toute algèbre de parties $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot)$.

b) Si une algèbre de parties $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{E}$ est un $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$ il existe donc un isomorphisme canonique $\mathcal{A} \simeq (\mathbb{Z}_2)^m$ avec m est la diemson sur $\mathbb{Z}_2$. Par conséquent, une algèbre de parties $\mathcal{A}$ de $\mathbb{Z}_2$ -dimension finie m est nécessairement finie de cardinal 2^m .

2) Appliquer les résultats et les formules établies dans l'exercice 5.1 (cf. TD1) pour voir que l'application indicatrice, $\chi : (\mathcal{P}(\mathbf{E}), \Delta, \cap, \cdot) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2), +, \times, \cdot)$ est un homomorphisme injectif de $\mathbb{Z}_2$ -algèbres qui envoie une algèbre de parties $\mathcal{A}$ sur la sous-algèbre de fonctions $\mathcal{F}(\mathcal{A}) := \{\chi_A; A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{Z}_2)$.

3) Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{E})$ une σ -algèbre. Si on prend une suite de parties $A_n \in \mathcal{A}$ ceci nous donne alors une suite de fonctions, $\chi_{A_n} \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$. Ainsi, si on suppose que la suite de fonctions χ_{A_n} converge simplement on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{A_n} = \limsup \chi_{A_n} = \chi_{\limsup A_n}$$

Par conséquent, puisque $\limsup A_n \in \mathcal{A}$ (tribu) il en résulte que la limite simple $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{A_n} \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$.

4) Inversement, considérons une sous-algèbre de fonctions $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$ qui est unitaire et stable par passage à la limite simple. Posons ci-dessous $\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{E}), \chi_A \in \mathcal{F}\}$.

i) Montrons que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre de parties sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

a) Puisque $\chi_\emptyset = 0$ et $\chi_{\mathbf{E}} = 1 \in \mathcal{F}$ cela implique que $\emptyset$ et $\mathbf{E} \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

b) Observer que si $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ on aura par définition $\chi_A \in \mathcal{F}$; donc $1 - \chi_A = \chi_{A^c} \in \mathcal{F}$. D'où, $A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

c) Si A et $B \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ on aura $\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} = \chi_{A \cup B} \in \mathcal{F}$. Donc, la réunion $A \cup B \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Conclusion : $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre de parties sur $\mathbf{E}$.

ii) Montrons que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une classe monotone sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

Soit $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ une suite croissante de parties. Rappelons que d'après TD1 on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} A_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\bigcup_{n \geq 0} A_n}$$

Ainsi, comme l'algèbre de fonctions $\mathcal{F}$ contient les limites simples de fonctions on aura donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\bigcup_{n \geq 0} A_n} \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$$

En effet, comme la famille de parties $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est stable par passage au complémentaire elle est également stable par les intersections dénombrables décroissantes. Donc, $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une classe monotone sur $\mathbf{E}$.

iii) Par i) et ii) on sait maintenant que la famille de parties $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre stable par les réunions croissantes. Noter alors que si $A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une suite quelconque; en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = A_0 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F}) \text{ (algèbre)}$$

on obtient une suite de parties croissantes; donc sa réunion $\bigcup B_n = \bigcup A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Par conséquent, la famille de parties $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une σ -algèbre sur $\mathbf{E}$.

5) L'application injective χ établit une bijection naturelle entre les σ -algèbres de parties sur un ensemble $\mathbf{E}$ et les sous-algèbres de fonctions caractéristiques stables par passage à la limite simple $\mathbf{E}$.

Solution de la feuille de TD3 :

Mesures positives et les intégrales

Exercice 1.3 On définit deux fonctions d'ensembles, μ et $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}^*$, par les expressions suivantes¹ :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \quad \mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infinie} \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction d'ensembles, $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est additive. Est-elle une mesure ?
- 2) Montrer que la fonction d'ensembles, $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est une mesure.

Solution 1.3 1) Montrons que la fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}^*$, définie par les expressions suivantes est additive :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \quad \mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est vide} \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infinie} \end{cases}$$

- i) Par définition on a $\mu(\emptyset) = 0$.
- ii) Soient A et $B \subseteq \mathbb{N}^*$ des parties disjointes, $A \cap B = \emptyset$. D'abord, noter que si A ou B est une partie infinie la réunion $A \cup B$ est infinie, donc on aura

$$\mu(A) = +\infty \quad \text{ou} \quad \mu(B) = +\infty \quad \implies \quad \mu(A \cup B) = +\infty \quad \implies \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = +\infty$$

De même, si on suppose que les parties $A = \{n_1, \dots, n_p\}$ et $B = \{n_{p+1}, \dots, n_{p+q}\}$ sont finies, leur réunion $A \cup B = \{n_1, \dots, n_p, n_{p+1}, \dots, n_{p+q}\}$ est finie de cardinal $p + q$. Ainsi, par définition de la

1. On vous rappelle que la somme : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

fonction μ on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \mu(A) + \mu(B) &= \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in B} \frac{1}{n^2} \\
 &= \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{(n_k)^2} + \sum_{l=1}^{l=q} \frac{1}{(n_{p+l})^2} \\
 &= \sum_{k=1}^{k=p+q} \frac{1}{(n_k)^2} \\
 &= \sum_{n \in A \cup B} \frac{1}{n^2} \\
 &= \mu(A \cup B)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est additive, mais n'est pas une mesure positive sur $\mathbb{N}^*$. Car si on considère la suite de parties disjointes, $A_n = \{n\} \subset \mathbb{N}^*$, on obtient les affirmations suivantes :

a) $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \mathbb{N}^*$ (infini) $\implies \mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = +\infty$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu(A_n) = \mu(\{n\}) = \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty = \mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$.

c) Donc, la fonction additive $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ n'est pas σ -additive.

2) Montrons que la fonction d'ensembles, $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, définie par les expressions suivantes est une mesure positive sur $\mathbb{N}^*$.

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

La condition $\mu(\emptyset) = 0$ est vérifiée par définition de la fonction μ . Considérons alors une suite de parties disjointes $A_n = \{m_{n,k}; k \in I_n \subseteq \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^*$. Avec ces notations on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in I_n} \frac{1}{(m_{n,k})^2} \right) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}, k \in I_n} \frac{1}{(m_{n,k})^2} \\
 &= \sum_{p \in \bigcup A_n} \frac{1}{p^2} \\
 &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)
 \end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction ν est σ -additive, donc c'est une mesure positive sur $\mathbb{N}^*$.

Remarque : Noter que la mesure positive, $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est finie, car $\nu(\mathbb{N}^*) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2.3 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie mesurable $B \in \mathcal{T}$ telle que $0 < \mu(B) < +\infty$ on définit une fonction d'ensembles, $\mu(\cdot/B) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$, par :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A/B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

Montrer que $\mu(\cdot/B)$ est mesure de probabilité sur $\mathbf{E}$ appelée probabilité conditionnelle sachant B .

Solution 2.3 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie mesurable $B \in \mathcal{T}$ de mesure non nulle $0 < \mu(B) < +\infty$ on définit une fonction d'ensembles, $\mu(\cdot/B) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A/B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

Montrons que $\mu(\cdot/B)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{E}$. En effet, d'après l'expression de la fonction $\mu(\cdot/B)$ on voit que $\mu(\emptyset/B) = \frac{\mu(\emptyset \cap B)}{\mu(B)} = 0$ et que $\mu(\mathbf{E}/B) = \frac{\mu(\mathbf{E} \cap B)}{\mu(B)} = 1$.

De plus, si on se donne une suite disjointe $A_n \in \mathcal{T}$ on pourra alors écrire que,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n/B\right) &= \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \cap B\right)}{\mu(B)} \\ &= \frac{\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} (A_n \cap B)\right)}{\mu(B)} \\ &= \frac{\sum_{n \geq 0} \mu(A_n \cap B)}{\mu(B)} \quad (\text{car, les } A_n \cap B \text{ sont disjointes}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu(A_n/B) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque la fonction $\mu(\cdot/B)$ est σ -additive ; donc c'est une mesure probabilité sur $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.

Exercice 3.3 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé (ie. $\mu(\mathbf{E}) = 1$).

- 1) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$.
- 2) Montrer que la famille de parties, $\mathcal{T}_\mu := \{A \in \mathcal{T}; \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$, est une tribu.

Solution 3.3 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé (ie. $\mu(\mathbf{E}) = 1$).

1) Observer que pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$ on a une réunion disjointe, $\mathbf{E} = A \cup A^c$ avec $A^c \in \mathcal{T}$. Donc, par additivité de la mesure probabilité μ on obtient

$$\mu(\mathbf{E}) = \mu(A) + \mu(A^c) \implies \mu(A^c) = 1 - \mu(A)$$

En effet, de façon générale, étant donnée une mesure poistive $\nu : \mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ et un couple de parties mesurables A et $B \in \mathcal{T}$ telles que $B \subseteq A$ et $\mu(A) < +\infty$; on obtient par additivité de la mesure ν :

$$A = B \cup (A \setminus B) \implies \nu(A) = \nu(B) + \nu(A \setminus B) \implies \nu(A \setminus B) = \nu(A) - \nu(B)$$

En particulier, si $\mathbf{E}$ est de mesure finie il s'ensuit que : $\nu(A^c) = \nu(\mathbf{E}) - \nu(A), \forall A \in \mathcal{T}$.

2) Montrons que la famille de parties, $\mathcal{T}_\mu := \{A \in \mathcal{T}; \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$, est une tribu.

i) Puisque nous avons $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\mathbf{E}) = 1$ cela entraîne que $\emptyset$ et $\mathbf{E} \in \mathcal{T}_\mu$.

ii) Si $A \in \mathcal{T}_\mu$ on aura $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, donc d'après 1) ; on aura $\mu(A^c) = 1$ ou $\mu(A^c) = 0$. D'où, $A^c \in \mathcal{T}_\mu$.

iii) Soit $A_n \in \mathcal{T}_\mu$ une suite de parties. Noter que s'il existe au moins une parties A_{n_0} telle que $\mu(A_{n_0}) = 1$ il s'ensuit que

$$1 = \mu(A_{n_0}) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq 1 \implies \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = 1 \implies \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}_\mu$$

Et, si toutes les parties A_n sont de mesure nulle il s'ensuit que la réunion est aussi de mesure nulle, car :

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = 0 \implies \bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}_\mu$$

Conclusion : la famille des parties mesurables $\mathcal{T}_\mu$ est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

Exercice 4.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application. Pour toute partie $A \subseteq \mathbf{F}$ vérifiant $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ on pose, $\mu_f(A) := \mu(f^{-1}(A))$.

1) Montrer que la fonction d'ensembles, $\mu_f : f_*(\mathcal{T}) \rightarrow [0, +\infty]$, est une mesure positive sur $\mathbf{F}$, appelée mesure image directe de μ par f où

$$f_*(\mathcal{T}) := \{A \subseteq \mathbf{F}; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

2) Vérifier que la mesure μ_f est finie (resp. probabilité) si et seulement, si μ est finie (resp. probabilité).

3) Trouver l'expression de la mesure image directe μ_f dans les cas suivants :

i) δ_a est la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

ii) $\mu = \sum_{n \geq 0} n \delta_n$ une mesure positive sur $\mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (une suite).

iii) λ_1 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

iv) $\mu = \text{Card}$ est la mesure dénombrement (cardinal d'une partie de $\mathbb{N}$) et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Solution 4.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$ une application. Pour toute partie $A \subseteq \mathbf{F}$ vérifiant $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ on pose, $\mu_f(A) := \mu(f^{-1}(A))$.

On rappelle que dans la série d'exercices TD 2 nous avons démontré que la famille de parties,

$$f_*(\mathcal{T}) = \{A \subseteq \mathbf{F}; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$$

est une tribu sur $\mathbf{F}$ appelée image directe de $\mathcal{T}$ par l'application $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$. On rappelle aussi que l'application $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbf{F}, f_*(\mathcal{T}))$ est mesurable.

1) Montrons alors que la fonction d'ensembles, $\mu_f : f_*(\mathcal{T}) \rightarrow [0, +\infty]$, est une mesure positive sur $\mathbf{F}$ que l'on appelle mesure image directe de μ par f .

D'abord, noter que $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Considérons alors une famille dénombrable disjointes $A_n \in f_*(\mathcal{T})$. Dans ces conditions on voit que la famille des images réciproques $f^{-1}(A_n)$ elle-même est disjointe dans $\mathbf{E}$, donc comme μ est une mesure positive sur $\mathbf{E}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_f\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(A_n)\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu(f^{-1}(A_n)) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu_f(A_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction d'ensembles $\mu_f : f_*(\mathcal{S}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ est une mesure positive.

2) Le fait que nous avons la relation $\mu_f(\mathbf{F}) = \mu(f^{-1}(f^{-1}(\mathbf{F}))) = \mu(\mathbf{E})$ on en déduit que la mesure μ_f est finie (resp. probabilité) si et seulement, si μ est finie (resp. probabilité).

3) On donne l'expression de la mesure image directe μ_f pour certains couple d'exemples (μ, f) : mesures positives et fonctions.

i) On rappelle que la mesure de Dirac, δ_a avec $a \in \mathbb{R}$, est définie sur $\mathbb{R}$ par les expressions :

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \quad \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

Noter alors que si on se donne une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on voit que pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$(\delta_a)_f(A) = \delta_a(f^{-1}(A)) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in f^{-1}(A) \\ 0 & \text{si } a \notin f^{-1}(A) \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(a) \in A \\ 0 & \text{si } f(a) \notin A \end{cases}$$

La dernière expression montre alors que l'image directe de la mesure de Dirac δ_a est aussi une mesure de Dirac égale à : $(\delta_a)_f = \delta_{f(a)}$.

ii) Sur $\mathbb{N}$ on considère la mesure $\mu = \sum_{n \geq 1} n \delta_n$. Donc, pour une fonction donnée $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ on peut écrire par définition de la mesure image μ_f :

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \quad \mu_f(A) = \sum_{n \geq 0} n \delta_n(f^{-1}(A)) = \sum_{n \geq 0} n \delta_{f(n)}(A)$$

$$\text{D'où, } \mu_f = \sum_{n \geq 0} n \delta_{f(n)}.$$

iii) Soit $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On rappelle que dans la série de TD2 (cf. Ex. 12.2) nous avons démontré que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ l'image réciproque

$$A = f^{-1}([a, +\infty[) = [b, +\infty[\quad \text{ou} \quad]b, +\infty[\quad \text{avec} \quad b = \inf(A)$$

Ainsi, suite à ces remarques on conclut que pour tout intervalle de type $[a, b[$ on ait :

$$f^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, +\infty[) \cap \left(f^{-1}([b, +\infty[)\right)^c = [a', b'] \text{ ou } [a', b'[\text{ ou }]a', b'] \text{ ou }]a', b'[$$

où $a' = \inf f^{-1}([a, b])$ et $b' = \sup f^{-1}([a, b])$. D'où :

$$(\lambda_1)_f([a, b]) = \lambda_1(f^{-1}([a, b])) = \sup f^{-1}([a, b]) - \inf f^{-1}([a, b])$$

iv) Ici, on considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{Card})$ et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (suite). Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}$ la mesure image est donnée par l'expression :

$$\mu_f(A) = \text{Card}(f^{-1}(A)) = \text{Card}(\{n \in \mathbb{N}; f(n) \in A\}) = \text{Card}(\{n \in \mathbb{N}; f(n)\} \cap A)$$

Autrement, la mesure image μ_f compte le nombre d'appartenance des termes de la suite numérique $u_n = f(n)$ à la partie A .

Par exemple, si $f(n) = (-1)^n$ on aura $\mu_f(A) = 0$ (resp. $+\infty$) si et seulement, si $A \cap \{-1, 1\} = \emptyset$ (resp. $A \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset$).

Complément sur les fonctions croissantes. On rappelle que dans la série de TD2 (cf Exercice 12.2) nous avons démontré qu'une fonction croissante, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est mesurable où $\mathbb{R}$ est muni de sa

tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, suite à ce résultat, nous avons conclut que les combinaisons linéaires réelles finies des fonctions monotones eux aussi sont mesurables (boréliennes).

Ici, dans ce complément, on se propose de démontrer que les fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans lui même sont continues sur $\mathbb{R}$ sauf sur un sous-ensemble au plus dénombrable. Autrement dit, avec le langage de la théorie de la mesure : une fonctions monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est λ_1 -presque partout continue.

a) **Limites à gauche et à droite en un point x_0 .** Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et supposons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante (par exemple). Avec ces données on voit que le sous-ensemble :

$$\{f(x); \forall x \in \mathbb{R}, x \leq x_0\} \subseteq]-\infty, f(x_0)]$$

est majoré par $f(x_0)$, donc sa borne supérieure est un nombre réel fini :

$$M = \sup\{f(x); \forall x \in \mathbb{R}, x \leq x_0\} \leq f(x_0)$$

Ainsi, si on applique le principe de la caractérisation de la borne sup à un réel $\varepsilon > 0$ on pourra trouver un réel $x_1 < x_0$ tel que $M - \varepsilon < f(x_1) \leq M$.

En effet, puisque f est croissante on voit que pour tout réel $x \in]x_1, x_0]$ on aura les inégalités :

$$f(x_1) < f(x) \leq f(x_0) \implies M - \varepsilon < f(x_1) < f(x) \leq M \implies \forall x \in]x_1, x_0], 0 \leq M - f(x) < \varepsilon$$

Ceci montre que la limite de f à gauche de x_0 est égale à :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \sup\{f(x); x \leq x_0\} \leq f(x_0)$$

De la même façon, on montre que f possède une limite à droite de x_0 égale à :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 < x}} f(x) = \inf\{f(x); x_0 \leq x\} \geq f(x_0)$$

b) **Saut de discontinuité.** On définit le saut de discontinuité au point x_0 de la fonction croissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par l'expression positive :

$$s(f, x_0) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 < x}} f(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \geq 0$$

Il est clair que la fonction croissante f est discontinue en x_0 si et seulement, si son saut de discontinuité au point x_0 est strictement positif

$$s(f, x_0) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 < x}} f(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) > 0$$

Maintenant, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ considérons la restriction $f|_n : [n, n+1] \rightarrow [f(n), f(n+1)]$ et désignons par $D_n(f)$ le sous-ensemble de $[n, n+1]$ formé que par les points de discontinuité de f . Noter que d'après ce qui précède, pour tout point de discontinuité $a \in D_n(f)$ on a les inégalités suivantes :

$$f(n) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ a < x}} f(x) \leq f(n+1) \quad \text{avec un saut} \quad s(f, a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ a < x}} f(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) > 0$$

Noter alors que l'intervalle ouvert $] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ a < x}} f(x)[\subset]f(n), f(n+1)[$ n'est pas vide. En effet, par cette remarque on conclut qu'on pourra définir un ouvert non vide $U \subset]f(n), f(n+1)[$ en prenant la réunion disjointes d'intervalles ouverts :

$$U = \bigcup_{a \in D_n(f)}] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ a < x}} f(x)[\subset]f(n), f(n+1)[$$

Ainsi, comme les ouverts de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est toujours une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts (les composantes connexes) on en déduit que l'ensemble de discontinuité $D_n(f) \subset]n, n+1[$ de la fonction croissante f est au plus dénombrable.

c) **Conclusion :** L'ensemble de discontinuité d'une fonction monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un sous-ensemble au plus dénombrable $D = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D_n(f)$. En conséquence, comme les sous-ensembles dénombrables sont de mesure nulle par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1 , on en déduit que les fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans lui même sont mesurables et λ_1 -presque partout continues.

Exercice 5.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\} \subset \mathcal{T}$ une famille disjointe. On fixe une partie $A \in \mathcal{T}$ de mesure non nulle finie ie. $0 < \mu(A) < +\infty$.

- 1) Montrer que $\mathcal{A}_n = \{B \in \mathcal{A}; \frac{\mu(A)}{n} \leq \mu(A \cap B)\}$ est finie de cardinal au plus égal à $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Montrer que $\{B \in \mathcal{A}; \mu(B \cap A) \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$ en déduire qu'elle est au plus dénombrable.
- 3) Conclure.

Solution 5.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\} \subset \mathcal{T}$ une famille disjointe. On fixe une partie $A \in \mathcal{T}$ de mesure non nulle finie ie. $0 < \mu(A) < +\infty$.

1) Supposons que la famille de parties mesurables, $\mathcal{A}_n = \{B \in \mathcal{A}; \frac{\mu(A)}{n} \leq \mu(A \cap B)\}$, est non vide. Noter alors que s'il existe des parties $B_1, \dots, B_m$ éléments distincts dans $\mathcal{A}_n$ on aura

$$\frac{m\mu(A)}{n} \leq \mu(A \cap B_1) + \dots + \mu(A \cap B_m) = \mu(A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_m)) \leq \mu(A) \implies m \leq n$$

Par conséquent, la famille $\mathcal{A}_n$ est finie de cardinal au plus égal à n .

2) Puisque la mesure $\mu(A) > 0$ il s'ensuit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ la famille de parties $\mathcal{A}_n \subset \{B \in \mathcal{A}; \mu(B \cap A) \neq 0\}$. Donc, la réunion dénombrable $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n \subseteq \{B \in \mathcal{A}; \mu(A \cap B) \neq 0\}$.

Inversement, si pour une partie $B \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A \cap B) \neq 0$ il existe nécessairement un entier $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand tel que $\frac{\mu(A)}{n} \leq \mu(A \cap B)$; car la suite $1/n$ tend vers zéro. Ceci montre qu'on a l'inclusion réciproque $\{B \in \mathcal{A}; \mu(A \cap B) \neq 0\} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$.

Maintenant, puisque on sait que la famille de parties $\{B \in \mathcal{A}; \mu(A \cap B) \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n$ est une réunion dénombrable de parties finies, elle est donc au plus dénombrable.

3) Conclusion : Du résultat prouvé dans 2) on conclut qu'une partie de mesure non nulle rencontre un nombre au plus dénombrable d'éléments d'une famille de parties mesurables disjointes deux à deux.

Exercice 6.3 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on pose :

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(X); \forall X \in \mathcal{T}, A \subseteq X\}$$

- 1) Montrer que pour tout $A \subseteq \mathbf{E}$ il existe une partie $A_0 \in \mathcal{T}$ telle que $A \subseteq A_0$ et $\mu^*(A) = \mu(A_0)$.
- 2) Montrer que $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure extérieure.

Solution 6.3 Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on pose :

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(X); \forall X \in \mathcal{T}, A \subseteq X\}$$

1) Soit $A \in \mathcal{T}$ une partie fixée et $\varepsilon > 0$ un réel. D'après la caractérisation de la borne inférieure il existe une partie $X_\varepsilon \in \mathcal{T}$ telle que $A \subseteq X_\varepsilon$ qui vérifie

$$\mu^*(A) \leq \mu(X_\varepsilon) < \mu^*(A) + \varepsilon$$

Noter alors que si on prend $\varepsilon = 1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient une suite de parties mesurables $X_n \in \mathcal{T}$ telle que

$$A \subseteq X_n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mu^*(A) \leq \mu(X_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$$

Posons alors $A_0 = \bigcap_{n \geq 1} X_n \in \mathcal{T}$ et observons qu'on a :

$$A \subseteq A_0 \subseteq X_n \implies \mu^*(A) \leq \mu(A_0) \leq \mu(X_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

D'où, si on fait tendre n vers l'infini on obtient $\mu^*(A) = \mu(A_0)$ avec $A_0 \in \mathcal{T}$ vérifiant $A \subseteq A_0$.

2) Montrons que $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow [0, +\infty]$ est une mesure extérieure.

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$; c'est évident.

ii) Soient $A \subseteq B$ deux parties mesurables. Noter qu'on a les inclusions d'ensembles

$$\{X \in \mathcal{T}; B \subseteq X\} \subseteq \{X \in \mathcal{T}; A \subseteq X\} \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

iii) Soit $A_n \in \mathcal{T}$ une suite de parties. Noter que d'après le résultat de la première question, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une partie mesurable $B_n \in \mathcal{T}$ telle que $A_n \subseteq B_n$ et $\mu^*(A_n) = \mu(B_n)$. Ainsi, avec ces notations, on pourra écrire :

$$\bigcup_{n \geq 0} A_n \subseteq \bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{T} \implies \mu^*\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(B_n) = \sum_{n \geq 0} \mu^*(A_n)$$

Donc, comme la fonction $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ vérifie la σ -sous additivité on conclut donc que c'est une mesure extérieure sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

Note : Partant de l'expression de la mesure extérieure μ^* on déduit que $\forall A \in \mathcal{T}, \mu^*(A) = \mu(A)$. Ceci montre que la fonction d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ prolonge la mesure positive μ .

Exercice 7.3 (*Mesures de Borel-Stieltjes*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$. Pour tout intervalle $[a, b[\subseteq \mathbb{R}$ on pose :

$$\mu_f([a, b]) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) - f(a) = f(b) - f(a)$$

1) Montrer que la fonction d'ensembles, $\mu_f : \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \rightarrow [0, +\infty]$, se prolonge en une mesure positive sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Calculer la valeur $\mu_f(\{x\}), \forall x \in \mathbb{R}$.

3) En déduire que si f est continue alors pour tous les réels $a < b$, $\mu_f([a, b]) = \mu_f([a, b]) = \mu_f(]a, b]) = \mu_f(]a, b])$.

4) Réciproquement, on se donne une mesure positive $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ qui est finie sur les intervalles bornés (ie. $\forall a < b, \mu([a, b]) < +\infty$). Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on pose alors :

$$f_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0, x]) & \text{si } x \geq 0 \\ -\mu([x, 0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- i) Montrer que $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.
- ii) Pour tout les réels $a < b$ calculer $\mu([a, b])$ au moyen de la fonction f_μ .
- iii) Vérifier que pour tous les réels $a < b$ et $0 < \varepsilon < 2(b - a)$ on a la réunion disjointe,

$$[a, b[= [a, b - \frac{\varepsilon}{2}[\cup \bigcup_{n \geq 1} [b - \frac{\varepsilon}{2^n}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}[$$

- iv) En déduire que f_μ est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.
- v) Conclure.

Solution 7.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$. Pour tout intervalle $[a, b[\subseteq \mathbb{R}$ on pose : $\mu_f([a, b]) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) - f(a) = f(b) - f(a)$.

Dans le reste de l'exercice on pose $I_g = \{[a, b[; a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On rappelle que la famille d'intervalles I_g engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir le Cours).

1) Pour répondre à la question posée nous allons appliquer les résultats de la théorie des mesures extérieures au sens de Caratheodory développées dans le Cours. Ici, on rappelle les principaux résultats de la théorie :

i) D'après la théorie de Caratheodory sur les mesures extérieures, la fonction d'ensembles $\mu_f : I_g \rightarrow [0, +\infty]$ définie ci-dessus se prolonge en une mesure extérieure $\mu_f^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ donnée par l'expression suivante :

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \quad \mu_f^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \geq 0} \mu_f([a_n, b_n]); \text{ où } A \subseteq \bigcup_{n \geq 0} [a_n, b_n] \right\}$$

ii) La famille de parties $\mathcal{T}(\mu_f^*) = \{A \subseteq \mathbb{R}; \forall X \subseteq \mathbb{R}, \mu_f^*(X) = \mu_f^*(X \cap A) + \mu_f^*(X \cap A^c)\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ dont les éléments sont dits parties μ_f^* -mesurables au sens de Caratheodory.

iii) La tribu de Carathéodory $\mathcal{T}(\mu_f^*)$ contient la famille des intervalles I_g , par suite elle contient la tribu borélienne qu'elle engendre : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_g) \subseteq \mathcal{T}(\mu_f^*)$.

iv) La fonction d'ensembles μ_f est additive sur le clan engendrée $\mathcal{C}(I_g)$ dont les éléments sont des réunions finies d'intervalles de type $[a_i, b_i[$ (voir le Cours), donc d'après le théorème de d'unicité de Hahn ; toutes les prolongements de μ_f coïncident sur la tribu engendrée $\sigma(I_g) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

v) Ainsi, suite aux faits précédents, on conclut que la mesure positive $\mu_{f|}^* : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ est l'unique prolongement de la fonction d'ensembles μ_f définie ci-dessus par :

$$\mu_f^*([a, b]) = \mu_f([a, b]) = f(b) - f(a), \quad \forall a < b$$

Dans le reste de l'exercice nous allons désigner par le même symbole la fonction d'ensembles μ_f et son prolongement obtenue à partir de la mesure extérieure qui lui est associée μ_f^* .

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Pour calculer la valeur, $\mu_f(\{x\})$, nous allons considérer la suite décroissante d'intervalles $I_n = [x, x + \frac{1}{n}[$ dont l'intersection est le singleton $\{x\}$. Noter alors que puisque les nombres réels $\mu_f(I_n) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ sont finis ; le théorème de continuité supérieure appliqué à la mesure positive μ_f nous permet d'avoir :

$$\mu_f(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_f(I_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right) = f(x + 0) - f(x) = s(f, x)$$

. où $f(x+0) := \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ x < t}} f(t)$ est la limite à droite de x .

Noter alors que la mesure $\mu_f(\{x\}) = 0$ si et seulement, si la fonction f est continue au point $x \in \mathbb{R}$.

3) Si on suppose que la fonction croissante f est en plus continue sur $\mathbb{R}$ il en résulte que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ la mesure $\mu_f(\{x\}) = 0$. Donc, pour tous les réels $a < b$ on peut écrire que

$$\begin{cases} \mu_f([a, b[) &= \mu_f(\{a\} \cup]a, b[) &= \mu_f(]a, b[) \\ \mu_f([a, b]) &= \mu_f(\{a\} \cup]a, b[\cup \{b\}) &= \mu_f(]a, b[) \\ \mu_f(]a, b]) &= \mu_f(]a, b[\cup \{b\}) &= \mu_f(]a, b[) \end{cases}$$

4) Réciproquement, on se donne une mesure positive $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ qui est finie sur les intervalles bornés (ie. $\forall a < b, \mu([a, b]) < +\infty$). Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on pose alors :

$$f_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0, x]) & \text{si } x \geq 0 \\ -\mu([x, 0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

i) Montrons que la fonction $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante. Fixons alors deux réels $a \leq b$.

j) Si $0 \leq a \leq b$ on aura la réunion disjointe $[0, b] = [0, a] \cup]a, b]$ qui entraîne :

$$\mu([0, b]) = \mu([0, a]) + \mu(]a, b]) \implies f_\mu(b) - f_\mu(a) = \mu(]a, b]) \geq 0$$

jj) De même, si $a \leq b \leq 0$ on aura la réunion disjointe $[a, 0] = [a, b] \cup]b, 0]$ qui entraîne :

$$\mu([a, 0]) = \mu([a, b]) + \mu(]b, 0]) \implies f_\mu(b) - f_\mu(a) = \mu([a, b]) \geq 0$$

jjj) Enfin, si on a $a \leq 0 \leq b$ on aura la réunion disjointe $[a, b] = [a, 0] \cup]0, b]$ qui implique

$$\mu([a, b]) = \mu([a, 0]) + \mu(]0, b]) \implies f_\mu(b) - f_\mu(a) = \mu([a, b]) \geq 0$$

Donc, la fonction $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

ii) En revenant au travail fait en i) on conclut que pour tout les réels $a < b$ le réel positif :

$$\mu([a, b]) = f_\mu(b) - f_\mu(a)$$

iii) Soient a, b et $\varepsilon > 0$ des réels fixés tels que $a < b$ et $0 < \varepsilon < 2(b-a)$.

j) Puisque $\varepsilon/2 < b-a$ cela implique que $a < b - \varepsilon/2 < b$, donc $[a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \subset [a, b]$.

jj) De même, puisque la suite $b - \frac{\varepsilon}{2^n}$ est croissante il s'ensuit que

$$a < b - \frac{\varepsilon}{2} < b - \frac{\varepsilon}{2^n} < b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < b \implies \forall n \geq 1, [b - \frac{\varepsilon}{2^n}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}] \subset [a, b]$$

jjj) En conséquence de j) et jj) on conclut qu'on a l'inclusion :

$$[a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \cup \bigcup_{n \geq 1} [b - \frac{\varepsilon}{2^n}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}] \subset [a, b]$$

iv) Pour établir l'inclusion réciproque on procède comme suit. Soit $x \in [a, b] = [a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \cup [b - \frac{\varepsilon}{2}, b]$, donc si $x \in [a, b - \frac{\varepsilon}{2}]$ il n'y a rien à démontrer. Et, si $x \in [b - \frac{\varepsilon}{2}, b]$ il s'ensuit que

$$b - \frac{\varepsilon}{2} \leq x < b \implies 0 < b - x \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, comme la suite décroissante $\frac{\varepsilon}{2^n}$ tend vers zéro il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}} < b - x \leq \frac{\varepsilon}{2^{n_0}}$. Autrement dit, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que le réel $x \in [b - \frac{\varepsilon}{2^{n_0}}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n_0+1}}]$. D'où l'égalité

$$[a, b] = [a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \cup \bigcup_{n \geq 1} [b - \frac{\varepsilon}{2^n}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}]$$

iv) Puisque μ est une mesure positive sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc si on l'applique sur la réunion disjointe établie ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned}\mu([a, b[) &= \mu([a, b - \frac{\varepsilon}{2}[) + \sum_{n \geq 1} \mu([b - \frac{\varepsilon}{2^n}, b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}[) \\ f_\mu(b) - f_\mu(a) &= f_\mu(b - \frac{\varepsilon}{2}) - f_\mu(a) + \sum_{n \geq 1} \left(f_\mu(b - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}) - f_\mu(b - \frac{\varepsilon}{2^n}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_\mu(b - \frac{\varepsilon}{2^n}) - f_\mu(a)\end{aligned}$$

Ainsi, comme pour tout réel $b \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\mu(b - \frac{\varepsilon}{2^n}) = f_\mu(b)$ on en déduit que la fonction croissante $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ associée à la mesure positive μ est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

v) Conclusion : il existe une correspondance biunivoque entre les fonctions croissantes continues à gauche (resp. à droite) sur $\mathbb{R}$ et les mesures positives définies sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et qui sont finies sur les segments $[a, b]$.

Exercice 8.3 Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ on lui associe la mesure de Dirac $\delta_x : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que l'expression $\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} \delta_x$ définit une mesure positive sur $\mathbb{R}^m$.
- 2) Calculer l'intégrale supérieure au sens de Lebesgue d'une fonction étagée, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.
- 3) En déduire la caractérisation des fonctions μ -intégrables au sens de Lebesgue.

Solution 8.3 Étant donné un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ on lui associe la mesure de Dirac $\delta_x : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Rappelons que pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ on a $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ et $\delta_x(A) = 0$ si $x \notin A$. Ceci implique donc que

$$\mu(A) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} \delta_x(A) = \text{Card}(A \cap \mathbb{Z}^m)$$

Ainsi, par cette expression on déduit que la fonction μ n'est autre que la mesure trace sur $\mathbb{Z}^m$ de la mesure de dénombrement Card. Donc, μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^m$.

2) Soit $f = \sum_{k=1}^{k=n} a_k \chi_{A_k}$ une fonction étagée où les parties A_k sont supposées disjointes. Par définition de l'intégrale supérieure au sens de Lebesgue on aura donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}^* f d\mu &= \sum_{k=1}^{k=n} a_k \mu(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} a_k \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^m} \delta_x(A_k) \right) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_k \delta_x(A_k) \right) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_k \chi_{A_k}(x) \right) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} f(x)\end{aligned}$$

3) Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable positive. Donc, il existe une suite de fonctions croissantes étagées et mesurables $f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ qui converge simplement vers la fonction donnée f . Ainsi, comme dans 2) on a démontré que pour les fonctions étagées mesurables on a :

$$\int_{\mathbb{R}^m}^* f_n d\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} f_n(x) \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m}^* f_n d\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} f(x)$$

D'autre part, d'après le théorème de la convergence monotone de Beppo Levi on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m}^* f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^m}^* f d\mu = \sum_{x \in \mathbb{Z}^m} f(x)$$

Par conséquent, une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (de signe quelconque) est μ -intégrable au sens de Lebesgue si et seulement, si la série numérique $\sum_{x \in \mathbb{Z}^m} f(x)$ converge absolument dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.3 Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante ; où $\mathbb{R}^+$ est muni par la mesure de Lebesgue λ_1 .

1) Montrer que pour tous les réels positifs $a < b$ on a : $f(a)\chi_{[a,b]}(x) \leq f(x) \leq f(b)\chi_{[a,b]}(x), \forall x \in [a, b]$.

2) En déduire que, $\forall a < b, \quad (b-a)f(a) \leq \int_{[a,b]} f d\lambda_1 \leq f(b)(b-a)$.

3) Une fonction croissante, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, est-elle λ_1 -intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$?

Solution 9.3 Sur l'espace mesuré de Lebesgue $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda_1)$ on considère une fonction croissante, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.

1) Puisque f est croissante, donc pour un couple de réels $a < b$ on aura $f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in [a, b]$. D'autre part, comme sur le segment $[a, b]$ on a $f(a)\chi_{[a,b]}(x) = f(a)$ et $f(b)\chi_{[a,b]}(x) = f(b)$ il s'ensuit que $f(a)\chi_{[a,b]}(x) \leq f(x) \leq f(b)\chi_{[a,b]}(x), \forall x \in [a, b]$.

2) Puisque l'intégrale de Lebesgue est montone, donc si on l'applique sur la double inégalité trouvée en 1) on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(a)\chi_{[a,b]}(x) d\lambda_1 \leq \int_{\mathbb{R}^+} f(x) d\lambda_1 \leq \int_{\mathbb{R}^+} f(b)\chi_{[a,b]}(x) d\lambda_1$$

Ainsi, comme les intégrales de Lebesgue :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(a)\chi_{[a,b]}(x) d\lambda_1 = f(a)\lambda_1([a, b]) = f(a)(b-a)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(b)\chi_{[a,b]}(x) d\lambda_1 = f(b)\lambda_1([a, b]) = f(b)(b-a)$$

cela entraîne que : $(b-a)f(a) \leq \int_{[a,b]} f d\lambda_1 \leq (b-a)f(b)$.

3) C'est clair que si la fonction f est nulle, elle est donc λ_1 -intégrable. Supposons alors qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(a) \neq 0$ et pour tout entier $n \geq a$ posons $f_n = f\chi_{[a,n]}$. Ceci nous donne une suite croissante de fonctions λ_1 -intégrables qui converge simplement vers la fonction f sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Ainsi, comme d'après 2) on a les doubles inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n-a)f(a) \leq \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda_1 \leq (n-a)f(n)$$

le théorème de la convergence monotone nous permet de déduire par passage à la limite que

$$\int_{\mathbb{R}^+} f \chi_{[a, +\infty[} d\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda_1 = +\infty \implies \int_{\mathbb{R}^+} f d\lambda_1 = +\infty$$

Par conséquent, une fonction croissante non nulle $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ n'est pas λ_1 -intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction μ -intégrable.

1) Montrer que la fonction d'ensembles définie ci-dessous est une mesure positive sur $\mathbf{E}$:

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \hat{\mu}_f(A) := \int_A f d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \chi_A d\mu$$

2) On se propose de démontrer la proposition $\mathcal{P} : \forall A \in \mathcal{T}, \mu(A) = 0 \implies \hat{\mu}_f(A) = 0$.

i) Montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie pour toute fonction f qui est étagée positive et μ -intégrable.

ii) En utilisant le théorème de convergence monotone (Beppo Levi); montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie pour toutes les fonctions μ -intégrables.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > n\}$ et $B_n = \mathbf{E}^{A_n} = A_n^c$ (complémentaire).

i) Montrer que la suite de fonctions $f_n = f \chi_{B_n}$ est croissante, et calculer sa limite simple sur $\mathbf{E}$.

ii) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} f d\mu$.

iii) Établir l'inégalité : $n\mu(A_n) \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu - \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu$.

iv) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mu(A_n) = 0$.

4) Montrer que le résultat de iii) ne garantit pas la μ -intégrabilité de f .

Solution 10.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction μ -intégrable.

1) Montrons que la fonction d'ensembles définie ci-dessous est une mesure positive sur $\mathbf{E}$:

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \hat{\mu}_f(A) := \int_A f d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \chi_A d\mu$$

i) Noter que $\hat{\mu}_f(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$.

ii) Soit A et $B \in \mathcal{T}$ deux parties mesurables disjointes. Rappelons que dans ce cas les fonctions caractéristiques de A et B vérifient la relation :

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B \implies \hat{\mu}_f(A \cup B) = \int_{\mathbf{E}} f \chi_{A \cup B} d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \chi_A d\mu + \int_{\mathbf{E}} f \chi_B d\mu = \hat{\mu}_f(A) + \hat{\mu}_f(B)$$

Donc, la fonction d'ensembles $\hat{\mu}_f$ est additive² sur la tribu $\mathcal{T}$.

iii) Soit $A_n \in \mathcal{T}$ une suite croissante de parties mesurables. Noter alors que la suite de fonctions mesurables positives, $f_n = f \chi_{A_n}$ est croissante et tend simplement sur $\mathbf{E}$ vers la fonction $f \chi_{\bigcup A_n}$. Donc, d'après le théorème de convergence monotone de Beppo Levi on aura :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \chi_{\bigcup A_n} d\mu \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\mu}_f(A_n) = \hat{\mu}_f\left(\bigcup A_n\right)$$

2. Ici, nous avons démontré que si A et $B \in \mathcal{T}$ sont deux parties mesurables et disjointes, alors

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Ceci démontre que la fonction d'ensembles additive $\hat{\mu}_f$ est continue inférieurement, donc elle est σ -additive (voir le Cours). Autrement dit, la fonction d'ensembles $\hat{\mu}_f$ est une mesure positive sur $\mathbf{E}$.

2) On se propose de démontrer la proposition $\mathcal{P} : \forall A \in \mathcal{T}, \mu(A) = 0 \implies \hat{\mu}_f(A) = 0$.

i) Soit $f = \sum_{i=1}^{i=m} a_i \chi_{A_i}$ une fonction étagée μ -intégrable. Donc, pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{T}$,

$$\hat{\mu}_f(A) = \int_A f d\mu = \int_{\mathbf{E}} \chi_A \left(\sum_{i=1}^{i=m} a_i \chi_{A_i} \right) d\mu = \sum_{i=1}^{i=m} a_i \mu(A \cap A_i)$$

Ainsi, grâce à cette expression, on voit que si $\mu(A) = 0$ il s'ensuit que tous les réels $\mu(A \cap A_i) = 0$, et par suite $\hat{\mu}_f(A) = 0$. Par conséquent, la proposition $\mathcal{P}$ est vraie pour toutes les fonctions étagées.

ii) Supposons que $f : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ est μ -intégrable. Il existe donc suite croissante de fonctions étagées mesurables f_n telle que

$$0 \leq f_n \leq f \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{E}$$

Maintenant, si on prend une partie de mesure nulle $A \in \mathcal{T}$ (ie. $\mu(A) = 0$); le théorème de la convergence monotone nous donne alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\mu}_{f_n}(A) = \hat{\mu}_f(A)$$

Ainsi, comme les f_n sont des fonctions étagées on aura d'après i) : $\hat{\mu}_{f_n}(A) = 0$. D'où, $\hat{\mu}_f(A) = 0$.

Par conséquent, pour toute fonction μ -intégrable $f : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ et pour toute partie mesurable, $A \in \mathcal{T}$, de mesure nulle ie. :

$$\mu(A) = 0 \implies \hat{\mu}_f(A) = 0$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > n\}$ et $B_n = \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{A_n} = A_n^c$ (complémentaire).

i) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n = f \chi_{B_n}$ avec $B_n = \{x \in \mathbf{E}; 0 \leq f(x) \leq n\} = f^{-1}([0, n]) \in \mathcal{T}$. Noter alors que puisque $B_n \subseteq B_{n+1}$ il en résulte que $\chi_{B_n} \leq \chi_{B_{n+1}}$, et que par suite $f \chi_{B_n} \leq f \chi_{B_{n+1}}$. Donc, la suite de fonctions mesurables f_n est croissante. Calculons alors sa limite simple.

D'abord, observons que la réunion $\bigcup_{n \leq 0} B_n = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbf{E}; 0 \leq f(x) \leq n\} = \mathbf{E}$. Ainsi, on voit que pour tout $x \in \mathbf{E}$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $x \in B_{n_0}$ et que par conséquent

$$f(x) = f(x) \chi_{B_{n_0}}(x) \implies \forall n \geq n_0, \quad f(x) = f(x) \chi_{B_n}(x) \quad \text{car} \quad B_{n_0} \subseteq B_n$$

Donc, la suite de fonctions $f_n = f \chi_{B_n}$ converge simplement sur $\mathbf{E}$ vers la fonction mesurable f .

ii) Puisque dans i) on a démontré que la suite de fonctions mesurables f_n est croissante et converge simplement vers la fonction f , le théorème de convergence monotone implique qu'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbf{E}} f d\mu$$

iii) Rappelons que pour tout entier $n \geq 0$ on a $A_n = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > n\}$ et que $B_n = A_n^c$. Donc, avec ces notations on aura

$$\chi_{A_n} = 1 - \chi_{B_n} \implies f \chi_{A_n} = f - f \chi_{B_n} = f - f_n$$

Appliquons alors l'intégrale de Lebesgue par rapport à la mesure μ sur la dernière inégalité pour obtenir :

$$\int_{\mathbf{E}} f \chi_{A_n} d\mu = \int_{\mathbf{E}} f d\mu - \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu \implies \int_{A_n} f d\mu = \int_{\mathbf{E}} f d\mu - \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu$$

D'autre part, puisque pour tout $x \in A_n$ on a $n\chi_{A_n}(x) \leq f(x)\chi_{A_n}(x)$ il s'ensuit que

$$\int_{\mathbf{E}} n\chi_{A_n} d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} \chi_{A_n} f d\mu \implies n\mu(A_n) \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu - \int_{\mathbf{E}} f_n d\mu$$

iv) En effet, puisque la suite $\int_{\mathbf{E}} f_n d\mu$ converge vers $\int_{\mathbf{E}} f d\mu$ la dernière inégalité trouvée en iii) implique qu'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mu(A_n) = 0$.

4) Observer que si on considère la fonction mesurable $\chi_{\mathbb{R}^+}$ on aura :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \{x \in \mathbb{R}; \chi_{\mathbb{R}^+}(x) > n\} = \emptyset \implies n\lambda_1(A_n) \rightarrow 0$$

En revanche, la fonction $\chi_{\mathbb{R}^+}$ n'est pas λ_1 -intégrable car $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}^+} d\lambda_1 = +\infty$.

Complément : la dérivée de Radon-Nikodym. Étant donné un espace mesuré $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$; nous avons associé à une fonction μ -intégrable positive $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une nouvelle mesure positive définie par l'expression intégrale :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \hat{\mu}_f(A) := \int_A f d\mu$$

Ensuite nous avons démontré que le couple de mesures positives $(\mu, \hat{\mu}_f)$ vérifie la propriété remarquable suivante :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A) = 0 \implies \hat{\mu}_f(A) = 0$$

En théorie de la mesure on dira que la mesure $\hat{\mu}_f$ est *absolument continue* par rapport à la mesure positive μ et on écrit : $\hat{\mu}_f \ll \mu$.

Cherchons alors la relation qui lie les intégrales au sens de Lebesgue définies par la mesure positive μ et la mesure qu'on lui a associée $\hat{\mu}_f$.

i) Soit $g = \sum_{k=1}^{k=m} a_k \chi_{A_k}$ une fonction étagée. Donc, son intégrale par rapport à la mesure positive $\hat{\mu}_f$ est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}} g d\hat{\mu}_f &= \sum_{k=1}^{k=m} a_k \hat{\mu}_f(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} a_k \int_{\mathbf{E}} \chi_{A_k} f d\mu \\ &= \int_{\mathbf{E}} g f d\mu \end{aligned}$$

ii) Maintenant, considérons une fonction mesurable positive $g : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, donc; on pourra trouver une suite croissante de fonctions étagées g_n qui converge simplement sur $\mathbf{E}$ vers la fonction g . Ainsi, par le théorème de convergence monotone on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}} g d\hat{\mu}_f &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} g_n d\hat{\mu}_f \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{E}} g_n f d\mu \\ &= \int_{\mathbf{E}} g f d\mu \end{aligned}$$

Ainsi, suite à ce qui précède on conclut que pour toute fonction $\hat{\mu}_f$ -intégrable $g : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on a l'expression (écrire $g = g^+ - g^-$) :

$$\int_{\mathbf{E}} g d\hat{\mu}_f = \int_{\mathbf{E}} g f d\mu$$

Noter alors que cette expression implique que les mesures positives μ et $\widehat{\mu}_f$ sont reliées par l'expression différentielle suivante :

$$d\widehat{\mu}_f = f d\mu \iff f = \frac{d\widehat{\mu}_f}{d\mu}$$

La propriété de différentiation d'une mesure positive par rapport à une autre mesure positive est en fait un théorème générale démontré par Radon-Nikodym-Lebesgue et qui s'énonce comme suit :

Théorème 19 (Radon-Nikodym-Lebesgue). *Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec μ est σ -finie sur $\mathbf{E}$. Alors, pour toute mesure positive $\widehat{\mu} : \mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ qui est absolument continue par rapport à la mesure μ (ie. $\widehat{\mu} \ll \mu$) il existe une fonction et une seule $f : \mathbf{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ μ -p.p qui est μ -intégrable telle que*

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \widehat{\mu}(A) = \int_{\mathbf{E}} f d\mu$$

L'unique fonction μ -intégrable f s'appelle dérivée de Radon-Nikodym ; elle se note $f := \frac{d\widehat{\mu}}{d\mu}$.

Exercice 11.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction μ -intégrable.

- 1) Pour tout réel $\lambda > 0$ on pose : $A_\lambda = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \lambda\} \in \mathcal{T}$.
- i) Etablir l'inégalité de Markov : $\mu(A_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbf{E}} f(x) d\mu$.
- ii) En déduire que la partie A_λ est de mesure finie.
- 2) Montrer que la partie $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \frac{1}{n}\}$.
- 3) En déduire que la partie mesurable $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\}$ est σ -finie.
- 4) Vérifier que l'intersection dénombrable $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{x \in \mathbf{E} : f(x) = +\infty\}$.
- 5) En déduire que la partie mesurable, $\{x \in \mathbf{E} : f(x) = +\infty\}$, est de mesure nulle.

Solution 11.3 Soient $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction μ -intégrable.

- 1) Pour tout réel $\lambda > 0$ on pose : $A_\lambda = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \lambda\} \in \mathcal{T}$.
- i) Observer que sur l'ensemble $\mathbf{E}$ on a l'inégalité $f \chi_{A_\lambda} \leq f$ qui entraîne par intégration :

$$\int_{\mathbf{E}} \chi_{A_\lambda} f d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu \implies \int_{A_\lambda} f d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu \implies \int_{A_\lambda} \lambda d\mu \leq \int_{\mathbf{E}} f d\mu$$

D'où, l'inégalité de Markov : $\mu(A_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbf{E}} f(x) d\mu$.

ii) Puisque l'intégrale de Lebesgue $\int_{\mathbf{E}} f(x) d\mu$ est supposée finie, l'inégalité de Markov implique que la partie A_λ est de mesure finie.

- 2) Montrons que la partie $\{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \frac{1}{n}\}$.

Il est clair que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \frac{1}{n}\} \subseteq \{x \in \mathbf{E}; f(x) \neq 0\}$.

Inversement, si pour $x \in \mathbf{E}$ on a $f(x) > 0$ il existe alors un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\frac{1}{n_0} < f(x)$, car la suite $\frac{1}{n_0}$ tend vers zéro. Donc, on a l'inclusion réciproque $\{x \in \mathbf{E}; f(x) > 0\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in \mathbf{E}; f(x) > \frac{1}{n}\}$.

3) Noter que dans la question 1) on a vu que les parties mesurables $A_n = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > n\}$ sont de mesure finie, tandis que dans la question 2) on a vu que l'ensemble $\mathbf{E}$ est une réunion dénombrable de parties A_n ; donc $\mathbf{E}$ est un ensemble σ -fini.

4) Montrons que l'intersection dénombrable $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{x \in \mathbf{E} : f(x) = +\infty\}$.

En effet, la partie des valeurs infinies $\{x \in \mathbf{E} : f(x) = +\infty\} \subseteq A_n = \{x \in \mathbf{E}; f(x) > n\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $\{x \in \mathbf{E} : f(x) = +\infty\} \subseteq \bigcap_{n \geq 1} A_n$.

Inversement, si pour un point $x \in \bigcap_{n \geq 1} A_n$ on aura $n < f(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $f(x) = +\infty$. Autrement dit, on a l'inclusion réciproque $\bigcap_{n \geq 1} A_n \subseteq \{x \in \mathbf{E}; f(x) = +\infty\}$.

5) Noter que d'après l'inégalité de Markov, $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbf{E}} f d\mu$, il en résulte donc que suite numérique $\mu(A_n)$ tend vers zéro. De plus, puisque la suite de parties mesurables de mesure finie A_n est décroissante ie. : $A_{n+1} \subseteq A_n$, alors par continuité supérieure des mesures positives on aura :

$$\mu(\{x \in \mathbf{E}; f(x) = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$$

Donc, la partie des valeurs infinies $\{x \in \mathbf{E}; f(x) = +\infty\}$ est de mesure nulle. Autrement dit, une fonction μ -intégrable au sens de Lebesgue est μ -presque partout finie.

Solution du contrôle : 2019-2020

Notes : 1) Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ seront munis par leurs topologies usuelles ; ils seront également munis par leurs tribus boréliennes notées respectivement $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

2) On désigne le complémentaire d'une partie A d'un ensemble $\mathbf{E}$ par l'un des trois symboles :

$$A^c = \mathbf{E} \setminus A = \mathbb{C}_{\mathbf{E}}^A$$

Exercice 1.(5 points) Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide. Étant donnée une partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on pose :

$$\mathcal{T}(A) := \{B \subseteq \mathbf{E}; A \subseteq B \quad \text{ou} \quad A \cap B = \emptyset\}$$

1) Montrer que $\mathcal{T}(A)$ est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

2) Déterminer la tribu $\mathcal{T}(A)$ dans les cas suivants :

a) $\mathcal{T}(\emptyset)$.

b) $\mathcal{T}(\{x\})$ où $x \in \mathbf{E}$.

c) $\mathcal{T}(\{x\}^c)$ où $x \in \mathbf{E}$.

d) $\mathcal{T}(\mathbf{E})$.

3) Soit $A \subset \mathbf{E}$ une partie propre ie. $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbf{E}$. Vérifier que l'intersection

$$\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c) = \{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\}$$

4) Soient A_1 et A_2 deux parties de $\mathbf{E}$. Montrer que les affirmations suivantes sont vraies :

i) $\mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$ est une tribu sur $\mathbf{E}$.

ii) $\mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$.

iii) Si $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ alors $\mathcal{T}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$.

iv) En général, l'inclusion établie dans ii) est une inclusion stricte.

Solution 1. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide. Étant donnée une partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on pose :

$$\mathcal{T}(A) := \{B \subseteq \mathbf{E}; A \subseteq B \quad \text{ou} \quad A \cap B = \emptyset\}$$

1) Montrons que $\mathcal{T}(A)$ est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

i) L'ensemble vide, $\emptyset \in \mathcal{T}(A)$, car $A \cap \emptyset = \emptyset$.

ii) L'ensemble $\mathbf{E} \in \mathcal{T}(A)$, car $A \subseteq \mathbf{E}$.

iii) Prenons $B \in \mathcal{T}(A)$, donc on aura,

$$\left(A \subseteq B \quad \text{ou} \quad A \cap B = \emptyset \right) \iff \left(A \cap B^c = \emptyset \quad \text{ou} \quad A \subseteq B^c \right)$$

Donc, la famille d'ensembles $\mathcal{T}(A)$ est stable par passage au complémentaire ie. :

$$\forall B \in \mathcal{T}(A) \implies B^c \in \mathcal{T}(A)$$

iv) Maintenant, prenons une suite de parties $B_n \in \mathcal{T}(A)$. Observer alors que s'il existe au moins un entier n_0 tel que $A \subseteq B_{n_0}$; il s'ensuit que $A \subseteq B_{n_0} \subseteq \bigcup_{n \geq 0} B_n$. Donc, $\bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{T}(A)$.

Et, si pour tous les entiers $n \geq 0$ on a $A \cap B_n = \emptyset$ on voit alors que la réunion

$$\bigcup_{n \geq 0} A \cap B_n = \emptyset \implies A \cap \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n \right) = \emptyset \implies \bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{T}(A)$$

Ainsi, suite aux propriétés vérifiées ci-dessus on conclut que $\mathcal{T}(A)$ est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$.

2) Ici, pour certaines parties particulières de $A \in \mathbf{E}$ on se propose de déterminer la tribu $\mathcal{T}(A)$ qui lui est associée.

a) Supposons que $A = \emptyset$. Observer que toutes les parties de $\mathbf{E}$ contiennent l'ensemble vide, donc par définition,

$$\mathcal{T}(\emptyset) = \{B \subseteq \mathbf{E} ; \emptyset \subseteq B \text{ ou } \emptyset \cap B = \emptyset\} = \mathcal{P}(\mathbf{E})$$

b) Supposons que $A = \{x\}$ est un singleton avec $x \in \mathbf{E}$. Dans ce cas, puisque une partie quelconque $B \subseteq \mathbf{E}$ soit qu'elle va contenir l'élément x , donc $\{x\} \subseteq B$; ou soit elle ne le contient pas $\{x\} \cap B = \emptyset$. Par conséquent, la tribu $\mathcal{T}(\{x\}) = \mathcal{P}(\mathbf{E})$.

c) Pour $x \in \mathbf{E}$ fixé prenons une partie $B \in \mathcal{T}(\{x\}^c)$. Par définition, on obtient

$$B \in \mathcal{T}(\{x\}^c) \iff \left(\{x\}^c \subseteq B \text{ ou } \{x\}^c \cap B = \emptyset \right) \iff \left(B^c \subseteq \{x\} \text{ ou } B \subseteq \{x\} \right)$$

Donc, la tribu $\mathcal{T}(\{x\}^c) = \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, \mathbf{E}\}$.

d) Enfin, pour $A = \mathbf{E}$ on obtient,

$$\mathcal{T}(\mathbf{E}) = \{B \subseteq \mathbf{E}; \mathbf{E} \subseteq B \text{ ou } \mathbf{E} \cap B = \emptyset\} = \{\emptyset, \mathbf{E}\}$$

3) Soit $A \subset \mathbf{E}$ une partie propre ie. $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbf{E}$. Vérifions que l'intersection

$$\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c) = \{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\}$$

D'abord, noter que puisque l'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbf{E}$ appartiennent à toutes les tribus sur $\mathbf{E}$, on aura donc $\{\emptyset, \mathbf{E}\} \subseteq \mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c)$.

De même, puisque $A \subseteq A$ et $A \cap A^c = \emptyset$ on en déduit que les parties A et A^c appartiennent à l'intersection $\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c)$. Donc,

$$\{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\} \subseteq \mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c)$$

Inversement, supposons qu'une partie propre $B \in \mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c)$. Sous cette hypothèse on aura,

$$\left(A \subseteq B \text{ ou } A \cap B = \emptyset \right) \text{ et } \left(A^c \subseteq B \text{ ou } A^c \cap B = \emptyset \right)$$

Ainsi, si on suppose que $A \subseteq B$ il s'ensuit que le complémentaire $A^c \not\subseteq B$; car $B \neq \mathbf{E}$ (propre). Donc, $A^c \cap B = \emptyset$; et par suite $B = A$.

En raisonnant de la même façon, on montre que la condition $A^c \subseteq B$ entraîne $B = A^c$, et que la condition $A^c \cap B = \emptyset$ entraîne $B = A$.

De même, si on suppose que la partie propre $B \neq \emptyset$ vérifie $A \cap B = \emptyset$ on aura nécessairement $A^c \cap B \neq \emptyset$; donc $A^c \subseteq B$. Par conséquent, $B = A^c$.

Finalement, par ces divers cas discutés, on conclut que l'intersection $\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c) = \{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\}$.

4) Soient A_1 et A_2 deux parties de $\mathbf{E}$. Montrons que les affirmations i), ii), iii) et iv) sont vraies :

i) $\mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$ est une tribu sur $\mathbf{E}$. Evident : en général l'intersection d'une famille de tribus est une tribu (voir le Cours).

ii) Montrons que $\mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$.

Noter que si une partie propre $B \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)$ il s'ensuit que

$$(A_1 \cup A_2 \subseteq B \text{ ou } (A_1 \cup A_2) \cap B = \emptyset) \implies ((A_1 \subseteq B \text{ et } A_2 \subseteq B) \text{ ou } (A_1 \cap B = \emptyset \text{ et } A_2 \cap B = \emptyset))$$

Une analyse rapide du second membre de la dernière implication montre que $B \in \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$. C'est-à-dire, $\mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$.

iii) Ci-dessus, on a démontré que pour toute paire de parties on a : $\mathcal{T}(A_1 \cup A_2) \subseteq \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$. Maintenant, supposons que les parties A_1 et A_2 sont non disjointes, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, et montrons qu'on a l'inclusion inverse : $\mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2) \subseteq \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)$.

Prenons alors une partie propre $B \in \mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2)$. Donc,

$$(A_1 \subseteq B \text{ ou } A_1 \cap B = \emptyset) \text{ et } (A_2 \subseteq B \text{ ou } A_2 \cap B = \emptyset)$$

a) Noter que si on suppose que $A_1 \subseteq B$ on ne peut pas avoir $A_2 \cap B = \emptyset$; car cela implique que $A_1 \subseteq B \subseteq A_2^c$. Mais, cela contredit le fait que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Donc, nécessairement la partie $A_2 \subseteq B$, et par suite la réunion $A_1 \cup A_2 \subseteq B$. D'où, $B \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)$.

b) Si on suppose que $A_1 \cap B = \emptyset$, on voit qu'on ne peut pas avoir $A_2 \subseteq B$; car cela entraîne que $A_1 \cap A_2 \subseteq B \cap A_1 = \emptyset$. Donc, on aura nécessairement $A_2 \cap B = \emptyset$ et par suite $(A_1 \cup A_2) \cap B = \emptyset$. D'où, $B \in \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)$.

c) Pour le choix de la partie A_2 on procède comme dans a) et b) pour aboutir à la même conclusion.

Conclusion : si l'intersection $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ alors $\mathcal{T}(A_1) \cap \mathcal{T}(A_2) = \mathcal{T}(A_1 \cup A_2)$.

iv) Soit $A \subset \mathbf{E}$ est une partie propre. Noter que si on pose $A_1 = A$ et $A_2 = A^c$ on aura d'après 2) d) :

$$\mathcal{T}(A \cup A^c) = \mathcal{T}(\mathbf{E}) = \{\emptyset, \mathbf{E}\}$$

De même, d'après 3) on a vu que l'intersection $\mathcal{T}(A) \cap \mathcal{T}(A^c) = \{\emptyset, A, A^c, \mathbf{E}\}$. Donc, l'inclusion obtenue dans 4) ii) est en générale stricte.

Exercice 2.(5 points) Étant donnée une fonction, $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathcal{T}_f := \{f^{-1}(A) ; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

1) Montrer que $\mathcal{T}_f$ est une tribu de parties sur l'ensemble $\mathbf{E}$ que l'on appelle : *tribu image inverse de la tribu $\mathcal{T}$ par la fonction f* .

2) Montrer que la fonction, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}_f) \longrightarrow \mathbb{R}$, est mesurable.

3) Soit $g : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction et $\mathcal{T}_g$ la tribu image inverse qu'on lui a associée ci-dessus. On désigne par $\sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)$ la tribu engendrée par la réunion $\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g$.

j) Montrer que les fonctions $f : (\mathbf{E}, \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : (\mathbf{E}, \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

jj) Montrer que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ on a la réunion dénombrable :

$$\{x \in \mathbf{E} ; f(x) + g(x) > c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\} \right)$$

jjj) La fonction $f + g : (\mathbf{E}, \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)) \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle mesurable ? Justifier votre réponse.

Solution 2. Étant donnée une fonction, $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathcal{T}_f := \{f^{-1}(A) ; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

1) L'ensemble vide $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{T}_f$, de même l'ensemble $\mathbf{E} = f^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{T}_f$.

Noter aussi que pour toute partie $B \in \mathcal{T}_f$ il existe une partie borélienne $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $B = f^{-1}(A)$. Ainsi, comme le complémentaire

$$B^c = \left(f^{-1}(A)\right)^c = f^{-1}(A^c) \quad \text{sachant que} \quad A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies B^c \in \mathcal{T}_f$$

Enfin, si on considère une suite de parties $B_n \in \mathcal{T}_f$ il existe alors une suite de parties boréliennes $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que

$$B_n = f^{-1}(A_n) \implies \bigcup_{n \geq 0} B_n = \bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \in \mathcal{T}_f$$

car la réunion des parties boréliennes $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Conclusion : la famille de parties, $\mathcal{T}_f$, est une tribu sur l'ensemble $\mathbf{E}$; elle s'appelle *tribu image inverse de la tribu $\mathcal{T}$ par la fonction f* (Vu dans le Cours).

2) On rappelle que si $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ est un espace mesurable, une fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable (ou borélienne) si pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'image inverse $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ est mesurable.

Partant de cette définition on voit que la fonction, $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}_f) \longrightarrow \mathbb{R}$, est naturellement mesurable ; car pour toute partie borélienne $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'image inverse $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f$.

3) Soit $g : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction et $\mathcal{T}_g$ la tribu image inverse qu'on lui a associée ci-dessus. On désigne par $\sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)$ la tribu engendrée par la réunion $\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g$.

D'abord, noter que les inclusions canoniques $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g$ et $\mathcal{T}_g \subseteq \mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g$ impliquent que les tribus

$$\mathcal{T}_f \subseteq \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_g \subseteq \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)$$

j) Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ une partie borélienne. Noter que puisque les images inverse $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f$ et $g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_g$; les inclusions ci-dessus impliquent qu'on a :

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_f \subseteq \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g) \quad \text{et} \quad g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_g \subseteq \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)$$

Donc, les deux fonctions $f : (\mathbf{E}, \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : (\mathbf{E}, \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

jj) Montrons que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ on a la réunion dénombrable :

$$\{x \in \mathbf{E} ; f(x) + g(x) > c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\} \right)$$

a) Pour un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ prenons un élément, $y \in \{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\}$. Cela on le traduit par :

$$y \in \{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \quad \text{et} \quad y \in \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\} \iff f(y) > r \quad \text{et} \quad g(y) > c - r$$

Noter alors que le second membre de la dernière équivalence permet de déduire (par sommation) que $f(y) + g(y) > c$. Donc, l'élément $y \in \{x \in \mathbf{E} ; f(x) + g(x) > c\}$. C'est-à-dire, nous avons démontré l'inclusion :

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\} \right) \subseteq \{x \in \mathbf{E} ; f(x) + g(x) > c\}$$

b) Inversement, prenons un élément $y \in \{x \in \mathbf{E} ; f(x) + g(x) > c\}$. C'est-à-dire, on aura :

$$f(y) + g(y) > c \iff f(y) > c - g(y)$$

Ainsi, par densité de l'ensemble des nombres rationnels dans l'ensemble des nombres réels on pourra trouver un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$f(y) > r > c - g(y) \iff f(y) > r \text{ et } g(y) > c - r \implies y \in \{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\}$$

Donc, l'élément $y \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\} \right)$

Conclusion : en combinant les deux preuves développées en a) et b) on conclut que l'égalité d'ensembles demandée est vraie,

$$\{x \in \mathbf{E} ; f(x) + g(x) > c\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in \mathbf{E} ; f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{E} ; g(x) > c - r\} \right)$$

jjj) La fonction $f + g : (\mathbf{E}, \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)) \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable. En effet, dans la question jjj) on a démontré que pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ l'image réciproque

$$(f + g)^{-1}(]c, +\infty[) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f^{-1}(]r, +\infty[) \cap g^{-1}(]c - r, +\infty[)$$

Cette expression montre que pour chaque rationnel $r \in \mathbb{Q}$ les images inverses :

$$f^{-1}(]r, +\infty[) \in \mathcal{T}_f \text{ et } g^{-1}(]c - r, +\infty[) \in \mathcal{T}_g \implies f^{-1}(]r, +\infty[) \cap g^{-1}(]c - r, +\infty[) \in \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g)$$

Ainsi, puisque les intervalles de type $]r, +\infty[$, avec $r \in \mathbb{Q}$, engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on conclut que la fonction somme $f + g$ est mesurable sur $(\mathbf{E}, \sigma(\mathcal{T}_f \cup \mathcal{T}_g))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 3.(5 points) Étant donné un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et une suite de parties $A_n \in \mathcal{T}$; on vous rappelle que les limites inférieure et supérieure de la suite de parties A_n sont définies par les expressions suivantes :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p$$

1) Montrer que les parties $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ appartiennent à la tribu $\mathcal{T}$.

2) Dans la suite de l'exercice on désigne par $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la fonction définie par l'expression,

$$\forall x \in \mathbf{E} ; \quad f(x) := \sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}(x) \in \overline{\mathbb{R}^+} \quad \text{où} \quad \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_n \\ 0 & \text{si } x \notin A_n \end{cases}$$

i) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction caractéristique $\chi_{A_n} : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ est mesurable.

ii) Vérifier que la suite de fonctions, $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} \chi_{A_p}$, est croissante ie. $S_n \leq S_{n+1}, \forall n \geq 0$.

iii) La fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ est-elle mesurable? Justifier votre réponse.

iv) Montrer que le domaine de convergence de la fonction f , noté $D(f) := \{x \in \mathbf{E} ; f(x) \in \mathbb{R}^+\}$, est égal au complémentaire dans $\mathbf{E}$ de la limite supérieure de la suite de parties A_n .

Indication : On pourra utiliser le fait que $x \in D(f)$ entraîne que la suite des restes $R_n(x) = \sum_{p \geq n+1} \chi_{A_p}(x)$ tend vers zéro.

Solution 3. Étant donné un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$ et une suite de parties $A_n \in \mathcal{T}$; on vous rappelle que les limites inférieure et supérieure de la suite de parties A_n sont définies par les expressions suivantes :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p$$

1) Rappelons que la tribu de parties de $\mathbf{E}$ est stable par les réunions et les intersections dénombrables, donc pour toute suite de parties $A_n \in \mathcal{T}$ on aura,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{T} \\ \bigcup_{k \geq n} A_k \in \mathcal{T} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k \in \mathcal{T} \\ \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k \in \mathcal{T} \end{array} \right.$$

Par conséquent, la tribu $\mathcal{T}$ est stable par passage aux limites inférieure et supérieure : $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n \in \mathcal{T}$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

2) Dans la suite de l'exercice on désigne par $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ la fonction définie par l'expression,

$$\forall x \in \mathbf{E} ; \quad f(x) := \sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}(x) \in \overline{\mathbb{R}^+} \quad \text{où} \quad \chi_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_n \\ 0 & \text{si } x \notin A_n \end{cases}$$

i) La fonction caractéristique $\chi_{A_n} : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ est mesurable car pour tout réel $c \in \mathbb{R}$ le sous-ensemble de niveau :

$$\chi_{A_n}^{-1}(]c, +\infty]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } c \geq 1 \\ A_n & \text{si } 0 \leq c < 1 \\ \mathbf{E} & \text{si } c < 0 \end{cases} \implies \chi_{A_n}^{-1}(]c, +\infty]) \in \mathcal{T}$$

ii) La suite de fonctions, $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} \chi_{A_p}$, est croissante car $S_{n+1} - S_n = \chi_{A_{n+1}} \geq 0$.

iii) Rappelons que d'après les résultats essentiels vu dans le Cours : la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est une fonction mesurable. Par conséquent, puisque la fonction $f : (\mathbf{E}, \mathcal{T}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ on pourra l'obtenir comme la limite simple sur $\mathbf{E}$ de la suite de fonctions mesurables : $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} \chi_{A_p}$; elle est donc mesurable sur $\mathbf{E}$.

iv) Montrons que le domaine de convergence de la fonction f , noté $D(f) := \{x \in \mathbf{E} ; f(x) \in \mathbb{R}^+\}$, est égal au complémentaire dans $\mathbf{E}$ de la limite supérieure de la suite de parties A_n .

Noter que par définition, un point $x \in D(f)$ si et seulement si le reste de la série numérique $\sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}(x)$ converge vers zéro. Donc, si on fixe un réel $\varepsilon > 0$ on pourra écrire,

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_0 \implies \sum_{k \geq n} \chi_{A_k}(x) < \varepsilon$$

Observer alors que si on prend $\varepsilon \in]0, 1[$ on aura l'implication :

$$\left((\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_0 \implies \sum_{k \geq n} \chi_{A_k}(x) < \varepsilon < 1 \right) \implies \left((\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq n_0, \quad \chi_{A_n}(x) = 0 \right)$$

Ainsi, de la dernière implication on déduit que le point :

$$x \in \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} (A_n)^c \iff x \in \left(\bigcap_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq n_0} A_n \right)^c \iff x \in \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right)^c$$

Par conséquent, le domaine de convergence de la série de fonctions $f = \sum_{n \geq 0} \chi_{A_n}$ est égal au complémentaire de la limite supérieure de la suite de parties mesurables A_n ie. :

$$D(f) = \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right)^c$$

Exercice 4.(2 points) Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie $A \in \mathcal{T}$ on définit une fonction d'ensembles, $\mu_A : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$, par l'expression :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \quad \mu_A(B) := \mu(A \cap B)$$

- 1) Montrer que μ_A est une mesure positive sur l'espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{T})$.
- 2) Montrer que la mesure μ_A vérifie les propriétés suivantes :
 - i) $\forall B \in \mathcal{T}, B \subseteq A \implies \mu_A(B) = \mu(B)$.
 - ii) $\forall B \in \mathcal{T}, B \subseteq A^c \implies \mu_A(B) = 0$.

Solution 4. Voir la solution de TD3.

Exercice 5.(3 points) Soit $(\mathbf{E}, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute partie $A \subseteq \mathbf{E}$ on pose :

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B); \forall B \in \mathcal{T}, A \subseteq B\}$$

- 1) Montrer que pour tout $A \subseteq \mathbf{E}$ il existe une partie $A_0 \in \mathcal{T}$ telle que $A \subseteq A_0$ et $\mu^*(A) = \mu(A_0)$.
- 2) Montrer que $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une mesure extérieure.
- 3) Montrer que pour toute partie $A \in \mathcal{T}$ on a l'égalité $\mu^*(A) = \mu(A)$.
- 4) Conclure.

Solution 5. Voir la solution de TD3.