FST Errachidia

Analyse 4 (M147) : Série de fonctions et Calcul des résidus

Pr. Hamid OULGHAZI

10 mars 2022

Année universitaire : 2021-2022

Table des matières

1 Suites de fonctions **4**

1.1 Convergence simple et uniforme 4

1.2 Convergence uniforme et continuité 7

1.3 Convergence uniforme et dérivation 9

1.4 Convergence uniforme et intégrale de Riemann 10

2 Séries de fonctions **13**

2.1 Différents modes de convergence 13

2.1.1 Convergence simple 13

2.1.2 Convergence uniforme 14

2.1.3 Convergence absolue 14

2.1.4 Convergence normale 15

2.2 Propriétés des sommes de séries de fonctions 16

2.2.1 Convergence uniforme et continuité 16

2.2.2 Convergence uniforme et intégrale de Rieman 16

2.2.3 Convergence uniforme et dérivation termes à termes 17

3 Séries entières **19**

3.1 Rayon de convergence 19

3.2 Méthode pratique pour calculer R 21

3.3 Comparaison de rayons de convergence 22

3.4 Opérations sur les séries entières 23

3.5 Convergence uniforme et séries entières 23
3.5.1 Continuité de la fonction somme 24
3.5.2 Intégration de la fonction somme 24
3.5.3 Dérivation de la fonction somme 25
3.5.4 Fonctions développables en série entière 26
3.5.5 Séries entières classiques 26

4 Séries de Fourier **29**
4.1 Séries trigonométriques 30
4.2 Séries de Fourier 30
4.3 Théorèmes de convergence 33

5 Calculs des résidus **35**
5.1 Fonctions holomorphes 35
5.2 Théorèmes de résidus et applications 37
5.2.1 Théorèmes de résidus 37
5.2.2 Applications au calcul d'intégrales 38

Chapitre 1

Suites de fonctions

La notion de convergence d'une suite de fonctions est cruciale en Analyse et constitue une source inépuisable de sujets d'examens et de concours. Ce chapitre est une des parties les plus importantes du cours d'Analyse. En plus de leur importance intrinsèque, les résultats de ce chapitre jouent un rôle fondamental dans toute la suite de ce cours.

1.1 Convergence simple et uniforme

Définition 1.1.1 *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un sous ensemble I de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que (f_n)* **converge simplement** *vers f sur I ssi, pour chaque $x \in I$, la suite réelle $f_n(x)$ converge dans I vers $f(x)$. En d'autres termes*

$$\forall x \in I, \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

On dit alors que f est **la limite simple** *de (f_n) sur I, et on note*

$$f_n \underset{n \to +\infty}{\xrightarrow{C.S}} f$$

Exemple. 1.1.1 *La suite des fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in [0,1[; \\ 1, & si\ x = 1. \end{cases}$$

Remarque. 1.1.1

1. *On observe sur cet exemple que les f_n sont de classe C^∞ sur $I = [0,1]$ tandis que la fonction f n'est pas même continue.*

2. *Dans la définition ci-dessus, l'entier N dépend, en général, de ϵ et de x, cela nous amènera parfois à noter $N(\epsilon, x)$ au lieu de N.*
3. *En exigeant que N soit indépendant de x, on obtient un mode de convergence plus restrictif, appelé convergence uniforme.*

Avant de définir ce mode de convergence, nous rappelons d'abord la notion de la norme infinie.

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction définie sur un sous ensemble I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Si f est bornée sur I (i.e., $\exists M, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$).
Alors $|f|$ est majorée donc admet une borne supérieure que l'on note $\|f\|_\infty$ et que l'on appelle norme infinie de f. On écrit alors

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Si f n'est pas bornée sur I, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

Donnons maintenant la définition de la convergence uniforme.

Définition 1.1.3 *Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I ssi, la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge dans I vers 0. En d'autres termes*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

On dit alors que f est **la limite uniforme** *de (f_n) sur I, et on note*

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{C.U} f.$$

Remarque. 1.1.2 *la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel le graphe de f_n est contenu dans la partie du plan (xOy) définie par $x \in X$ et $y \in [f - \epsilon, f + \epsilon]$. Autrement dit, il existe un rang N à partir duquel le graphe de f_n est compris entre le graphe de $f - \epsilon$ et celui de $f + \epsilon$.*

Proposition 1.1.1 *Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f, alors elle converge simplement sur I vers f.*

Preuve. 1.1.1 *Découle immédiatement des définitions.*

Remarque. 1.1.3

1. *Cette proposition nous dit que pour rechercher une éventuelle limite uniforme, on pourra d'abord étudier l'existence d'une limite simple, et si la convergence simple est vérifiée, la limite simple est alors la seule fonction candidate à être la limite uniforme.*
2. *Nous verrons dans l'exemple suivant que la réciproque de la proposition n'est pas vraie.*

Exemple. 1.1.2 *La suite des fonctions définies sur $I = [0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in [0,1[; \\ 1, & si\ x = 1. \end{cases}$$

Cependant que (f_n) ne converge pas uniformément vers f. En effet

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in I} |x^n - f(x)| = 1$$

ne tend évidemment pas vers zéro.

Il n'est pas toujours possible de calculer explicitement $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ comme on vient de faire la-dessus (i.e., en passant par l'étude des variations) d'oǜ l'utilitè de la proposition suivante :

Proposition 1.1.2

1. *Pour que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, il suffit qu'il existe une suite (a_n) des nombres réels positifs qui ne dépend pas de x, convergeant vers zéro, telle que*
$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$
2. *Pour que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I, il suffit qu'il existe une suite (x_n) de points de I telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers zéro.*

Preuve. 1.1.2 *A titre d'exercice*

Exemple. 1.1.3 *Considérons la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$$

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, la suite numérique (f_n) converge vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Or pour $n \geq 1$, on a

$$f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}}.$$

Ne converge pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
L'assertion 2) de la proposition précédente permet de conclure que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

La définition de la convergence uniforme suppose connue la fonction limite f de la suite (f_n). Lorsqu'on ne connaît pas f, on peut utiliser le très important critère suivant.

Théorème 1.1.1 *(Critère de Cauchy uniforme)*
Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur un sous ensemble I de $\mathbb{R}$, alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément si et seulement si on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq N \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \epsilon.$$

Preuve. 1.1.3 *Supposons le critère de Cauchy vérifié, alors on en déduit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall x \in I, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Longrightarrow |f_{\mathrm{n}}(x) - f_m(x)| \leq \|f_{\mathrm{n}} - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$

par conséquent pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy donc converge vers une limite que l'on notera $f(x)$. Ainsi la suite $(f_n)_{n \in N}$ converge simplement vers f sur I. Or si on fait tendre m vers $+\infty$ dans (1) on obtient

$$\forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

et ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.
Réciproquement, si $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in N, \quad \forall n \in N, \quad n \geq N \Longrightarrow \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$$

Alors l'inégalité triangulaire nous donne

$$m > n \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

et le critère de Cauchy de convergence uniforme est vérifié.

1.2 Convergence uniforme et continuité

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 1.2.1 *soit (f_n) une suite de fonctions définies de I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$* ***uniformément convergente*** *vers f. Si toutes les fonctions f_n sont toutes continues en un point a de I, alors leur limite f est continue au point a.*

Preuve. 1.2.1 *Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément vers f sur I, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow \left(\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Comme f_N est continue en a, il existe un voisinage V de a dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I \cap V, |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors pour tout x de $I \cap V$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc f est continue au point a.

L'importance du théorème précédent provient du fait que beaucoup de fonctions usuelles sont définies comme limites uniformes de fonctions continues.
Notons que ce théorème permet souvent de montrer, sans calcul, que la convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme.

Exemple. 1.2.1 *La suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in]0, +\infty[; \\ 1, & si\ x = 0. \end{cases}$$

En d'autre part les f_n sont continues mais la limite f ne l'est pas. Alors on en déduit que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque. 1.2.1 *La convergence uniforme d'une suite simplement convergente de fonctions continues est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que la fonction limite soit continue. Autrement dit il existe des suites (f_n) de fonctions continues qui convergent simplement mais non uniformément vers une limite f qui est continue.*

Théorème 1.2.2 *(Théorème de la double limite)*
Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément sur I vers une fonction f, et soit a un point de $\bar{I}$ tel que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la limite b_n de $(f_n(x))$ lorsque x tend vers a existe. Alors la suite (b_n) a une limite b, et $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a. En d'autres termes, on a la formule d'interversion de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Preuve. 1.2.2

– *Montrons que la suite (b_n) converge.*

Pour ce faire, on va démontrer que La suite (b_n) est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément sur I vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad \left(n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| &\leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

En faisant tendre x vers a, on déduit, par continuité de $x \mapsto |x|$ que : $|b_p - b_q| \leq \varepsilon$. On a donc démontré que la suite (b_n) est de Cauchy, elle est donc convergente. Notons b sa limite.
– Montrons que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) converge uniformément sur I vers f, on peut trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad \left(n \geq N_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Puisque (b_n) converge vers b, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Notons $N' = \max(N_1, N_2)$. Puisque $f_{N'}(x)$ tend vers $b_{N'}$ lorsque x tend vers a, il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in I \cap V, |f_{N'}(x) - b_{N'}| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors, pour tout $x \in I \cap V$:

$$\begin{aligned}|f(x) - b| &\leq |f(x) - f_{N'}(x)| + |f_{N'}(x) - b_{N'}| + |b_{N'} - b| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Cela montre bien que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a.

1.3 Convergence uniforme et dérivation

Considérons la suites de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Cette suite converge simplement vers la fonction $f: \quad x \to \quad |x|$. Pour chaque $n \geq 1$, f est dérivable (même de classe $C^{+\infty}$) sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on a

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq |x| + \frac{1}{n}.$$

D'où
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}.$$
Ce qui prouve que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur $\mathbb{R}$. Cependant la fonction f n'est pas dérivable à l'origine.
Autrement dit, la limite d'une suite (même uniformément convergente) de fonctions dérivables n'est pas nécessairement dérivable.
Dans cette section, nous allons établir les conditions suffisantes (mais non nécessaires) pour que la limite d'une suite (f_n) de fonctions dérivables soit dérivable.

Théorème 1.3.1
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, Si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,*
2. *La suite $(f_n^{'})$ des dérivées converge uniformément sur I vers une fonction g.*
3. *Il existe un point a de I telle que la suite numérique $(f_n(a))$ converge.*

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f qui est de classe C^1 sur I et telle que $f^{'} = g$:

Le théorème suivant donne une généralisation de ce dernier théorème.

Théorème 1.3.2 *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit k un entier tel que $k \geq 1$. Si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I,*
2. *La suite $(f_n^{(k)})$ des dérivées $k-$ème converge uniformément sur I vers une fonction g.*
3. *Il existe un point a de I telle que pour tout entier $m \in [0, k-1]$, la suite numérique $(f_n^{(m)}(a))$ converge.*

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f qui est de classe C^k sur I et telle que $f^{(k)} = g$:

Preuve. 1.3.1 *Par récurrence sur k.*

1.4 Convergence uniforme et intégrale de Riemann

Théorème 1.4.1 *(Interversion limite et intégrale) Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$, alors la suite numérique $(\int_a^b f_n(x)dx)$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$, et on a*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Preuve. 1.4.1
On a

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Comme pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty\,,$$

d'où

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,\mathrm{d}x = (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty$$

Or $\|f_n - f\|_\infty$ *tend vers* 0 *puisque la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f*, d'où*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple. 1.4.1 *Soit* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ $(n \geq 1)$. *On a déjà vu que* $(f_n)_{n\geq1}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* $f : x \mapsto |x|$*, donc la convergence est aussi uniforme sur* $[0, 1]$. *D'après le théorème précédent, on en déduit que*

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 |x|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Encore une fois, ce théorème peut permettre parfois de montrer que la convergence n'est pas uniforme.

Exemple. 1.4.2 *Soit* $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4},\quad x \in I = [0, 1]$. *Alors* $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{CS} 0$ *et donc* $\int_0^1 \lim_n f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. *En revanche, par un calcul direct, en utilisant la primitive de la fonction en question, on obtient que* $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. *Par conséquent la convergence n'est pas donc uniforme sur* $[0, 1]$.

Remarque. 1.4.1 *Mis à part le théorème 1.4.1, qui permet de trouver la limite d'une suite d'intégrales sans avoir besoin de les calculer, on peut se demander quel est l'intérêt de tous ces résultats. En général, étant donnée une suite de fonctions, on peut calculer la limite* f*, et voir directement si elle est continue ou de classe* C^1*. En fait, tout l'intérêt des théorèmes précédents se révèle dans l'étude des séries de fonctions, où l'on sait en général démontrer l'existence de la somme d'une série sans pouvoir la calculer. Ainsi, ces théorèmes vont permettre de donner des propriétés de la fonction somme, sans la connaître explicitement.*

Exemple. 1.4.3 *(Exercice d'application 1) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction f_n sur $[0, \pi]$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x(1+nx)} & si \quad x \in]0, \pi]. \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

1. *Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions (f_n).*
2. *Soit $a \in]0, \pi[$. Étudier la convergence uniforme sur le segment $[a, \pi]$ de la suite (f_n).*

Exemple. 1.4.4 *(Exercice d'application 2)*

1. *Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.*
2. *En déduire la nature de la suite de terme général*

$$v_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x} dx.$$

Exemple. 1.4.5 *(Exercice d'application 3)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions continues sur I et convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Soit (x_n) une suite dans I convergeant vers un élément l de I.
Montrer que $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(l)$ lorsque n tend vers l'infini.

Chapitre 2

Séries de fonctions

Comme pour les séries numériques, on peut, à partir d'une suite de fonctions (f_n), construire une suite (S_n) où $S_n = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n$. On obtient ainsi ce qu'on appelle une série de fonctions, notée $\sum_n f_n$. Les séries de fonctions jouent un rôle considérable en Analyse avec notamment les exemples fondamentaux des séries entières $\sum_n a_n x^n$ et des séries trigonométriques $\sum_n a_n e^{inx}$ qui feront l'objet des deux prochains chapitres. Pour les séries de fonctions, on dispose d'un nouveau mode de convergence, dite normale, qui n'est en fait qu'une condition suffisante très commode pour établir la convergence uniforme. Nous gardons les notations du chapitre précédent.

2.1 Différents modes de convergence

2.1.1 Convergence simple

Définition 2.1.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle suite des sommes partielles de f_n, la suite (S_n) définie par.*

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Proposition 2.1.1 *Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ définie ci-dessus converge simplement sur I, alors, la série de fonctions $\sum f_n$ converge.*

- **Notations** : La série de terme général f_n se note : $\sum f_n$
- **Dans le cas où la série de terme général f_n converge**, la limite, notée S, de la suite (S_n) est appelée somme de la série et on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Exemple. 2.1.1 *Considérons la série de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\sum xe^{-nx}$.*
Pour $x = 0$, la convergence est évidente car $S_n(0) = 0$.
Pour chaque x fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, on a la suite des sommes partielles S_n est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} xe^{-kx} = x\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-x}\right)^k = x\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{x}{1-e^{-x}}.$$

Donc

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-nx} = \begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}}; & \text{si } x>0. \\ 0, & \text{si } x=0. \end{cases}$$

2.1.2 Convergence uniforme

Définition 2.1.2 *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si, la suite de fonctions $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément sur I.*

Définition 2.1.3 *On appelle reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$, la fonction R_n définie par*

$$\forall x \in I, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Remarque. 2.1.1 *Pour tout $x \in I$, on a alors $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.*

Proposition 2.1.2 *Soit $\sum f_n$ une série simplement convergente, alors pour que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, il faut et il suffit que la suite (R_n) des restes converge uniformément vers 0 dans I.*

Exemple. 2.1.2 *Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x+n^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La série $\sum f_n$ converge simplement puisque, pour tout $x > 0$, on a $\frac{1}{x+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et que $\frac{1}{n^2}$ est le terme général positif d'une série convergente. Montrons la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.*
Pour tout entier naturel n, on a par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \le R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x+k^2} \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{(n+1)^2},$$

On a donc $||R_n||_{+\infty} \le \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, Finalement $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.1.3 Convergence absolue

Définition 2.1.4 *On dit que la série $\sum f_n$ converge absolument sur I si, pour tout $x \in I$, la série réelle $\sum |f_n(x)|$ converge.*

Proposition 2.1.3 *Si la série $\sum f_n$ converge absolument sur I, alors elle converge simplement sur I.*

2.1.4 Convergence normale

Définition 2.1.5 *On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur I si, pour tout $x \in I$, la série réelle $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Proposition 2.1.4 *(Critère de Weierstrass)*
La série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I si, et seulement si, il existe une suite réelle positive (α_n) vérifiant les deux conditions suivantes :
– $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \alpha_n$
– *La série $\sum \alpha_n$ converge.*

Preuve. 2.1.1 *Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente, alors la suite de terme général $\alpha_n = \|f_n\|_\infty$ satisfaite aux deux conditions de la proposition précédente.*
Réciproquement, si les deux conditions de la proposition sont vérifiées, alors chaque f_n est bornée et la série $\sum \|f_n\|$ est convergente comme série à termes positifs majorée par la somme d'une série convergente.

Exemple. 2.1.3 *La série $\sum e^{-nx}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$. En effet, pour n assez grand, on a $|e^{-nx}| \leq e^{-na}$ pour tout $x \geq a$, et on conclut par la proposition précédente puisque $\sum e^{-na}$ est une série géométrique de raison e^{-a} appartenant à $]0, 1[$ donc convergente.*

Théorème 2.1.1 *La série $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge absolument et uniformément sur I, et l'on a pour tout $x \in I$,*

$$|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$$

Théorème 2.1.2 *(Critère d'Abel uniforme) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions definies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers 0 sur I, et soit $(w_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions definies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant*

$$\exists M > 0, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \Longrightarrow \forall x \in I, |w_n(x) + w_{n+1}(x) + \ldots. + w_m(x)| \leq M$$

Alors la série de fonctions $\sum v_n(x)w_n(x)$ converge uniformément.

Preuve. 2.1.2 *Par hypothese on a :*

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k(x)w_k(x)| \leq M\, |v_{n+1}(x)|$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k(x)w_k(x)| \leq M\, \|v_{n+1}\|_\infty$$

Or la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I donc $\|v_{n+1}\|_\infty$ tend vers 0 et ainsi le reste de la série $\sum v_n w_n$ converge uniformément vers 0, i.e la série $\sum v_n w_n$ converge uniformément.

Théorème 2.1.3 *(Critère des séries altérnées) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions décroissantes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers 0 sur I ; alors la série alternée $\sum(-1)^n v_n$ converge uniformément sur I.*

Preuve. 2.1.3 *Il suffit d'appliquer le critère d'Abel uniforme avec $w_n = (-1)^n$.*

2.2 Propriétés des sommes de séries de fonctions

2.2.1 Convergence uniforme et continuité

Théorème 2.2.1 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un internalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur I ; alors si les fonctions f_n sont continues sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum f_n$ est une **fonction continue sur** I.*

Preuve. 2.2.1 *Il suffit d'appliquer le Théorème 1.2.1 à la suite des sommes partielles.*

Exemple. 2.2.1 *La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, en notant f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+1}$$

Comme $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, par comparaison aux séries de Riemann, la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge et par conséquent la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Puisque les fonctions f_n sont continues, alors on en déduit que f est continue.

2.2.2 Convergence uniforme et intégrale de Rieman

Théorème 2.2.2 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies et continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément; alors la série numérique $\Sigma(\int_a^b f_n(x)dx)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\int_a^b f_n(x)dx) = \int_a^b(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx).$$

Preuve. 2.2.2 *II suffit d'appliquer le Théorème 1.4.1 à la suite des sommes partielles $(S_n(x))$.*

2.2.3 Convergence uniforme et dérivation termes à termes

Théorème 2.2.3 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$; on suppose que les 3 conditions suivantes sont vérifiées :*
– Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^1 sur I ;
– La série dérivée $\Sigma f_n'$ converge uniformément sur I
– il existe un point a de I telle que la série numérigne $\Sigma f_n(a)$ converge.
Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, sa somme est une fonction de classe C^1 sur I et on peut "deriver terme à terme"

$$\forall x \in I, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

Preuve. 2.2.3 *Il suffit d'appliquer le Théoreme 1.3.1 à la suite des sommes partielles.*

Exemple. 2.2.2 *– Montrons que pour tout $x > 1$, la fonction $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et $\forall x > 1, \quad \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.*

Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Nous savons que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. De plus, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. Démontrons la convergence uniforme de la série $\sum f_n'$ sur $[a, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq |f_n'(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}$. De plus, la série numérique $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ est convergente comme étant une série de Bertrand $(a > 1)$. Cela nous permet d'affirmer la convergence normale de la série $\sum f_n'$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, et donc qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de $]1, +\infty[$. D'où le résultat.

Le théorème suivant donne une généralisation du précédent :

Théorème 2.2.4 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit k un entier supérieur ou égale à 1. On suppose que les 3 conditions suivantes sont satisfaites :*
– Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^k sur I ;
– La série dérivée $\Sigma f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.
– il existe un point a de I, telle que les séries numériques $\Sigma f_n^{(j)}(a)$ converge pour tout $j \in [0, k-1]$.
Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, et sa somme est une fonction de classe C^k sur I, et on peut "deriver terme à terme"

$$\forall x \in I, \quad \forall j \in [0, k], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Remarque. 2.2.1 *Pour démontrer que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut chercher à démontrer que :*

– *Toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$;*
– *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément au voisinage tout point.*
Dans ce cas, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}.$$

Exemple. 2.2.3 *Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.*

Exemple. 2.2.4 *(Exercice d'application)*
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$, avec $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. *Démontrer que $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.*
3. *Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} f_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,*

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)\,(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Chapitre 3

Séries entières

Nous allons appliquer les résultats du précédent chapitre à des séries d'un type particulier possédant des propriétés de convergence remarquables. Ces séries sont parfaitement adaptées à la représentation des fonctions de variable réelle ou complexe, de classe C^{∞}, et jouent un rôle considérable dans de nombreuses branches des mathématiques comme la combinatoire ou la théorie des nombres, et sont au coeur de la théorie des fonctions analytiques réelles ou complexes et présentent un outil important dans la résolution des équations différentielles.

3.1 Rayon de convergence

Définition 3.1.1 *Une série entière est une série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels ou de complexes et appelée la suite des coefficients de la série.

On va voir que ces séries ont des propriétés particulièrement agréables. On commence par un résultat fondamental.

Théorème 3.1.1 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels ou de complexes. Alors, il existe un unique élément R de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ possédant les deux propriétés suivantes :*
– (i) pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge.
– (ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge.
De plus, on a

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 / \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\geq 0} \ \textit{est majorée} \ \right\}$$

Preuve. 3.1.1
Montrons l'unicité d'un tel élément :
Supposons que R et R' vérifient les deux conditions de l'énoncé et que que $R < R'$ (ce qui implique que R est fini). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $R < |x| < R'$.
Alors, par choix de R, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge. Mais par choix de R', cette série est absolument convergente, donc convergente, d'où une contradiction. Donc $R \geq R'$. En échangeant les rôles de R et R', on obtient $R' \geq R$, et donc $R = R$.
***Passons a l'existence**, et posons*

$$A = \left\{ r \geq 0 \mid \left(|a_n|\, r^n\right)_{n\geq 0} \text{ est majorée } \right\}.$$

Remarquons que A est non vide, puisque $0 \in A$. Posons $R = \sup(A)$ (on rappelle que $\sup(A) = +\infty$ si A n'est pas majorée).
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Alors, il existe $r \in A$ tel que $|x| < r$. Sinon, pour tout $r \in A$, on a aurait $r \leq |x|$. Ainsi, $|x|$ serait un majorant de A, et on aurait $R \leq |x|$, d'où une contradiction. Mais alors, $\left(|a_n|\, r^n\right)_{n\geq 0}$ est majorée. Soit M un majorant de cette suite (qui est donc nécessairement positif). On a alors

$$|a_n| \cdot |x|^n = |x/r|^n\, |a_n|\, r^n \leq M |x/r|^n$$

Comme $|x/r| < 1$, la série $\sum M|x/r|^n$ converge, et donc $\sum |a_n| \cdot |x|^n$ converge également. Ainsi, $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R$. Alors $\left(|a_n| \cdot |x|^n\right)_n$ n'est pas majorée. Sinon on aurait $|x| \in A$, et donc $|x| \leq R$ par définition de la borne supérieure. En particulier, $\left(a_n x^n\right)_n$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge.

Définition 3.1.2 *L'élément R de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini dans le théorème précédent est appelé **le rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.*

Remarque. 3.1.1

- *Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge, alors $|x| \leq R$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $|x| > R$ et $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ serait divergente.*
- *Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge, alors $|x| \geq R$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $|x| < R$ et $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ serait convergente.*
- *Lorsque $|x| = R$, on ne peut à priori rien dire de la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, tout peut arriver.*
- *L'ensemble $\{x \in \mathbb{C}, |x| < R\}$ est dit **le disque de convergence** de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.*
- *L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, -R < x < R\}$ est dit **l'intervalle de convergence** de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.*

3.2 Méthode pratique pour calculer R

Dans ce paragraphe, nous poserons

$$\frac{1}{R} = 0 \text{ si } R = +\infty, \text{ et } \frac{1}{R} = +\infty \text{ si } R = 0.$$

Si la série $\sum a_n x^n$ est telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors on a le résultat suivant qui découle de la règle de D'Alembert pour les séries numériques.

Proposition 3.2.1 *(Règle d'Alembert)*
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, et notons R son rayon de convergence. Si la suite de terme général $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = 1/l$.

Exemple. 3.2.1 *Pour la série entière $\sum x^n/n!$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Le rayon de convergence est donc égal à $+\infty$.

Remarque. 3.2.1 *La règle d'Alembert est inapplicable pour les séries du type*

$$\sum a_n z^{2n}, \sum a_n z^{2n+1}, \sum a_n z^{n^2} \dots$$

Dans ces cas on peut par exemple effectuer un changement de variable du type $Z = z^2$ ou procéder comme dans l'exemple suivant.

Exemple. 3.2.2 *Calculons le rayon de convergence de $\sum \frac{2^n z^{2n+1}}{n+1}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$, et posons $u_n = \frac{2^n |z_0|^{2n+1}}{n+1}$ On a*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2^{n+1}|z_0|^{2n+3}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n |z_0|^{2n+1}} = \frac{2|z_0|^2(n+1)}{n+2}.$$

Il en résulte

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2|z_0|^2$$

On en déduit que, si $|z_0| < 1/\sqrt{2}$, la série à termes positifs $\sum u_n$ converge et si $|z_0| > 1/\sqrt{2}$, la série $\sum u_n$ diverge. Par définition-même, le rayon de convergence de la série entière proposée est égal à $1/\sqrt{2}$.

Théorème 3.2.1 *(Formule de Hadamard)*
Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{avec} \quad L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Preuve. 3.2.1 *Fixons $z \in \mathbb{C}$, l'égalité $|a_n z^n|^{1/n} = |a_n|^{1/n} |z|$ montre que la série converge absolument pour* $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < 1$ *et diverge pour* $\lim_{n\to+\infty} \sup |a_n|^{1/n} > 1$. *Par conséquent, la série converge absolument si $|z| < 1/L$, et diverge si $|z| > 1/L$. Donc $R = 1/L$.*

Corollaire. 3.2.1 *(Règle de Cauchy)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite de terme genéral $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ converge vers $L \in \overline{\mathbf{R}}_+$, alors $R = 1/L$.

Exemple. 3.2.3 *Pour la série entière $\sum \frac{n}{2^n} z^n$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/n}}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln(n)}{n}}}{2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que le rayon de convergence recherché est égal à 2.

Exemple. 3.2.4 *Montrer en utilisant la régle de Cauchy que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n$ vaut 1.*

3.3 Comparaison de rayons de convergence

Dans ce paragraphe, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Les deux résultats qui suivent découlent immédiatement de la formule de Hadamard. Nous en donnons néanmoins une preuve à partir de la définition du rayon de convergence.

Proposition 3.3.1 *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.*

Preuve. 3.3.1 *Découle de la définition du rayon de convergence. En effet, soit $r \in \mathbb{R}_+$tel que la suite $(b_n r^n)$ soit bornée. Puisque $|a_n r^n| \leq |b_n r^n|$, la suite $(a_n r^n)$ est également bornée. On a donc bien l'inégalité : $R_{\mathrm{a}} \geq R_{\mathrm{b}}$*

Exemple. 3.3.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos n} \leq e$. Les deux séries $\sum e^{-1} z^n$ et $\sum e z^n$ étant de rayon de convergence égal a 1, alors la série $\sum e^{\cos n} z^n$ est aussi de rayon de convergence égal à 1 .*

Proposition 3.3.2 *Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.*

Preuve. 3.3.2 *Par définition, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et un rang N à partir duquel on a $|a_n| \leq M |b_n|$. La série $\sum M b_n z^n$ ayant pour rayon de convergence R_b, la proposition précédente permet de conclure que l'on a bien $R_a \geq R_b$.*

Proposition 3.3.3 *Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.*

Preuve. 3.3.3 *Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$, donc d'après la proposition précédente, on a $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$. D'où l'égalité annoncée.*

3.4 Opérations sur les séries entières

Théorème 3.4.1 *(Somme de deux séries entières)) Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*. Alors le rayon de convergence* R *de la série entière somme* $\sum(a_n + b_n)z^n$ *vérifie :*
– *Si* $R_a \neq R_b$*,* $R = \inf(R_a, R_b)$*.*
– *Si* $R_a = R_b$*,* $R \geq R_a = R_b$*.*
De plus pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < \inf(R_a, R_b)$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Preuve. 3.4.1 *Si* $|z| < \inf(R_a, R_b)$ *alors les séries* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *convergent donc la série somme* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *converge : on en déduit que* $R \geq$ *inf* (R_a, R_b) *et que pour tout* z *tel que* $|z| < \inf(R_a, R_b)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Si $R_a \neq R_b$*, par exemple* $R_a < R_b$*, considérons* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $R_a < |z| < R_b$ *alors la série* $\sum a_n z^n$ *diverge et la série* $\sum b_n z^n$ *converge donc la série somme diverge : on en déduit que* $R \leq R_a = \inf(R_a, R_b)$*,* $R = \inf(R_a, R_b)$*.*

Remarque. 3.4.1 *On ne peut rien dire sur le rayon de convergence de la série somme quand* $R_a = R_b$ *: par exemple les séries entières* $\sum z^n$ *et* $\sum -z^n$ *ont même rayon de convergence* 1 *mais leur série somme est la série nulle de rayon* $+\infty$

Définition 3.4.1 *(Série entière dérivée) On appelle série entière dérivée d'une série entière* $\sum a_n z^n$ *la série* $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$

Théorème 3.4.2 *La série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.*

Preuve. 3.4.2 *Facile, à vous de le faire.*

3.5 Convergence uniforme et séries entières

Théorème 3.5.1 *Une série entière, converge normalement (donc uniformément) sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.*

Preuve. 3.5.1 *Soit K un compact inclus dans le disque de convergence $D(0,R)$ de $\sum a_n z^n$. Puisque la fonction $\varphi : z \mapsto |z|$ est continue sur le compact K, elle y est bornée et y atteint sa borne supérieure. Il existe donc $r \in [0,R[$ tel que*

$$K \subset \bar{D}(0,r) \subset D(0,R).$$

Où $\bar{D}(0,r)$ désigne le disque fermé de centre 0 et de rayon r. Puisque $0 \leq r < R$, la série numérique $\sum |a_n| r^n$ converge. Comme de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{z \in K} |a_n z^n| \leq |a_n| r^n.$$

Il en résulte que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur K.

3.5.1 Continuité de la fonction somme

Théorème 3.5.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul ; alors la somme de la série $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction continue sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$ (ou sur le disque de convergence si on travaille dans $\mathbb{C}$)*

Preuve. 3.5.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(z) = a_n z^n$, est continue sur $\mathbb{R}$, donc on particulier sur $]-R,R[$. De plus d'après le Theorem 3.5.1, la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément, On en déduit donc d'après le Théorème 1.2.1 que la limite de la série (i.e. la somme de la série) est continue sur $]-R,R[$.*

Exemple. 3.5.1 *La règle d'Alembert permet de voir facilement que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est de rayon de convergence égal à $+\infty$. Sa fonction somme $z \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est donc continue sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

3.5.2 Intégration de la fonction somme

Théorème 3.5.3 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Si $[a,b]$ est un segment inclus dans l'intervalle de convergence $]-R,R[$, alors*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

Preuve. 3.5.3 *La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[a,b]$. D'où le résultat.*

Corollaire. 3.5.1 *La fonction somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est continue sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$, et ses primitives sont de la forme*

$$x \mapsto \alpha + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

3.5.3 Dérivation de la fonction somme

Théorème 3.5.4 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa fonction somme S définie sur $]-R, R[$ est de classe C^1 et sa dérivée S' est la fonction somme de la série entière dérivée. i.e.*

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S^{'}(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)^{'} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Preuve. 3.5.4 *Les fonctions $f_n : x \mapsto a_n x^n$ sont de classe C^1, la série $\sum a_n x^n$ converge simplement sur $]-R, R[$, et la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur toute partie compacte de $]-R, R[$. Le théorème 1.3.1 du chapitre précedent permet de conclure, que S' est la somme de la série $\sum f_n'$. On en déduit aussitôt le résultat suivant.*

Corollaire. 3.5.2 *Sous les hypothèses du theorème ci-dessus, la fonction somme S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et on a*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-R, R[, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

En particulier, on a, pour tout $k \in \mathbb{N} : a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Exemple. 3.5.2 *On a vu que la série géométrique $\sum x^n$ est de rayon de convergence 1 et que*

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Par dérivation, on a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Par une récurrence immédiate sur k, on en déduit que

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k) \ldots (n+1) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{k! n!} x^n$$

3.5.4 Fonctions développables en série entière

Définition 3.5.1 *Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière en 0 , s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un nombre $r \in]0, R]$ avec $]-r, r[\subset I$ tel que*

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Définition 3.5.2 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière en un point x_0 si la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est développable en série entière en 0.*

Exemple. 3.5.3 *Tout polynôme P est développable en série entière en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ en effet on a d'après la formule de Taylor :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{n=0}^{deg\ P} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Rappelons qu'on appelle voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[$ avec $r > 0$. En particulier, tout intervalle $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ avec $\rho > 0$ est un voisinage du point x_0.

Proposition 3.5.1 *Si une fonction f est développable en série entière en x_0, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est de classe C^∞ et le développement en série entière de f en x_0 est $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Cette série est appelé la série de Taylor de f en x_0.*

Preuve. 3.5.5 *Puisque f est développable en série entière en x_0, il existe un nombre $r > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ on ait*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Or, la somme S de la série entière $\sum a_n (x - x_0)^n$ est de classe C^∞ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, S^{(n)}(x_0) = n! a_n$. D'où le résultat annoncé.

3.5.5 Séries entières classiques

1. **Fonction exponentielle et les fonctions hyperboliques** :
   L'application $\exp : x \mapsto e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp^{(n)}(0) = 1$. D'après la formule de Taylor avec reste intégrale, on a

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Comme

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right| \leq \max(1,e^x)\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}dt\right| = \max(1,e^x)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le théorème de gendarmes entraine que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a alors

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. Les fonctions cosinus et sinus :
   Les applications cosinus et sinus sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}, \begin{cases} \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

   En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, on montre, comme précédemment, que cosinus et sinus sont développables en série entière en 0 , de rayon de convergence égale à $+\infty$, et que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. La fonction $f_\alpha : x\mapsto (1+x)^\alpha$:
   A l'aide de la méthode de l'équation différentielle, on montre que f_α est développable en série entière en 0, avec rayon de convergence égal à 1 si $\alpha\notin\mathbb{N}$, et égal à $+\infty$ si $\alpha\in\mathbb{N}$. De plus,

$$\forall x\in]-1,1[, (1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

   En particulier,

$$\forall x\in]-1,1[, \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n.$$

   En remplaçant x par $-x$, on retrouve la série géométrique

$$\forall x\in]-1,1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

4. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. En prenant la primitive (qui s'annule en 0) du développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^{-1}$, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

On en déduit également que

$$\forall x \in]-1,1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Exemple. 3.5.4 *(Exercice d'application 1)*
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
$f(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+3)! z^n$; $\quad f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$; $\quad f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$.

Exemple. 3.5.5 *(Exercice d'application 2)*
Soit f définie sur]-1,1[par

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. *Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.*
2. *Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)\, y' - xy = 1$.*
3. *Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.*

Exemple. 3.5.6 *(Exercice d'application 3)*
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif. On note f sa somme sur $]-R,R[$.

1. *Trouver des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les coefficients a_n pour que f satisfasse l'équation différentielle :*

$$x f''(x) + 2f'(x) + x f(x) = 0$$

2. *On suppose que ces conditions vérifiées. Déterminer les a_n lorsque $a_0 = 1$.*
3. *Quelle est la valeur de R ? Quelle est la fonction f obtenue ?*

Chapitre 4

Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. Elles ont été introduites par Joseph Fourier en 1822, même si leur étude systématique et approfondie n'a réellement démarré qu'avec l'apparition de l'intégrale de Lebesgue en 1902. Les séries de Fourier sont encore aujourd'hui l'objet de recherches actives pour elles-mêmes, et ont suscité plusieurs branches nouvelles telles que la théorie du signal et la théorie des ondelettes.

Dans ce chapitre, nous allons tenter de répondre aux questions suivantes :

– Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $2\pi-$périodique continue par morceaux, alors peut-on la décomposer sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$?

– Si f est une fonction 2π périodique, telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \to f(x)e^{-inx}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, et si on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

La série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inz}$ converge-t-elle simplement ou uniformément et si oui, sa somme est-elle égale à f ? On va voir que c'est le cas mais sous certaines conditions.

4.1 Séries trigonométriques

Définition 4.1.1 *On appelle* ***série trigonométrique*** *toute série de fonction* $\sum f_n(x)$ *(à termes réelles ou complexes) dont le terme général est de la forme*

$$f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

En convenant que $b_0 = 0$, et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

La série trigonométrique s'écrit aussi sous cette forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Cette dernière expression dite **forme exponnentielle**. Réciproquement une série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{inz}}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

si on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Proposition 4.1.1
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une famille de nombres complexes et notons*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{ et } \quad b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right).$$

- *Si les séries à termes positifs* $\sum |a_n|$ *et* $\Sigma |b_n|$ *sont convergentes, alors la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *est normalement (donc uniformément) convergente sur* $\mathbb{R}$.
- *Si les series à termes positifs* $\sum |c_n|$ *et* $\sum |c_{-n}|$ *sont convergentes, alors la série trigonométrique* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *est normalement (donc uniformément) convergente sur* $\mathbb{R}$.
- *Les series à termes positifs* $\sum |a_n|$ *et* $\sum |b_n|$ *sont convergentes si et seulement si les séries à termes positifs* $\sum |c_n|$ *et* $\sum |c_{-n}|$ *sont convergentes.*

4.2 Séries de Fourier

Définition 4.2.1 *Soit* f *une fonction* 2π*-périodique et localement intégrable, alors pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *la fonction* $x \to f(x)e^{-inx}$ *est intégrable sur* $[0, 2\pi]$ *et on peut alors poser*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \to f(x)\cos(nx)$ et $x \to f(x)\sin(nx)$ sont intégrables sur $[0, 2\pi]$, on peut donc poser ;

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

i) *Les coefficients $c_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier exponnentiels de f.*

ii) *Les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier trigonométriques de f.*

iii) *La série*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

*dont les coefficients $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $c_n(f)$ sont définies comme ci-dessus est appelée **série de Fourier de** f.*

Remarquons que l'on a toujours $b_0(f) = 0$. Bien qu'inutile au final, il est quand même pratique d'avoir cette définition de $b_0(f)$ pour harmoniser certains calculs ou certaines formules. Donnons maintenant quelques astuces pour calculer les coefficients de Fourier. Rappelons les faits suivants :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $T-$ périodique continue par morceaux. Alors :

– Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; on a

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \int_\alpha^{\alpha+T} \varphi(t)dt.$$

Autrement dit, tant que l'on calcule sur un intervalle d'intégration de longueur T, le résultat ne change pas.

– Si φ est une **fonction impaire**, alors

$$\int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}t = 0$$

– Si φ est une **fonction paire**, alors

$$\int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{T/2} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Ces résultats (faciles à démontrer) ont les conséquences suivantes :

(i) Dans les définitions de $a_n(f), b_n(f)$ ou $c_n(f)$, on peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle d'intégration $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ de longueur 2π.

(ii) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est **paire**, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$ pour tout $n \geq 0$

iii) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est **impaire**, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt$ pour tout $n \geq 0$.

Exemple. 4.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, l'unique fonction 2π-périodique définie par $f(t) = |t|$ si $t \in [-\pi, \pi[$. On remarque que cette fonction est paire. On a donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus, on a*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

Ainsi, on a

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\ \mathrm{d}t = \pi$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t$$

On *on a donc*

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{n^2\pi}[\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi}$$

Par conséquent, $a_{2m}(f) = 0$ pour tout $m \geq 1$, et $a_{2m+1}(f) = -\frac{4}{\pi(2m+1)^2}$ pour tout $m \geq 0$. Ainsi, on a

$$S(f)(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{\cos((2m+1)t)}{(2m+1)^2} \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Exemple. 4.2.2
Soit f une fonction 2π-périodique, impaire et telle que

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ \ x \in [0, \frac{\pi}{2}[; \\ \pi - x, & Si\ \ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Puisque f est impaire, on a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t\sin(nt)dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\sin(nt)dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t\sin(nt)dt + \int_0^{\pi/2} u\sin(n\pi - nu)du\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\int_0^{\pi/2} t\sin(nt)dt \end{aligned}$$

On en déduit que $b_{2p}(f) = 0$ pour tout $p \geq 1$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
b_{2p+1}(f) &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\sin((2p+1)t)dt \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos((2p+1)t)}{2p+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos((2p+1)t)}{2p+1}dt\right) \\
&= \frac{4}{\pi(2p+1)}\left[\frac{\sin((2p+1)t)}{2p+1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Finalement :

$$S(f)(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}sin((2p+1)t)dt \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.2.1 *(Formule de Parseval) Soit f une fonction 2π-périodique et intégrable, alors*

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$$

Exemple. 4.2.3 *Considérons la fonction f 2π-periodique definie par*

$$\forall x \in]-\pi,\pi], f(x) = x$$

alors f est intégrable et est impaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$; de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

En appliquant la formule de Parseval, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx = \frac{\pi^2}{6}$$

4.3 Théorèmes de convergence

Théorème 4.3.1 *(Théorème de Dirichlet)*
Soit f une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.
Donc la série de Fourier de f converge simplement vers f en tout point où f est continue.
En effet si f est continue en x alors $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ ce qui implique que $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$.

Exemple. 4.3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & si \;\; 0 \leq t < \pi \\ 1, & si \;\; \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

Cette fonction est 2π-périodique et est de classe C^1 par morceaux, donc le théorème de Dirichlet s'applique. On a donc la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$.
La fonction f est continue en tout point $t \in \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\}$, donc sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\}$, la série de fourier de f converge vers f. De plus, pour tout $t \in \pi\mathbb{Z}$, f est discontinue, alors la série de fourier de f converge simplement vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2}$.

Théorème 4.3.2 *(Théorème de la convergence normale) Soit f une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$; alors la série de Fourier de f converge normalement (et donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers f.*

Exemple. 4.3.2 *Reprenons l'exemple 4.2.2,*

$$f(x) = \begin{cases} x, & si \;\; x \in [0, \frac{\pi}{2}[; \\ \pi - x, & Si \;\; x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux, le théorème de la convergence normale assure que la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}$ vers f. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2} \sin((2p+1)t)$$

.

Chapitre 5

Calculs des résidus

5.1 Fonctions holomorphes

Par analogie avec le cas des fonctions réelles, on définit la dérivée d'une fonction complexe f de la variable complexe z.

Définition 5.1.1 *Soit D un domaine dans le plan complexe. Soit f une fonction de D dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$. La dérivée de f en z_0 est définie par*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pourvu que cette limite existe. Dans ce cas on dit que f est dérivable en z_0. On utilise souvent l'écriture analogue :

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Définition 5.1.2 *Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D, alors f est dite holomorphe dans D. Une fonction f est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.*

Exemple. 5.1.1 *La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.*

Définition 5.1.3 *Une fonction f est dite entière si elle est dérivable dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$.*

Exemple. 5.1.2 *Les polynômes $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$. Avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sont des fonctions entières.*

Théorème 5.1.1 *(Condition de Cauchy-Riemann)*
Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe dans D, alors les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ existent en tout point de D, et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Réciproquement, si les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ continues dans D, et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans D

Proposition 5.1.1 *Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$. Si $f = u + iv$ est holomorphe dans D, alors la dérivée de f est donnée par :*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}, \quad z \in D$$

Exemple. 5.1.3 *On considère la fonction définie par $f(z) = z^2$. On a $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, d'où $u(x,y) = x^2 - y^2$ et $v(x,y) = 2xy$. Alors*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C}$, et $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2z$.

Définition 5.1.4 *(points singuliers)*
*Tout point sur lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un **point singulier ou une singularité de** f.*
Il existe des types variés de singularités.
- *Singularités apparentes : le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de f si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe.*
- *Pôles : si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n. Si $n = 1, z_0$ est appelé un pôle simple.*
- *Singularités essentielles : une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.*

Exemple. 5.1.4

1. *Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ puisque $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.*

2. *$f(z) = \frac{3z-1}{(z-1)^2(z+4)}$ a un pôle double en $z = 1$ et un pôle simples en $z = -4$.*

3. *$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ a une singularité essentielle en $z = 1$.*

5.2 Théorèmes de résidus et applications

5.2.1 Théorèmes de résidus

Théorème 5.2.1 *(Equivalence entre holomorphie et analycité)*
Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. On prend

$$R = \sup\left\{r > 0 / C\left(z_0, r\right) \subset U\right\}.$$

Alors pour tout point $z \in C\left(z_0, R\right)$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n \text{ avec } \frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}} dz.$$

Remarque. 5.2.1
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ (U un ouvert), on a :
f holomorphe sur U ssi f est analytique sur U.

Définition 5.2.1
Soient $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes et $z_0 \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n$ s'appelle ***série de Laurent*** *de centre z_0 et de coefficients a_n*

Exemple. 5.2.1

- *Une série entière est une série de Laurent au point 0 .*
- *$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$ est une série de Laurent qui n'est pas entière.*

Théorème 5.2.2 *(Développement en série de Laurent)*
Toute fonction holomorphe sur une couronne $A\left(z_0, R_1, R_2\right)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne. Les coefficients de cette développement se calculent par la formule

$$a_n = \int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^n\left(z_0\right)}{n!}$$

$r \in]R_0, R_1[$.

Définition 5.2.2 *Soit z_0 un point singulier isolé de f, $D\left(z_0, r\right)$ un disque pointé ne contient pas de points singuliers de f, alors pour tout $z \in D\left(z_0, r\right)$, on a $f(z) = \sum_{n\geq 2} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \frac{b_1}{z-z_0} + \sum_{n\geq 0} a_n\left(z - z_0\right)^n$ le coefficient b_1 est appelé* ***le résidu de f au point*** *z_0 et on le note* ***Res*** *(f, z_0) et on a donc*

$$Res(f, z_0) = b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z) dz$$

ou γ est un chemin orienté positivement inclu dans $D(z_0, r)$ et entourant z_0.
Lorsque z_0 est un pôle d'ordre m pour f, le résidu peut aussi y être calculé par la formule

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

Exemple. 5.2.2

$$Res\left(\frac{\sin(z)}{z^3}, 0\right) = 0.$$

En effet

$$Res(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(2)!} \frac{d^2}{dz^2} \left((z)^3 .(\frac{\sin(z)}{z^3})\right) = \lim_{z\to 0} \frac{-1}{2} sin(z) = 0.$$

Proposition 5.2.1 *Soient f et g deux fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbb{U}$ et z_0 un point de U*
– *Si $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ avec $g(z_0) \neq 0$, alors $Res(f, z_0) = g(z_0)$*
– *Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $g(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de h, alors $Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$*

Exemple. 5.2.3 $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. *Le point $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ est un pôle simple, on prend $g(z) = z^2$ et $h(z) = 1 + z^4$.*

$$Res(f, z_0) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

5.2.2 Applications au calcul d'intégrales

Le calcul des résidus s'avère être un outil très puissant pour déterminer les valeurs d'un grand nombre d'intégrales, notamment les intégrales de Riemann impropres de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

L'idée principale, est d'étendre $f = f(z)$ au domaine complexe $z \in \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, puis de sélectionner une famille appropriée de contours γ_{R} paramétrés par $\mathrm{R} \to \infty$ de manière à ce que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{\gamma_{\mathrm{R}}} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Et grâce à un simple calcul ponctuel des résidus de f en ses singularités isolées dans l'intérieur du contour γ_{R}, le Théorème suivant donne la valeur de $\int_{\gamma_{\mathrm{R}}} f(z)dz$, souvent égale à une constante intéressante suivie d'une quantité qui tend vers 0 lorsque $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$.
Seule l'intuition géométrique permet de deviner quels contours γ_{R} choisir afin de récupérer ainsi la valeur désirée de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Ce sont les propriétés de décroissance de f à l'infini qui doivent servir de guide.

Théorème 5.2.3 *(Théorème des résidus)*
Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D à l'exception de singularités isolées. Soit γ un chemin fermé contenu ainsi que son interieur dans D, ne passant par aucune singularite de f et en contenant un nombre fini $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ dans son interieur, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\,(f, z_k)$$

Le chemin étant parcouru dans le sens positif.

Exemple. 5.2.4 – *Exemple 1 :*
Sans utiliser $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, *mais en appliquant le théorème des résidus, démontrons que :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

À cette fin, introduisons la fonction :

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

qui est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{-i, i\}$, avec deux pôles simples en $-i$ et en i.
Intégrons-la sur le contour consistant en le segment réel $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle C_{R}^{+}de rayon $\mathrm{R} > 1$ situé au-dessus de l'axe réel. Seule la singularité $z = i$ se trouve à l'intérieur de ce contour. Comme le résidu de f en $z = i$ vaut :

$$\lim_{z \to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$$

le Théorème ci-dessus donne :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{dx}{1+x^2}dx + \int_{C_{\mathrm{k}}^{+}} \frac{dz}{1+z^2} = 2i\pi \left(\frac{1}{2i}\right)$$

Mais en utilisant, pour $z \in C_{\mathrm{R}}^{+}$ quelconque :

$$\left|z^2+1\right| \geq |z|^2 + 1 = \mathrm{R}^2 + 1$$

nous pouvons majorer la deuxième intégrale :

$$\left|\int_{C_{\mathrm{k}}^{+}} \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \int_{C_{\mathrm{k}}^{+}} \frac{1}{|z^2+1|}|dz|$$
$$\leq \frac{1}{\mathrm{R}^2+1}\int_0^\pi \mathrm{R}d\theta$$

$$= \frac{\pi \mathrm{R}}{\mathrm{R}^2+1}$$

qui tend vers 0 *quand* $R \to +\infty$*. D'où la conclusion :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} + 0 = \pi.$$

– *Exemple 2 :*

Il s'agit de démontrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

avec $0 < a < 1$ *réel Pour établir cette formule, introduisons :*

$$f(z) := \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

et prenons comme contour un rectangle situé au-dessus de l'axe réel et de sommets $-\mathrm{R}, \mathrm{R}$, $\mathrm{R}+2i\pi, -\mathrm{R}+2i\pi$*. Le seul point à l'intérieur de ce rectangle en lequel le dénominateur* $1+e^z$ *de* $f(z)$ *s'annule est* $z = i\pi$*. Pour calculer le résidu de* f *en ce point* $i\pi$*, écrivons :*

$$(z-i\pi)f(z) = e^{az}\frac{z-i\pi}{e^z - e^{i\pi}}$$

et reconnaissons un quotient différentiel de $e^z = (e^z)'$ *en* $z = i\pi$ *:*

$$\lim_{t \to i\pi} e^{az}\frac{e^z - e^{i\pi}}{z-i\pi} = e^{ai\pi}e^{i\pi}$$

d'où :

$$Res(f, i\pi) = -e^{ai\pi}$$

Ainsi, le théorème des résidus offre :

$$\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)dx + \int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}+iy)idy - \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x+2i\pi)dx - \int_0^{2\pi} f(-\mathrm{R}+iy)idy = 2i\pi\left(-e^{ai\pi}\right)$$

Nous affirmons maintenant que les deux intégrales 2 et 4 tendent vers 0 quand $\mathrm{R} \longrightarrow \infty$*. En effet, pour l'intégrale 2 , dès que* $\mathrm{R} > 1$*, majorons :*

$$\left|\int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}+iy)idy\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{a(\mathrm{R}+iy)}}{e^{\mathrm{R}+iy}+1}\right| dy$$

$$\leq \frac{e^{a\mathrm{R}}}{e^{\mathrm{R}}-1}\int_0^{2\pi} dy$$

$$\sim 2\pi e^{-(1-a)\mathrm{R}}$$

qui tend vers 0 *lorsque* $R \to +\infty$ *puisque* $0 < a < 1$. *L'intégrale 4 se traite de la même manière. Enfin, par un calcul, l'intégrale 3 se ré-exprime comme un multiple de l'intégrale qui nous intéresse :*

$$-\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{a(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}}dx = -e^{2ai\pi}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx$$

et en faisant $\mathrm{R} \to \infty$, *on obtient :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx + 0 - e^{2ai\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx - 0 = -2i\pi e^{ai\pi}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}}dx &= -2i\pi\frac{e^{ai\pi}}{1-e^{2ai\pi}}\\ &= \frac{2i\pi}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}}\\ &= \frac{\pi}{\sin a\pi}.\end{aligned}$$

`Exercice 1:`

Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle I dans les cas suivants :

a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $\quad I = \mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \left(x + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^2$, $\quad I = \mathbb{R}_+$

c) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$, $\quad I = \mathbb{R}_+^*$

d) $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$ $\quad I = [0,1]$

`Exercice 2:` On considère la suite de fonctions $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle. La convergence est elle uniforme sur cet intervalle?.
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

`Exercice 3:` Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions : $f_n(x) = n^a x^n(1-x)$, $\;x \in [0,1]$, $\quad n > 0$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.
2. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).
3. Pour $a = 0$. Calculer sans intégration $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$

`Exercice 4:`

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

`Exercice 5:`

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0, \dfrac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1]$.

Exercice 6:

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par
$$f_n(x) = \frac{n\left(x^3+x\right)e^{-x}}{nx+1}$$
converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que l'on a la convergence uniforme sur tout intervalle $[\alpha,1]$ avec $\alpha\in]0,1[$. A-t-on la convergence uniforme sur $[0,1]$
3. Montrer que $|f_n(x)-f(x)|$ est bornée sur $[0,1]$.
4. Déduire des questions précédentes la nature de la suite
$$u_n = \int_0^1 \frac{n\left(x^3+x\right)e^{-x}}{nx+1}dx.$$

Exercice 1: Montrer que la série des fonctions $\sum f_n$ avec

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad (n \geq 1)$$

converge uniformément sur $[0,1]$, mais ne converge pas normalement sur ce segment.

Exercice 2: Soients $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$, et $\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1. Etudier la convergence simple sur $[0,+\infty[$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3:

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Justifier que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Établir que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et déterminer S'.

Exercice 4: Soients $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{\ln(x+n)}{n^2}$, $\quad (n \geq 1)$ et $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Etudier la convergence simple de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Montrer que S est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ et exprimer pour tout $x \in [0,+\infty[$, $S^{'}(x)$ et $S^{''}(x)$ sous forme de sommes de séries.
3. En déduire que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que S est concave sur $[0,+\infty[$.

Exercice 5: Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x}$

1. Étudier la convergence simple de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$. On note $S(x)$ sa somme.
2. Démontrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la monotonie de S sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
5. Justifier que S admet une limite en 0. Démontrer que, pour tout entier N, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0} S(x)$.

Exercice 1: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?.

Exercice 2: Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} n^n z^n; \qquad f_2(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n; \qquad f_3(z) = \sum_{n\geq 1} d(n) z^n;$$

$$f_4(z) = \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n; \quad f_5(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n} z^n; \quad f_6(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(z+1)^n}{n};$$

$$f_7(z) = \sum_{n\geq 1} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) z^n; \quad f_8(z) = \sum_{n\geq 0} z^{E(n^{3/2})}; \quad f_9(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}.$$

NB : $E(x)$ désigne la partie entière de x et $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.

Exercice 4:

Calculer le rayon de convergence et déterminer la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 - n + 4}{n+1} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

.

Exercice 5: (D'après PT 2008) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y' = xy + 1 \quad y(0) = 0.$$

Soit $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$.

1. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geqslant 1, a_{n+1}$ à a_{n-1}.
2. Pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, en déduire la valeur de a_{2p}. Déterminer R.
3. Exprimer, pour tout entier naturel $p \geqslant 0, a_{2p+1}$.
4. Quelle est la fonction F obtenue ?

Exercice 6: On considère la série complexe de somme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

Où les a_n sont définis par :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \text{ et } \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que $R \geq \dfrac{1}{4}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R$
$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$
3. En déduire la valeur de, R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 1:

Soit f une fonction 2π-périodique, impaire et vérifiant :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]0, \pi[; \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Calculer la série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
4. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2:

On définit une fonction $f, 2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in]-\pi, \pi[; \\ f(-\pi) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. A l'aide de l'égalité de Parseval, calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. On définit $g, 2\pi$-périodique, par par $g(x) = \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, 2\pi[$ et $g(0) = g(2\pi) = 0$. Déduire de la question (1) le développement en série de Fourier de g.

Exercice 3:

On définit une fonction $f, 2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|$.

1. Former le développement en série de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. Avec l'identité de Parseval, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

`Exercice 5:`

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et considérons la fonction 2π-périodique f définie pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ par $f(t) = \cos \alpha t$.

1. Montrer que f admet une série de Fourier convergente sur R. Préciser le type de convergence
2. Expliciter les coefficients de Fourier de f puis déterminer la série de Fourier associée à f.
3. Établir le développement eulérien

$$\forall u \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, \quad \operatorname{cotan} u = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}$$

`Exercice 6:` (Facultatif) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$