Université Moulay Ismaïl — A. U. 2018/2019
F. S. T. Errachidia — LST Maths Appl
Département de Mathématiques — Module M147

(3) Epreuve d'analyse 4 (Durée :2h)
18 Juin 2019 (Session normale)
Responsable : Pr. A. Mamouni

Exercice 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0,1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. *Etudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*
2. *Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Que peut-on déduire ?*
3. *Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1[$.*

<u>**Solution :**</u>

(1) La convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$:
Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Si $x \neq 0$, alors $x > 0$ et il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on obtient $f_n(x) = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. On conclut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

(2) Calculons $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$:
On a $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x(1-nx)dx = \frac{1}{6}$
Déduction
On a :

$$\frac{1}{6} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq 0 = \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))dx$$

On conclut que cette suite de fonctions converge simplement sur $[0,1]$ mais pas uniformément.

(3) Etudions la convergence uniforme sur $[a,1]$ pour $a \in]0,1[$:
On a $a > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on obtient $f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [a,1]$ ce qui entraîne que $\|f_n\|_\infty = 0$ CQFD.

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(5n)!}$. Pour cela, on introduit

$$S(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(5n)!}x^{5n}.$$

On note $l = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. *Calculer le rayon de convergence de la série entière suivante $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(5n)!}x^{5n}$.*
2. *Calculer $1 + l^k + l^{2k} + l^{3k} + l^{4k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.*
3. *Donner le développement en série entière de $e^x + e^{lx} + e^{l^2x} + e^{l^3x} + e^{l^4x}$.*
4. *Calculer $S(x)$.*
5. *En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(5n)!}$.*

Solution :

(1) Calculons le rayon de convergence de la série entière suivante $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(5n)!}x^{5n}$: En appliquant la régle de D'Alembert , on peut constater facilement que $R=+\infty$.

(2) Soit $k\in\mathbb{N}$, notre objectif est de calculer $L=1+l^k+l^{2k}+l^{3k}+l^{4k}$. Pour cela on a cinq cas possibles : $\begin{cases} Si\ k=5r, & \text{alors L=5}\,; \\ Si\ k=5r+1, & \text{alors L=0}\,; \\ Si\ k=5r+2, & \text{alors L=0}\,; \quad \text{où } r\in\mathbb{N} \\ Si\ k=5r+3, & \text{alors L=0}\,; \\ Si\ k=5r+4, & \text{alors L=0.} \end{cases}$

(3) On a :
$e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$
$e^{lx}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^nx^n$
$e^{l^2x}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^{2n}x^n$
$e^{l^3x}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^{3n}x^n$
$e^{l^4x}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^{4n}x^n$
D'où $e^x+e^{lx}+e^{l^2x}+e^{l^3x}+e^{l^4x}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^nx^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^{2n}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^{3n}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}l^{4n}x^n=5S(x)$.

(4) On en déduit que

$$S(x)=\frac{1}{5}(e^x+e^{lx}+e^{l^2x}+e^{l^3x}+e^{l^4x})$$

(5) On peut conclure facilement que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(5n)!}=S(1)=\frac{1}{5}(e+e^l+e^{l^2}+e^{l^3}+e^{l^4})$

Exercice 3

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie par : $f(x)=e^x$ pour tout $x\in]-\pi,\pi]$.

1. *Montrer que f admet une série de Fourier convergente.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f.*
3. *Etudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f.*
4. *Donner les valeurs des sommes suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\quad et\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

Solution :

(1) On a f est une fonction dérivable par morceaux et 2π-périodique, donc elle admet une série de Fourier convergente simplement (Théorème de Dirichlet).

(2) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos(nx)dx=\frac{(-1)^n}{\pi}(e^\pi-e^{-\pi})+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin(nx)dx=\frac{(-1)^n}{\pi}(e^\pi-e^{-\pi})-n^2a_n$ il s'ensuit que $(n^2+1)a_n=\frac{(-1)^n}{\pi}(e^\pi-e^{-\pi})$ puis on conclut que $a_n=\frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}(e^\pi-e^{-\pi})$ et $a_0=\frac{e^\pi-e^{-\pi}}{\pi}$.
$b_0=0$ par convention
$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin(nx)dx=-na_n=\frac{(-1)^{n+1}n}{\pi(n^2+1)}(e^\pi-e^{-\pi})$

(3) Si la série de Fourier converge uniformément, alors sa somme est continue sur $\mathbb{R}$. Or sa somme n'est pas continue au point $x_0=-\pi$. Donc elle ne converge pas uniformément.

(4) On a f dérivable par morceaux, donc $SF(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ coverge vers la moyenne et coincide avec f en tout point en les queles f est continue.

On applique le Théorème de Dirichlet au point $x = \pi$, donc $\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = SF(f)(\pi) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi} - e^{-\pi})$ On conclut que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{2(e^{\pi}-e^{-\pi})} - \frac{1}{2}$$

On sait que $SF(f)$ coînside avec f en tout point où f est continue et puisque f est continue au point $x = 0$, on obtient $1 = f(0) = SF(f)(0) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\pi(n^2+1)}(e^{\pi} - e^{-\pi})$. On en déduit alors $1 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1})$ D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+1}) = \frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$.

Exercice 4

Soit $R \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0, 1, 2\}$ et soit $C = \{z \in \mathbb{C}/|z| = R\}$ orienté dans le sens positif. Selon les valeurs de R, calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^3 - z^2 + 4z - 4} dz.$$

Solution : Considérons la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-z^2+4z-4}$.
On a : $z^3 - z^2 + 4z - 4 = z^2(z-1) + 4(z-1) = (z-1)(z^2+4) = (z-1)(z+2i)(z-2i)$, donc les pôles de la fonction f sont $\{2i, -2i, 1\}$. On peut constater facilement que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ à l'exceptiopn de ses trois pôles qui sont des singularités isolantes. Le Théorèmes des résidus est applicable. On a aussi :

$Res(f, -2i) = \frac{6+3i}{20}$
$Res(f, 2i) = \frac{6-3i}{20}$
$Res(f, 1) = \frac{2}{5}$

- Si $R < 1$, on obtient $\int_C \frac{z^2+3}{z^3+z^2+z+1} dz = 0$.
- Si $1 < R < 2$, on obtient $\int_C \frac{z^2+3}{z^3+z^2+z+1} dz = 2\pi i Res(f, 1) = \frac{4\pi i}{5}$
- Si $R > 2$, on obtient $\int_C \frac{z^2+3}{z^3+z^2+z+1} dz = 2\pi i(Res(f, 2i) + Res(f, -2i) + Res(f, 1)) = 2\pi i$