

(2) Epreuve d'analyse 4 (Durée :1h30)
09 Juillet 2019
Responsable : Pr. A. Mamouni

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{\sqrt{n^3+n^2+5n}} x^n \quad (2) \sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{E(n\sqrt{3})} x^n$$

Solution :

(1) Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{\sqrt{n^3+n^2+5n}} x^n$. Prenons $a_n = \pi^{\sqrt{n^3+n^2+5n}}$ et appliquons la règle de Cauchy on obtient, $\sqrt[n]{a_n} = \pi^{\sqrt{\frac{n^3+n^2+5n}{n^2}}}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$, d'où $R = 0$.

(2) Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \pi^{E(n\sqrt{3})} x^n$. Prenons $a_n = \pi^{E(n\sqrt{3})}$, appliquons la règle de Cauchy. Pour se faire on doit calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Tout d'abord on sait que $n\sqrt{3} - 1 \leq E(n\sqrt{3}) \leq n\sqrt{3}$ ce qui implique $\frac{n\sqrt{3}-1}{n} \leq \frac{E(n\sqrt{3})}{n} \leq \sqrt{3}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \pi^{\sqrt{3}}$ ainsi que $R = \pi^{-\sqrt{3}}$.

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\|f_n\|_\infty$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $[0, 1]$?
4. Soit $\eta \in]0, 1[$, montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[\eta, 1]$.

Solution :

(1) Etudions la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

Si $x \neq 0$, alors $\frac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{nx}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx} = 0$. On conclut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

(2) Calculons $\|f_n\|_\infty$: On a f_n est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ donc $|f_n|$ atteint sa borne supérieure en un point x_0^n et vérifie $f'_n(x_0^n) = 0$. Un calcul simple donne $\|f_n\|_\infty = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{n}}$.

(3) La convergence n'est pas uniforme, sinon la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers sa limite simple qui est la fonction nulle. On obtient donc $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - 0\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{n}} = +\infty$, contradiction. D'où la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniforme.

(4) Montrons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[\eta, 1]$. Tout d'abord $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[\eta, 1]$ vers la fonction nulle et on a de plus

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \sup_{[\eta, 1]} f_n(x) \leq \frac{2^n}{1 + n2^n \eta^2} \leq \frac{1}{n\eta^2}$$

On peut conclure facilement par passage à la limite.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique impaire et définie par : $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]0, \pi]$.

1. Montrer que f admet une série de Fourier convergente.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f .
3. Etudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f .

Solution :

(1) On a f est une fonction dérivable par morceaux et 2π -périodique donc d'après Théorème de Dirichlet elle admet une série de Fourier convergeant simplement.

(2) On a f est une fonction impaire, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_0 = 0$ par convention.

Soit $n \geq 1$, alors

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} I_n \text{ où } I_n = \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx.$$

Calculons I_n

On a :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^x \sin(nx) dx = [e^x \sin(nx)]_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) dx = -n[e^x \cos(nx)]_0^{\pi} - n^2 I_n \text{ d'où } I_n = \frac{n\pi}{2(n^2+1)}(1 - (-1)^n e^{\pi})$$

(3) On a f impaire donc $f(0) = 0$. Si la série de Fourier associée à la fonction f converge uniformément alors elle est continue et par passage à la limite en $x_0 = 0$ on trouve une contradiction. Conclusion la série de Fourier de la fonction f ne converge pas uniformément.

Exercice 4

Soit $R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ et soit $C = \{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$ un chemin fermé orienté dans le sens positif. Selon les valeurs de R , calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{z^2 + 3}{z^3 + z^2 + z + 1} dz.$$

Solution : Considérons la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z^2+3}{z^3+z^2+z+1}$.

On a $z^3 + z^2 + z + 1 = z^2(z+1) + (z+1) = (z+1)(z^2+1) = (z+1)(z+i)(z-i)$, donc les pôles de la fonction f sont $\{i, -i, -1\}$. On peut constater facilement que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ à l'exception de ses trois pôles qui sont des singularités isolantes. Le Théorème des résidus est applicable. on a aussi :

$$\text{Res}(f, -i) = -\frac{1-i}{2}$$

$$\text{Res}(f, i) = -\frac{1+i}{2}$$

$$\text{Res}(f, -1) = 2$$

Si $R < 1$, on obtient $\int_C \frac{z^2+3}{z^3+z^2+z+1} dz = 0$ (car le chemin ne contient aucun pôle).

Si $R > 1$, on obtient (dans ce cas le chemin contient les trois pôles)

$$\int_C \frac{z^2+3}{z^3+z^2+z+1} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) + \text{Res}(f, -1)) = 2\pi i$$