Université Moulay Ismaïl | A. U. 2019/2020
F. S. T. Errachidia | LST Maths Appl
Département de Mathématiques | Module M147

Epreuve d'analyse 4 (Durée :2h)
08 Janvier 2020
Responsable : Pr. A. Mamouni

Exercice 1
Pour $n \geq 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

1. *Démontrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.*
2. *Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.*
3. *Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.*
4. *La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?*

Solution :

(1) Soit $x \geq 0$ fixé. Alors $n^2 f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n f_n(x)$ est convergente.

(2) On va calculer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$. On remarque d'abord que f_n est une fonction positive. De plus, elle est dérivable et sa dérivée vaut
$$f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$
On en déduit que f_n est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{2}{\sqrt{n}}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty[$. On a donc
$$\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{2}{\sqrt{n}}) = 4e^{-2},$$
qui ne tend pas vers 0, et donc on a pas la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$.

(3) Pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on obtient $a \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $x \geq a$, on a
$$f_n(x) \leq f_n(a).$$
Or $f_n(a)$ est le terme général d'une série convergente, et il ne depend plus de x, ceci entraine la convergence normale de notre série.

(4) On a
$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \geq f_{n+1}(x) > 0.$$
D'après le résultat de la question 2.,
$$\|R_n\|_\infty \geq \|f_{n+1}\|_\infty = 4e^{-2}.$$
Ceci ne tend pas vers 0 et donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2
Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{(-1)^n n!} x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{5^n} x^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1+b^n} x^n$ *(avec $a > 0$ et $b > 1$)*

Solution :

(1) Par appliquation de la régle D'Alembert, on trouve $R = +\infty$.

(2) De la même manière on trouve que $R = +\infty$.

(3) De la même manière on trouve que $R = 5$.

(4) On applique la régle D'Alembert et le Théorème de l'équivalence on trouve $R = \frac{b}{a}$.

Exercice 3

1. *Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \cos(5x)$.*
2. *En utilisant le théorème de Parseval. Prouver que deux fonctions continues 2π-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.*
3. *Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.*
4. *En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$*

Solution :

(1) On a f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f admet une série de Fourier qui converge normalement vers la fonction f. Donc

$$\cos(5x) = SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

et par identification des séries, on constate que $a_5 = 1$ et les autres coefficients sont nuls.

(2) Soient f et g deux fonctions continues 2π-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier et posons $h = f - g$, alors h est une fonction continue 2π-périodique ses coefficients de Fourier sont nuls. D'après le cours on conclut que h est nulle càd $f = g$.

(3) La fonction f est paire donc $b_n = 0$ pour tout n.
On a

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

et pour $n \geq 1$ un calcul simple en utilisant une double intégration par partie on obtient

$$a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

D'où la série de Fourier

$$SF(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}.$$

(4) Déduction

On constate que $SF(f)$ converge normalement puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc on a

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

On a aussi
$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
D'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'après le Théorème de parceval
$$\frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5}\pi^4.$$
D'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 4
Calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx.$$

<u>Solution :</u>

Soit $J = \int_{C^+} \frac{1}{z^6+1} dz$ où C^+ est le chemin orienté dans le sens positif composé de $[-R, R]$ et le demi cercle supérieur Γ de centre zéro et de rayon R (avec $R > 1$). Considérons la fonction complexe définie par
$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$
Alors les pôles de f qui sont à l'intereir du chemin C^+ sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$, i et $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ qui sont tous simples.
Le théorème des résidus donne
$J = 2\pi i(Res(f, e^{i\frac{\pi}{6}}) + Res(f, i) + Res(f, e^{i\frac{5\pi}{6}}))$.
Or on a :
$Res(f, e^{i\frac{\pi}{6}}) = \frac{e^{\frac{-5i\pi}{6}}}{6}$, $Res(f, i) = \frac{-i}{6}$ et $Res(f, e^{i\frac{5\pi}{6}}) = \frac{e^{\frac{-i\pi}{6}}}{6}$.
D'où $J = \frac{2\pi}{3}$.
On a aussi $\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ ce qui donne
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx = \frac{J}{2} = \frac{\pi}{3}.$$