Table des matières

Chapitre 1

Examen normal de Topologie ; 2015-2016

Le 08-02-2016.

Examen de Toplogie(durée :3h).

Exercice 1.1 *1. Montrer que tout espace métrique est un espace topologique séparé.*

2. Montrer que dans un espace topolgique sépré, tout ensemble fini est fermé.

3. Montrer que dans un espace discrèt, toute partie est ouverte et fermée.

4. Soit F une partie d'un espace métrique E, montrer que si F est complet alors F est fermée dans E.

Solution :

1. Soient $x, y \in (E, d)$ tq $x \neq y$, donc $d(x, y) = \alpha > 0$, alors $B(x, \frac{\alpha}{3}) \cap B(y, \frac{\alpha}{3}) = \varnothing$ donc (E, d) est un espace séparé.
2. Dans un premier temps, nous allons montrer que tout singleton est un fermé. Soit $\{a\} \subset E$, montrons que $\{a\}$ est un fermé, il suffit de montrer que $\{a\}^c$ est un ouvert càd que $\{a\}^c$ est un voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in \{a\}^c$, càd $x \neq a$, alors il existe O ouvert tq $O \in V(x)$ et un voisinage $v \in V(a)$ tq $O \cap v = \varnothing$, par suite $O \subset v^c$ et donc $O \subset v^c \subset \{a\}^c$, ce qui montre que $\{a\}^c$ est un voisinage de chacun de ses points, d'où le résultat. D'autre part pour
$$A = \{a_1, a_2, , , a_n\} = \cup\{a_i\}, 1 \leq i \leq n,$$
et la réunion de fermé est un fermé.

3. Soit (E, d) un espace discrèt càd $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon. Soit A une partie de E, si $A = \varnothing$ c'est terminé. Si $A \neq \varnothing$, alors il existe $x \in A$, pour $\varepsilon < 1$ on a : $B(x, \varepsilon) = \{x\} \subset A$, d'où A est un fermé. Même raisonnement si on remplace A par A^c.
4. Soit F un espace complet, montrons qu'il est fermé. Soit $x \in \overline{F}$, donc il existe une suite (x_n) d'élément de F tq $x_n \to x$, donc (x_n) est une suite de Cauchy dans E et puisque E est complet, alors $x_n \to a \in F$ et puisque (E, d) est séparé alors $x = a \in F$, d'où le résultat.

Exercice 1.2 *Soient a et b deux réels, vérifiants* $0 < a < b$ *et* $E = [a, b]$. *Sur* E *on considère les distances* $d(x, y) = |x - y|$ *et* $D(x, y) = |\ln(x) - \ln(y)|$.

1. *Les distances d et D sont-elles métriquement équivalentes ? sont-elles toplogiquement équivalentes ?*
2. *les espaces* (E, d) *et* (E, D) *sont-ils complets ?*

Solution :

1. Montrons que d et D sont métriquement équivalentes. considérons la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto f(x) = \ln(x)$, on a : f dérivable sur $[a, b]$, par le T.A.F, il existe $c \in]a, b[$ tq : $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ par suite $\frac{d(x,y)}{b} \leq D(x, y) \leq \frac{d(x,y)}{a}$ ce qui montre que d et D sont métriquement équivalentes. Du fait que d et D sont métriquement équivalentes alors elles sont topologiquement équivalentes.
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $[a, b]$, alors (x_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ qui est complet ce qui montre qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tq $x_n \to x$, d'autre part on a : $a \leq x_n \leq b$ passons donc à la limite on obtient : $a \leq x \leq b$ et donc $([a, b], d)$ est complet et du fait que d et D sont métriquement équivalentes alors $x \to^D x$, conclusion $[a, b], D)$ est complet.

Problème 1.3 *(12 points)*
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. *On désigne par :*
$B'(0, 1) = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$, *la boule unitée fermée de centre* 0 *et de rayon* 1.
Soit $F \subset E$ *un sous espace vectoriel fermé de* E. *Pour* $x \in E$, *on pose :* $d(x, F) = \inf_{y \in F} ||x - y||$.

1. *Montrer que* $\forall x \in E$, *on a :* $0 \leq d(x, F) \leq ||x||$.
2. *Montrer que* $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

3. (a) *Montrer que* $\forall x, x' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in F$ *on a :*

$$d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F),$$

$$d(x - y, F) = d(x, F),$$

   (b) *Montrer que l'application* $x \mapsto d(x, F)$ *est uniformément continue dans* E.

4. (a) *Soit* $x \in B'(0, 1)$. *On pose* $\alpha = d(x, F)$ *et on suppose que* $\alpha > 0$, *soit de plus* $\varepsilon > 0$. *Montrer qu'il existe* $y \in F$ *tel que :* $\alpha \leq ||x - y|| < \alpha(1 + \varepsilon)$.

   (b) *Soit* $x' = \dfrac{x - y}{||x - y||}$, *montrer que* $d(x', F) > \dfrac{1}{1 + \varepsilon}$.

5. *Montrer que si* $F \neq E$, *alors* $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x, F) = 1$.

6. *Montrer que si* $F \neq E$ *et* E *est de dimension finie, alors il existe* $x_0 \in B'(0, 1)$ *tel que* $d(x_0, F) = 1$.

Solution :

1. On sait que $0 \leq d(x, F) \leq ||x - y||$, pour tout $y \in F$. Puisque F est un sous espace vectoriel de E, alors $0_E = 0_F = 0 \in F$ et donc
$0 \leq d(x, F) \leq ||x - 0|| = ||x||$, d'où le résultat.

2. On sait que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F$ (F est un fermé), donc

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

3. (a) • pour $\lambda = 0$, nous avons : $\lambda x = 0$ et donc $d(\lambda x, F) = 0$, car $0 \in F$ d'autre part, $\inf\limits_{y \in F} ||0 - y|| = 0$, d'où le résultat.
Si $\lambda \neq 0$, alors $d(\lambda x, F) = \inf\limits_{y \in F} ||\lambda x - y|| = \inf\limits_{\frac{y}{\lambda} \in F} \in ||\lambda(x - \frac{y}{\lambda})||$,
posons : $\frac{y}{\lambda} = t \in F$($F$ est un sous espace vectoriel), nous obtenons donc $d(\lambda x, F) = \inf\limits_{t \in F} ||x - t|| = d(x, F)$.
• Nous avons : $d(x - y, F) = \inf\limits_{z \in F} ||x - y - z|| = \inf\limits_{y+z \in F} ||x - (y + z)||$,
posons : $y + z = t \in F$ (F s.e.v),
par suite $d(x - y, F) = \inf\limits_{t \in F} ||x - t|| = d(x, F)$.
(b) Considèrons l'application $f : E \to \mathbb{R}$ tq, $f(x) = d(x, F)$, nous avons : $|f(x) - f(y)| \leq ||x - y||$, ce qui montre que f est uniformément continue sur E.

4. (a) Soit $x \in B'(0,1)$ et $d(x,F) = \alpha > 0$. Nous avons : $\alpha = \inf_{t \in F} ||x - t||$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tq :

$$\alpha \leq ||x - y|| < \alpha + \alpha\varepsilon = \alpha(1 + \varepsilon).$$

   (b) Pour $x' = \frac{x-y}{||x-y||}$, d'aprés les questions précédentes, nous avons :

$$d(x', F) = \frac{d(x,F)}{||x-y||} = \frac{\alpha}{||x-y||} > \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

5. On a : $F \neq E$, alors il existe $x_0 \in E$ non nul, tq $x_0 \in E$ et $x_0 \notin F$, et par suite posons : $x = \frac{x_0}{||x_0||} \in B'(0,1)$ et nous posons : $d(x,F) = \alpha > 0$. On sait que $1 \geq d(x,F) > \frac{1}{1+\varepsilon}$ pour tout $x \in B'(0,1)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, maintenant passons à la borne supérieure, nous obtenons $1 \geq \sup_{x \in B'(0,1)} d(x,F) \geq 1$ d'où $\sup_{x \in B'(0,1)} d(x,F) = 1$.
6. Puisque E est de dimension finie suite à la question précédente, alors $\sup_{x \in B'(0,1)} d(x,F) = 1$ et dans ce cas la boule $B'(0,1)$ est compact donc la borne supérieure est atteinte càd il existe $x_0 \in B'(0,1)$ vérifiant $d(x_0, F) = 1$.

Chapitre 2

Rattrapage normal de Topologie 2015-2016

Exercice 2.1 *Une ultra-distance sur un ensemble E est une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfaisant aux premier et deuxième axiomes des distances le troisième étant remplacé par : $\forall x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq \sup[d(x, z), d(z, y)]$.*

1. *Montrer que d est une distance sur E. L'espace (E, d) est dit ultramétrique.*
2. *Montrer que dans un espace ultramétrique (E, d) si $d(x, z) \neq d(z, y)$, alors $d(x, y) = \sup[d(x, z), d(z, y)]$*
3. *Montrer que toute boule ouverte $B(x, r)$ dans un espace ultramétrique (E, d) est un ensemble ouvert et fermé.*
4. *Montrer que pour tout $y \in B(x, r)$, on a : $B(y, r) = B(x, r)$.*
5. *Montrer que toute boule fermée $B'(x, r)$ est un ensemble ouvert et fermé.*
6. *Montrer que pour tout $y \in B'(x, r)$, on a : $B'(y, r) = B'(x, r)$.*

Solution :

1. Puisque d vérifie les premiers aximes, alors pour affirmer que d est une distance sur E, il reste à montrer la trosième propriété, c'est l'inégalité triangulaire. Soient x, y et z des éléments de E, montrons que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Nous avons $d(x, z) \leq \sup[d(x, y), d(y, z)]$ et donc $d(x, z) \leq \sup[d(x, y), d(y, z)] \leq \sup[d(x, y), d(y, z)] + \inf[d(x, y), d(y, z)] = d(x, y) + d(y, z)$, d'où d est une distance sur E.
2. Montrons que si $d(x, y) \neq d(y, z)$, alors $d(x, z) = \sup[d(x, y), d(y, z)]$. Si $d(x, y) < d(y, z)$, on sait que $d(x, z) \leq d(y, z)$ reste à montrer que

$d(y,z) \leq d(x,z)$. Nous avons $d(y,z) \leq \sup[d(y,x), d(x,z)] = d(x,z)$, par suite $d(x,z) = d(y,z)$. Même démonstrastion si $d(y,z) < d(x,y)$.

3. On sait que toute boule ouverte est un ouvert reste à montrer que cette boule ouverte est fermée. Soit $B(x,r)$ la boule ouverte, montrons qu'elle est fermée càd que son complémentaire est un ouvert. Soit $y \in B(x,r)^c$ càd $d(x,y) \geq r$, existe-t-il $\varepsilon > 0$ sachant que $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)^c$? pour $0 < \varepsilon < r$, nous avons $d(x,t) \leq \sup[d(x,y), d(y,t)] = d(x,t)$ pour tout $t \in B(y,\varepsilon)$ ce qui montre que $d(x,t) = d(x,y) \geq r$ pour tout $t \in B(y,\varepsilon)$ ce qui prouve que $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)^c$ d'où le résultat.
4. Soit $y \in B(x,r)$, montrons que $B(x,r) = B(y,r)$. Soit $t \in B(y,r)$ cela veut dire que $d(y,t) < r$, montrons que $d(x,t) < r$, on sait que $d(x,t) \leq \max[d(x,y), d(y,t)]$, du fait que $d(x,y) < r$, alors $d(x,t) \leq d(x,y)$ ou $d(x,t) \leq d(y,t)$ et donc $d(x,t) < r$ cela montre que $t \in B(x,r)$ et par suite $B(y,r) \subset B(x,r)$, de la même façon on montre que $B(x,r) \subset B(y,r)$ d'où le résultat.
5. Montrons que $B'(x,r)$ est ouverte et fermée. Soit $y \in B'(x,r)$, càd $d(x,y) \leq r$. existe-t-il $\varepsilon > 0$ tq $B(y,\varepsilon) \subset B'(x,r)$, il suffit de choisir $0 < \varepsilon < r$.
6. Soit $y \in B'(x,r)$, montrons que $B'(x,r) = B'(y,r)$. On sait que $d(x,y) \leq r$ et soit $t \in B'(y,r)$, alors $d(y,t) \leq r$, montrons que $d(x,t) \leq r$. Nous avons $d(x,t) \leq \max[d(x,y), d(y,t)] \leq r$ d'où le résultat, la réciproque est la même

Exercice 2.2 *Soient E , F deux $\mathbb{R}$ e.v.n et $f : E \to F$ une application vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in E$. De plus f est bornée sur la boule unitée fermée.*

1. *Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $f(rx) = rf(x)$.*
2. *Montrer que f est continue en 0.*
3. *Montrer que f est continue sur E.*
4. *Déduire que f est linéaire.*
5. *Soit $u : E \to F$, une application linéaire. Montrer que u est continue ssi, pour toute suite (x_n) de points de E, vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $u(x_n)$ est bornée.*

Solution :

1. On a : $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, $f(x+x) = 2f(x)$. Soit $f(nx) = nf(x)$, montrons que $f((n+1)x) = (n+1)f(x)$, nous avons $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$.

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $f(nx) = nf(x)$. Pour $y = -x$ ce qui implique que $f(x-x) = f(x)+f(-x) = 0$, alors $f(-x) = -f(x)$. Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, $-n \in \mathbb{N}$, donc $f(-nx) = -nf(x)$, par suite $-f(nx) = -nf(x)$ ce qui donne $f(nx) = nf(x)$. Maintenant soit $r = \frac{1}{q}$ où $q \in \mathbb{Z}^*$, nous avons $f(x) = f(q\frac{x}{q}) = qf(\frac{x}{q})$ ce qui donne $\frac{1}{q}f(x) = f(\frac{x}{q})$. Pour $r = \frac{p}{q}$, alors $f(rx) = f(x\frac{p}{q}) = pf(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}f(x)$ càd $f(rx) = rf(x)$.

2. Montrons que f est continue en 0. On sait que f est bornée sur la boule unité fermée càd il existe $M > 0$ tq $||x|| \leq 1 \Rightarrow ||f(x)|| \leq M$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $||nx|| \leq 1 \Rightarrow ||f(nx)|| \leq M$, donc $||x|| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow ||f(x)|| \leq \frac{M}{n}$. D'autre part pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tq : $\frac{M}{n_0} < \varepsilon$, alors pour $\alpha = \frac{1}{n_0}$, nous avons : $||x|| \leq \frac{1}{n_0} \Rightarrow ||f(x)|| \leq \frac{M}{n_0} < \varepsilon$ donc f est continue en 0.

3. Soit $x_0 \in E$. Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Nous avons :
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0$.

4. *Déduction :* Il suffit de montrer que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite (α_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ tq $\alpha_n \to \alpha$. On sait que $f(\alpha_n x) = \alpha_n f(x)$ pour tout $x \in E$, passons donc à la limite nous obtenons $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, d'où le résultat.

5. Soit u une fonction continue et la suite (x_n) tq $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, du fait que u est continue, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u(x_n) = u(\lim\limits_{n \to \infty} (x_n)) = 0$, par suite $u(x_n)$ est bornée. Réciproquement on sait que u est linéare, pour montrer qu'elle est continue il suffit de montrer qu'elle est bornée sur la boule $B_f(0,1)$. Supposons que u est non bornée sur $B_f(0,1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tq $||x_n|| \leq 1$ et $||u(x_n)|| \geq n$ donc $||\frac{x_n}{\sqrt{n}}|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $||u(\frac{x_n}{\sqrt{n}})|| \geq \sqrt{n}$ par suite $\frac{x_n}{\sqrt{n}} \to 0$ et $u(\frac{x_n}{\sqrt{n}})$ est non bornée, donc il y a une contradiction, par suite u est bornée sur $B_f(0,1)$.

Chapitre 3

Examen normal de Topologie ; 2016-2017

Exercice 3.1 *1. Montrer que dans un e.t separé, tout singleton est fermé et déduire que tout ensemble fini est fermé.*

2. Montrer que dans un espace topologique compact, tout point admet un système fondamental de voisinage.

Solution

1. Soit $\{a\} \subset E$ un e.t séparé, montrons que $\{a\}$ est femé dans E, càd $\complement^{\{a\}}$ est un ouvert, pour cela il suffit de montrer que $\complement^{\{a\}}$ est un voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in \complement^{\{a\}}$, ce qui implique que $x \neq a$, donc il existe O un ouvert contenant x et V un voisinage de a de façon que $O \cap V = \varnothing$, par suite $O \subset \complement^{V} \subset \complement^{\{a\}}$ ce qui montre que $x \in O \subset \complement^{\{a\}}$, alors $\complement^{\{a\}}$ est un voisinage de x d'où le résultat.
   Déduction : Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\} = \cup\{a_i\}$ où $1 \leq i \leq n$, on a A est l'union fini fe fermé donc est un fermé.
2. Soit $x \in E$ et $v \in V(x)$, comme E est compact alors E est séparé, donc $\cap W = \{x\}$ sachant que W sont les voisinages fermés de x. D'autre part comme $v \in V(x)$, alors il existe un ouvert O tq $x \in O \subset v$. Posons $K = \complement^{O}$, alors K est compact (K un fermé dans un compact E) et on a : $x \notin K$, donc $(\cap W) \cap K = \varnothing = \cap(W \cap K)$, par suite $\{x\} \cap K = \varnothing$, puisque K est compact et que $W \cap K$ est fermé dans K donc il existe $W_1, W_2, ..., W_n$ des voisinages fermés de x vérifiants $\cap(W_i \cap K) = \varnothing = (\cap W_i) \cap K$, ce montre que $(\cap W_i) \subset \complement^{K} = O \subset v$ par suite pour $w = (\cap W_i)$ $1 \leq i \leq n$ est un voisinage de x, par suite w est un fermé de x contenu dans v d'où le résultat.

Exercice 3.2 *Soient (E, d) un e.m et $A \subset E$.*

1. *Montrer que si toute suite de Cauchy de points de A converge dans E, alors $\overline{A}$ est complet.*
2. *On suppose que (E, d) est complet et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E, vérifiant $d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1}{2^n}$, montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.*
3. *Montrer que si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans E, alors il existe une sous suite $x_{\varphi(n)}$ vérifiant $d(x_{\varphi(n+1)}, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{2^n}$*

Solution

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\overline{A}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $x_n \in \overline{A}$, par suite il existe $y_n \in A$ tq : $d(x_n, y_n) < \frac{1}{2^n}$. Montrons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On a : $d(y_{n+p}, y_n) \leq d(y_{n+p}, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x_n) + d(x_n, y_n)$, par suite $d(y_{n+p}, y_n) \leq \frac{1}{2^{n+p}} + d(x_{n+p}, x_n) + \frac{1}{2^n}$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(y_{n+p}, y_n) = 0$ et donc (y_n) est Cauchy dans A. Alors cette suite converge vers $a \in \overline{A}$, par suite $d(x_n, a) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, a) \leq \frac{1}{2^n} + d(x_n, y_n)$ ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, a) = 0$ et donc $a \in \overline{A}$ cela prouve que (x_n) converge dans $\overline{A}$. Conclusion $\overline{A}$ est complet.
2. On a : $d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{1}{2^n}$, par suite
$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + + + d(x_{n+1}, x_n)$$
donc
$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + + + \frac{1}{2^{n+p-1}}$$
càd
$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$
ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{n+p}, x_n) = 0$ et donc (x_n) est de Cauchy dans E qui est complet, alors (x_n) est convergente.
3. On a : (x_n) est de Cauchy dans E, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists n_1 \in \mathbb{N}; n \geq n_1$ on a : $d(x_{n_1}, x_n) < \frac{1}{2}$. de même pour $\varepsilon = \frac{1}{2^2}, \exists n_2 \in \mathbb{N}; n_2 > n_1; \forall n \geq n_2, d(x_{n_2}, x_n) \leq \frac{1}{2^2}$, ainsi de suite pour $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $\exists n_k > n_{k-1}; n \geq n_k, d(x_{n_k}, x_n) \leq \frac{1}{2^k}$ et on a ; $d(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de façon que $k \mapsto \varphi(k) = n_k$ on a : φ est strictement croissante et vérifie $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)})) \leq \frac{1}{2^n}$, d'où le résultat.

Exercice 3.3 *Soient E un ensemble infini, $\mathcal{O}$ la famille de parties de E formée par la partie vide $\varnothing$ et par toute les parties A de E dont le complémentaire $\complement^A$ est une partie finie ou dénombrable.*

1. *Montrer qu'il existe une topologie sur E pour laquelle $\mathcal{O}$ est la famille des ouverts. Dans ce qui suit, E est muni de cette topologie.*
2. *Montrer que dans E, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente si et seulement si elle est stationnaire.*
3. *Montrer que l'application identique de $\mathbb{R}$ muni de la topologie définie à la question 1 vers $\mathbb{R}$ muni de la sa topologie usuelle n'est continue en aucun point.*
4. *Soit $f : X \to Y$ une application d'un espace topologique X dans un autre espace topologique Y. On dit que f est séquentiellement continue en un point $a \in X$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X converge vers a, la suite $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Montrer que si f est continue en a, elle est séquentiellement continue en a.*

Solution :

1. Par définition, $\varnothing \in \mathcal{O}$. Comme le complémentaire de E est $\varnothing$ qui est fini, $E \in \mathcal{O}$. Soient U_1, U_2, U_i avec $i \in I$ ensemble d'indices non vides des éléments de $\mathcal{O}$. On voit que $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$ est fini ou dénombrable, puisque c'est la réunion de deux ensembles finis ou dénombrables, donc $(U_1 \cap U_2) \in \mathcal{O}$. De même $(\cup U_i)^c = \cap U_i^c$ est fini ou dénombrable puisqu'il est contenu dans l'un qlq des U_i^c, lui même est fini ou dénombrable. Donc $\cup U_i \in \mathcal{O}$. La famille $\mathcal{O}$ qui vérifie les axiomes des ouverts est bien la famille des ouverts d'une topologie.
2. Si la suite (x_n) est stationnaire, elle est évidement convergente.
   Réciproquement supposons que cette suite converge et soit l sa limite, considérons l'ensemble $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}, x_n \neq l\}$, on a : A est fini ou dénombrable et ne contient pas l, son complémentaire A^c est donc un voisinage ouvert de l. Comme la suite (x_n) converge vers l, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$; tq $\forall n \geq n_0$, $x_n \in A^c$, cela implique que $x_n = l$, car dans le cas contraire x_n serait élément de A. La suite considérée est donc stationnaire.
3. Soit $I : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \text{usuelle})$, tq :$x \mapsto I(x) = x$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'interval $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un voisinage de x pour la topologie usuelle, et $I^{-1}(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, or $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ n'est pas un voisinage de x pour la topologie définie à la question 1, car son complémentaire est non dénombrable, donc I n'est pas continue en x.
4. f continue en a, implique que pour tout $v \in V(f(a))$, alors $f^{-1}(v) \in V(a)$.
   $x_n \to a$; $\forall u \in V(a), \exists n_0 \in \mathbb{N}$ donc pour tout $n \geq n_0$ on a : $x_n \in u$; en

particulier $f^{-1}(v) \in V(a)$, par suite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_0$, nous avons $x_n \in f^{-1}(v)$ ce qui donne $f(x_n) \in f(f^{-1}(v)) \subset v$, ce qui montre que $f(x_n) \in v$ et donc $f(x_n) \to f(a)$.

Chapitre 4

Rattrapage normal de Topologie 2016-2017

Rattrapage de Topologie, durée 2h

Exercice 4.1 *1. Montrer que deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

2. Soit (E, d) un espace métrique et $d_1 = \frac{d}{1+d}$. Montrer que d et d_1 sont topologiquement équivalentes.

3. d et d_1 sont-elles métriquement équivalentes ? justifier votre réponse.

Solutions :

1. Soient d et d' sont deux métriquement équivalentes càd il existe deux réels α, $\beta > 0$, vérifiants : $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$, pour tout $x, y \in E$. Soit O un ouvert pour d, $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq : $B_d(x,r) \subset O$, or $B_{d'}(x, \alpha r) \subset B_d(x,r) \subset O$, par suite O est un ouvert pour d'. Inversement soit O un ouvert pour d', $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq : $B_{d'}(x,r) \subset O$, or $B_d(x, \frac{r}{\beta}) \subset B_d(x,r) \subset O$, ce qui montre que O est un ouvert pour d, par suite d et d' définissent la même topologie.
2. Soit (E, d) un espace métrique et $d_1 = \frac{d}{1+d}$. Montrons que d et d_1 sont topologiquement équivalentes. Toute boule ouverte pour d est contenue dans une boule ouverte pour d_1. Inversement, soit O un ouvert pour d et $x \in O$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tq $B_d(x, \varepsilon) \subset O$, cherchons $r > 0$, de façon que $B_{d_1}(x,r) \subset B_d(x,\varepsilon)$. Soit $t \in B_{d_1}(x,r)$, alors $d_1(x,t) < r$ càd $\frac{d(x,t)}{1+d(x,t)} < r$, par suite $d(x,t) < \frac{r}{1-r}$, $(0 < r < 1)$ et donc il suffit de choisir $\frac{r}{1-r} \leq \varepsilon$. Conclusion d et d_1 sont topologiquement équivalentes.

3. d et d_1 ne sont pas métriquement équivalentes en effet : supposons que d et d_1 sont métriquement équivalentes, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tq :

$$\alpha d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \beta d(x,y); \forall x, y \in E.$$

Comme $d_1(x,y) \leq 1$, alors $\alpha d(x,y) \leq 1, \forall x, y \in E$. Pour $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$, prenons $x = \frac{3}{\alpha}$ et $y = \frac{2}{\alpha}$, alors $|x-y| = \frac{2}{\alpha}$ et donc $\alpha|x-y| = 2 \leq 1$ ce qui est absurde. Donc d et d_1 ne sont pas métriquement équivalentes.

Exercice 4.2 *Soient E un e.t, A et B deux parties de E.*

1. *Montrer que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$.*
2. *Montrer que si $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, alors $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.*
3. *Montrer que si A est ouverte (resp fermée), alors $\overset{\circ}{\widehat{Fr(A)}} = \varnothing$.*
4. *Montrer que A est ouverte et fermée si et seulement si $Fr(A) = \varnothing$.*
5. *Soit ψ_A la fonction caractéristique définie sur E par : $\psi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\psi_A(x) = 0$ sinon. Montrer que ψ_A est continue en x si et seulement si $x \notin Fr(A)$.*
6. *A quelle condition ψ_A est-elle continue sur E ?*
7. *A quelle condition ψ_A est continue sur E pour tout $A \subset E$?*
8. *Supposons qu'il existe une partie A de E telle que $\overline{A} = \overline{\complement_E^A} = E$. Montrer que ψ_A et $\psi_{\complement_E^A}$ ne sont continues en aucun point de E.*

Solutions :

1. Montrons que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$. Nous savons que

$$Fr(A \cup B) = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{(A \cup B)^c},$$

par suite

$$Fr(A \cup B) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A^c} \cap \overline{B^c}) = (\overline{A} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}) \cup (\overline{B} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}),$$

donc

$$Fr(A \cup B) \subset (\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cup (\overline{B} \cap \overline{B^c})$$

càd

$$Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B).$$

2. Montrons que si $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, alors $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.
   On sait que
   $$Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B).$$
   Reste à montrer que $Fr(A) \cup Fr(B) \subset Fr(A \cup B)$.
   Soit $x \in Fr(A) \cup Fr(B)$, alors $x \in Fr(A)$ ou $x \in Fr(B)$. Si $x \in Fr(A)$, alors $x \in \overline{A}$ ce qui donne que $x \in (\overline{A \cup B})$, d'autre part puisque $x \in \overline{A}$, alors $x \notin \overline{B}$ et donc $\exists v \in V(x)$ tq $B \cap v = \varnothing$ càd $v \subset B^c$ ce qui implique que $B^c \in V(x)$. Soit maintenant $w \in V(x)$, alors $w \cap B^c \in V(x)$ et comme $x \in \overline{A^c}$, alors $w \cap B^c \cap A^c \neq \varnothing$. Conclusion $x \in \overline{(A \cup B)^c}$, par suite $x \in \overline{(A \cup B)} \cap (\overline{B^c} \cap \overline{A^c})$ d'où le résultat.
3. Supposons que A est ouvert, alors $\mathring{A} = A$ et A^c est femé par suite $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \cap A^c$ et donc $\mathring{Fr(A)} = \mathring{\overline{A}} \cap \mathring{A^c} = \varnothing$, car $\mathring{A^c} = \overline{A}^c$ et $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A}$.
   Remarque : Si A est fermé, alors A^c est un ouvert, par suite $\mathring{Fr(A^c)} = \mathring{Fr(A)} = \varnothing$.
4. Supposons que $Fr(A) = \varnothing$, par suite $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \varnothing$, donc $\overline{A} \cap \mathring{A}^c = \varnothing$, ce qui donne $\overline{A} \subset \mathring{A} \subset A$ d'où A est fermé et ouvert. Inversement supposons que A est fermé et ouvert càd $\overline{A} = A$ et $\mathring{A} = A$ et donc $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \mathring{A} \cap \mathring{A}^c = \varnothing$.
5. Montrons que ψ_A est continue en x si et seulement si $x \notin Fr(A)$. Supposons que ψ_A est continue x, si $x \in A$, alors $\psi_A(x) = 1$ et donc pour $0 < \varepsilon < 1$, alors il existe $u \in V(x)$ tq $\psi_A(u) \subset]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, ce qui montre que $u \cap A^c = \varnothing$ d'où $x \notin Fr(A)$. Si $x \notin A$, alors $\psi_A(x) = 0$, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $v \in V(x)$ de façon que $\psi_A(v) \subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, par suite $v \cap A = \varnothing$ et donc $x \notin Fr(A)$. Réciproquement supposons que $x \notin Fr(A)$, alors il existe $v \in V(x)$ sachant que $v \cap A = \varnothing$ ou $v \cap A^c = \varnothing$. Pour $v \cap A = \varnothing$, alors $\psi_A(v) = \{0\} \subset]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\forall \varepsilon > 0$, donc ψ_A est continue en x de même pour $v \cap A^c = \varnothing$.
6. ψ_A est continue sur E pour tout A, veut dire que $\forall x \in E$, $x \notin Fr(A)$ càd $Fr(A) = \varnothing$ ce qui veut dire que A est ouvert et fermé.
7. $\forall A \subset E$, ψ_A est continue sur E si et seulement si $\forall A \subset E$, $\forall x \in E$, $x \notin Fr(A)$ càd $Fr(A) = \varnothing$, $\forall A \subset E$, ce qui montre que A est ouverte et fermé pour tout $A \subset E$ et donc E est muni de la topologie discrète.
8. On a : $Fr(A) = E$ car $\overline{A} = \overline{A^c} = E$, par suite pour tout $x \in E$, $x \in Fr(A)$ et donc ψ_A n'est continue en aucun point de E. même raisonnement pour ψ_{A^c}.

Chapitre 5

Examen libre de Topologie ; 2016-2017

Durée 2h

Exercice 5.1 *(6points)*

1. *Montrer que dans un espace métrique toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *Montrer que tout espace métrique compact est complet.*

Solution :

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (E, d), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq, pour tout $n, p \geq n_0$, $d(x_n, x_p) < \varepsilon$.
   Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n, p \geq n_0$, $d(x_n, x_p) < 1$ par suite pour $n \leq n_0 - 1$ posons : $R = \max d(x_n, x_{n_0 - 1})$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons ; $d(x_n, x_{n_0}) \leq \max(R, 1) = r$, ce qui implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B(x_{n_0}, r + 1)$, ce qui montre que (x_n) est bornée.
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (E, d), alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq, pour tout $n, p \geq n_0$, $d(x_n, x_p) < \frac{\varepsilon}{2}$, puisque $(x_n) \subset (E, d)$, qui est compact, alors il existe une sous suite de (x_n) notée ; $x_{\varphi(n)} \to x \in E$, donc $d(x_n, x_{\varphi(n)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$ car $\varphi(n) \geq n \geq n_0$, par suite $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui prouve que $x_n \to x$ et donc (E, d) est complet.

Exercice 5.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les ensembles suivants : $A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0\}$
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > f(x)\}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq f(x)\}$.*

1. *Montrer que A est ouvert et B est fermé.*
2. *Montrer que C est ouvert et D est fermé.*
3. *Comparer au sens de l'inclusion A avec $\overset{\circ}{B}$ et $\overline{A}$ avec B en justifiant vos réponses.*

4. *Comparer au sens de l'inclusion $\overline{C}$ avec D et C avec $\overset{\circ}{D}$ en justifiant vos réponses.*

Solution

1. Nous avons :$A = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert car f est continue. De même $B = f^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé du fait que f est continue.
2. Montrons que D est fermé. Soit $(x, y) \in \overline{D}$, alors il existe $(x_n, y_n) \in D$ sachant que $x_n \to x$ et $y_n \to y$, du fait que $(x_n, y_n) \in D$, alors $y_n \geq f(x_n)$. On passe à la limite on obtient donc $y \geq f(x)$, ce qui montre que $(x, y) \in D$ et par suite D et fermé. Maintenant montrons que C est ouvert.
   Remarque : de la même façon que précedement on montre que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq f(x)\} = \complement^C$ est fermé, ceci montre que C est ouvert.
3. On sait que $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et puisque A est ouvert alors $A \subset \overset{\circ}{B}$. De même nous avons $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$, du fait que B est fermé alors $\overline{A} \subset B$.
4. Nous avons : $C \subset D$, alors $\overset{\circ}{C} \subset \overset{\circ}{D}$ et puisque C est ouvert alors $C \subset \overset{\circ}{D}$.
   Remarque : Soit $(x_0, y_0) \in D$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tq : $B((x_0, y_0), \varepsilon) \in D$ càd $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subset D$ par suite $y_0 - \frac{\varepsilon}{2} \geq f(x_0)$ or $y_0 > y_0 - \frac{\varepsilon}{2} \geq f(x_0)$ càd $y_0 > f(x_0)$ donc $(x_0, y_0) \in C$ ce qui montre que $C = \overset{\circ}{D}$.
   Remarque : On montre de la même façon que l'intérieur de
   $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq f(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < f(x)\}$, càd $\overset{\circ}{\complement^C} \subset \complement^D$ d'où $\overline{C} = D$.

Exercice 5.3 *Soit E un ensemble non vide muni de deux distances d_1 et d_2. On suppose que pour toute suite x_n de E : $x_n \to^{d_1} x \Rightarrow x_n \to^{d_2} x$ et que (E, d_1) est compact.*

1. *Montrer que si F est un fermé dans (E, d_2), alors F est un fermé dans (E, d_1).*
2. *Montrer que (E, d_2) est compact.*
3. *Montrer que si F est un fermé dans (E, d_1), alors F est un fermé dans (E, d_2).*
4. *Déduire que d_1 et d_2 définissent la même topologie sur E.*

Solution

1. Soit $x \in \overline{F_{d_1}}$, alors il existe (x_n) de points de F tq : $x_n \to^{d_1} x$, par suite $x_n \to^{d_2} x$ ceci montre que $x \in \overline{F_{d_2}} = F$ et donc $\overline{F_{d_1}} \subset F$ or $F \subset \overline{F_{d_1}}$, conclusion $F = \overline{F_{d_1}}$ càd F est fermé dans (E, d_1).
2. Montrons que (E, d_2) est compact. Soit (x_n) une suite de points de (E, d_2) donc (x_n) est une suite de points de (E, d_1) qui est compact par suite il existe une sous suite notée $x_{\varphi(n)}$ de points de (E, d_1) tq : $x_{\varphi(n)} \to^{d_1} x$ par suite $x_{\varphi(n)} \to^{d_2} x$ ce qui montre que (E, d_2) est compact.
3. Soit F un fermé dans (E, d_1) qui est compact, alors (F, d_1) est compact et donc de la même façon que 2), on montre que (F, d_2) est compact par suite F est un fermé dans (E, d_2).
4. D'aprés les questions précédentes nous avons montré que F est fermé dans (E, d_1) si et seulement si F est fermé dans (E, d_2) et par passage au complémentaire on obtient donc O est un ouvert pour (E, d_1) si et seulement si O est ouvert pour (E, d_2). Conclusion d_1 et d_2 définissent la même topologie dans E.

Chapitre 6

Rattrapage Libre de Topologie ; 2016-2017

Exercice 6.1 *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E.*

1. *Montrer que si A est compacte, alors A est complète.*
2. *Montrer que si A est compacte, alors A est fermée et bornée.*
3. *Soit (F, d') un autre espace métrique et $h : E \to F$ une application continue. Montrer que si A est connexe par arcs de E, alors $h(A)$ est connexe par arcs de F.*

Solutions :

1. Montrons que A est complète, soit (x_n) une suite de Cauchy de points de A, comme A est compacte alors il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ de points de A de façon que $x_{\varphi(n)} \to x$, par suite $x_n \to x$.
2. Montrons que A est fermé. Soit $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite (x_n) de points de A tq :$x_n \to x$ et comme A est compacte alors il existe sous suite de (x_n), notée $(x_{\varphi(n)})$ de points de A tq $x_{\varphi(n)} \to a$ et par l'unicité de la limite on a $x = a \in A$ d'où le résultat.
   Reste à montrer que A est bornée. On sait que pour tout $a \in E$, nous avons $E = \cup B(a, n)$ où $n \in \mathbb{N}$, donc $A = A \cap (\cup B(a, n))$ par suite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq : $A = A \cap B(a, n_0)$ ce qui montre que $A \subset B(a, n_0)$ d'où le résultat.
3. Montrons que $h(A)$ est connexe par arcs. Soient $a, b \in h(A)$ donc il existe a_0, b_0 tq : $a = h(a_0)$ et $b = h(b_0)$ et puisque A est connexe par arcs, alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et application continue $\gamma : [\alpha, \beta] \to A$ de façon que $\gamma(\alpha) = a_0$ et $\gamma(\beta) = b_0$ par suite nous avons $a = (h \circ \gamma)(\alpha)$ et

$b = (h \circ \gamma)(\beta)$ et puisque $h \circ \gamma$ est continue alors $h(A)$ est connexe par arcs.

Exercice 6.2 *Soit $(E, ||.||)$ un espace normé. Si A et B sont des parties de E, on désigne par $A + B$ l'ensemble des points de la forme $x + y$ avec $x \in A$ et $y \in B$.*

1. *Si l'une des parties A, B(disons A) est ouverte, montrer que $A + B$ est ouverte.*
2. *On suppose que C est une partie convexe de E, montrer que $\overline{C}$ est convexe.*
3. *On suppose que C est une partie convexe de E d'intérieur non vide et soit $B(a, r)$ une boule ouverte contenue dans C. Pour tout $x \in C$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$, montrer que la boule $B((1 - \varepsilon)x + a\varepsilon, \varepsilon r)$ est contenue dans C.*
4. *Déduire que $C \subset \overline{\overset{\circ}{C}}$ puis que $\overline{\overset{\circ}{C}} = \overline{C}$.*
5. *Montrer que $\overset{\circ}{C}$ est convexe.*

Solutions :

1. Soit $f : A \to A + b$, $a \mapsto a + b$ pour $b \in B$. On sait que f est un homéomorphisme, par suite $f(A)$ est un ouvert donc $A + b$ est un ouvert or $A + B = \cup(A + b), b \in B$ ce qui montre que $A + B$ est ouvert.
2. Montrons que $\overline{C}$ est convexe. Soient $x, y \in \overline{C}$ et $\alpha, \beta \geq 0$ tq :$\alpha + \beta = 1$ montrons que $\alpha x + \beta y \in \overline{C}$. nous avons $x, y \in \overline{C}$, alors il existe x_n, y_n de points de C de façon que $x_n \to x$ et $y_n \to y$, or d'une part $\alpha x_n + \beta y_n \in C$ d'autre part $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$ donc $\alpha x + \beta y \in \overline{C}$ d'où le résultat.
3. Montrons que montrer que la boule $B((1 - \varepsilon)x + a\varepsilon, \varepsilon r)$ est contenue dans C. Il suffit de remarquer que :
$$B((1 - \varepsilon)x + a\varepsilon, \varepsilon r) = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon B(a, r),$$
et du fait que $B(a, r) \subset C$, alors
$$B((1 - \varepsilon)x + a\varepsilon, \varepsilon r) \subset C.$$
4. Remarquez bien que $B((1 - \varepsilon)x + a\varepsilon, \varepsilon r) \subset C$, ce qui montre que $(1 - \varepsilon)x + a\varepsilon \in \overset{\circ}{C}$ et donc pour $\varepsilon = 2^{-n}$ les points de la forme :
$(1 - 2^{-n})x + 2^{-n}a \in \overset{\circ}{C}$ (car l'intérieur de la boule c'est elle même), on passe à la limite on obtient donc :
$$x = \lim_{n \to +\infty} \left((1 - 2^{-n})x + 2^{-n}a\right).$$

Du fait que $x \in C$, alors $x \in \overline{\overset{\circ}{C}}$ ce qui montre que $C \subset \overline{\overset{\circ}{C}}$, puis on passe à l'adhérence on obtient que $\overline{C} \subset \overline{\overset{\circ}{C}}$. D'autre part on sait que $\overset{\circ}{C} \subset C$ donc $\overline{\overset{\circ}{C}} \subset \overline{C}$ par suite

$$\overline{\overset{\circ}{C}} = \overline{C}.$$

5. Montrons que $\overset{\circ}{C}$ est convexe. Soient $x, y \in \overset{\circ}{C}$, montrons que $(1-\lambda)x + \lambda y \in \overset{\circ}{C}$ pour $\lambda \in [0,1]$. pour $\lambda = 0$ le résultat est vrai. Pour $\lambda \in]0,1]$ nous avons $(1-\lambda)x + \lambda y \in \overset{\circ}{C}$, d'aprés 3).

Chapitre 7

Examen normal de Topologie ; 2017-2018

Examen de Topologie ; Durée 2h.

Exercice 7.1 *1. Soit τ la topologie sur $\mathbb{R}$ formée par $\varnothing$, $\mathbb{R}$ et tous les ouverts de la forme $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $\overline{\{-2017, 2018\}}$.*

2. Soit E un espace topologique séparé. Montrer que si K est un compact de E, alors pour tout $x \in \complement_E^K$, il existe deux ouverts U et V de façon que $x \in U$ et $K \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

3. Déduire que si A et B sont deux compacts disjoints de E, alors il existe deux ouverts U et V de façon que $A \subset U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

<u>Solutions</u>

1. Les fermés pour τ sont $\varnothing$, $\mathbb{R}$ et les fermés de la forme $]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R}$, donc $\overline{\{-2017, 2018\}}$ est l'intersection de tous les fermés contenant $\{-2017, 2018\}$ c'est donc $]-\infty, 2018]$.
2. Puisque $x \in \complement_E^K$, alors pour tout $y \in K; x \neq y$ et comme E est séparé il existe $u_y \in V(x)$ et $v_y \in V(y)$ ouvertes de sorte que $u_y \cap v_y = \varnothing$. Ainsi on a :$K \subset \cup v_y$ où $y \in K$, or K est compacte donc il existe $y_1, y_2, ...y_n \in K$ de façon que $K \subset \cup v_{y_i} = V$ avec $y_i \in K$, par suite $v_{y_i} \cap u_{y_i} = \varnothing$. Posons $U = \cap u_{y_i}$, $1 \leq i \leq n$ qui est un ouvert et $x \in U$ et $U \cap V = \varnothing$.
   <u>Déduction :</u> On a : $A \cap B = \varnothing$ donc pour tout $x \in A$, $x \notin B$, il existe deux ouverts $U_x \in V(x)$ et $V_x \in V(B)$ de sorte que $U_x \cap V_x = \varnothing$, alors $A \subset \cup U_x$ et puisque A est compact alors il existe $x_1, x_2, ...x_n \in A$ de sorte que $A \subset \cup U_{x_i} = U$, soit $V = \cap V_{x_i}$, V est un ouvert et $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$

Exercice 7.2 *Soit* $\tau = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R}; \complement_{\mathbb{R}}^{A}$ *est au plus dénombrable*$\}$.

1. *Montrer que* τ *est une topologie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que pour cette topologie, toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert.*
3. *Montrer que la topologie* τ *n'est pas séparé.*
4. *Montrer que si* x *et* y *sont deux réels distincts, alors il existe* $v \in V(y)$ *de façon que* $x \notin v$.
5. *Déduire que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cap v = \{x\}$ *où* $v \in V(x)$.
6. *Montrer que toute bijection de* $(\mathbb{R}, \tau)$ *sur lui même est un homéomorphisme.*
7. *Montrer que les seuls applications continues de* $(\mathbb{R}, \tau)$ *dans* $(\mathbb{R}, |.|)$ *sont des constantes.*

Solutions

1. Soit $\tau = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R}; \complement_{\mathbb{R}}^{A}$ est au plus dénombrable$\}$. τ est une topologie sur $\mathbb{R}$ en effet :
   $*$ $\varnothing \in \tau$ et $\complement_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} = \varnothing$ qui est au plus dénombrable donc $\mathbb{R} \in \tau$.
   $*$ Soient $A, B \in \tau$, montrons que $A \cap B \in \tau$. Si A B est vide alors $A \cap B$ est vide donc se trouve dans τ. Si $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$, alors $\complement_{\mathbb{R}}^{A\cap B} = \complement_{\mathbb{R}}^{A} \cup \complement_{\mathbb{R}}^{B}$ est au plus dénombrable ce qui montre que $A \cap B \in \tau$.
   $*$ Soient $A_i \in \tau$ où $i \in I$, montrons que $\cup A_i \in \tau$. $\complement_{\mathbb{R}}^{\cup A_i} = \cap \complement_{\mathbb{R}}^{A_i}$. Si il existe $i_0 \in I$ de sorte que $A_{i_0} \neq \varnothing$, alors $\cap \complement_{\mathbb{R}}^{A_i} \subset \complement_{\mathbb{R}}^{A_{i_0}}$ qui est au plus dénombrable donc $\cup A_i \in \tau$. Si pour tout $i \in I$ $A_i = \varnothing$, alors $\cup A_i = \varnothing \in \tau$, d'où τ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrons que pour cette topologie, toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert. Soiot (A_n) une famille d'éléments de τ, s'il existe n_0 de façon que $A_{n_0} = \varnothing$, alors $\cap A_n = \varnothing \in \tau$. Si pour tout n, $A_n \neq \varnothing$, $A_n \in \tau$ prouve que $\complement_{\mathbb{R}}^{A_n}$ est au plus dénombrable donc $\cup \complement_{\mathbb{R}}^{A_n}$ est au plus dénombrable car toute réunion dénombrable de partie dénombrable est dénombrable. ce qui montre que $\cup A_i \in \tau$.
3. Montrons que la topologie τ n'est pas séparé. Supposons que τ est séparé, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$ il existe deux ouverts $O_x \in V(x)$, $O_y \in V(y)$ de sorte que $O_x \cap O_y = \varnothing$ donc $\complement_{\mathbb{R}}^{\varnothing} = \complement^{O_x} \cup \complement^{O_y} = \mathbb{R}$ l'union de deux éléments de τ qui est au plus dénombrable ce qui montre que $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable ce qui est absurde.
4. Si $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \neq y$, alors il existe $v \in V(y)$ tq $x \notin v$. On a $x \neq y$, $v = \complement_{\mathbb{R}}^{\{x\}}$ est un ouvert car $\{x\}$ est au plus dénombrable donc $v \in V(y)$ et $x \notin v$.

5. <u>Déduction :</u> Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cap v = \{x\}$ où $v \in V(x)$. Pour $y \neq x$, il existe $v \in V(x)$ de sorte que $y \notin v$ par suite $y \notin \cap v$ où $v \in V(x)$ ce qui montre que $\cap v = \{x\}$.
6. Montrons que toute bijection de $(\mathbb{R}, \tau)$ sur lui même est un homéomorphisme. Considérons $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ une bijection. soit B un fermé de $(\mathbb{R}, \tau)$, alors B est au plus dénombrable or $f : f^{-1}(B) \to B$ est bijective donc $f^{-1}(B)$ est au plus dénombrable car $f^{-1}(B)$ est un fermé.
   Si A est un fermé dans $(\mathbb{R}, \tau)$, alors A est au plus dénombrable donc $f(A)$ est au plus dénombrable car $f : A \to f(A)$ est bejective. par suite $f(A)$ est un fermé dans $(\mathbb{R}, \tau)$, et donc f est une bijection avec f et f^{-1} sont continues, ce qui montre que f est un homéomorphisme.
7. Montrons que les seulsapplications continues de $(\mathbb{R}, \tau)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ sont lesdes constantes. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, supposons que $f(x) \neq f(y)$, il existe donc deux ouverts U et V tq $f(x) \in U$ et $f(y) \in V$ et $U \cap V = \varnothing$, or $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$, $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont des ouverts dans $(\mathbb{R}, \tau)$ et $x \in f^{-1}(U)$, $y \in f^{-1}(V)$ ce qui est absurde car $(\mathbb{R}, \tau)$ n'est pas séparé et par suite $f(x) = f(y)$.

Chapitre 8

Examen normal de Topologie 2018-2019

Examen de Topologie Durée 2h.

Exercice 8.1 *1. Soit τ la topologie sur $\mathbb{R}$, formée par $\varnothing$, $\mathbb{R}$ et les ouvets de la forme $]-\infty, a[$ où a décrit $\mathbb{R}$. L'espace $(\mathbb{R}, \tau)$ est-il séparé ? justifier.*

2. Soit a un élément de $\mathbb{Q}$. Trouver la composante connexe de a dans l'espace topologique $(\mathbb{R}, |.|)$ puis sa composante connexe dans l'espace $(\mathbb{Q}, |.|)$.

Solutions

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, cherchons $\overline{\{a\}}$ dans $(\mathbb{R}, \tau)$. On sait que $\overline{\{a\}}$ est l'intersection de tout les fermés contenant a et donc $\overline{\{a\}} = [a, +\infty[$ qui n'est pas fini donc l'espace n'est pas séparé.
2. Pour $a \in \mathbb{Q}$, la composante connexe de a dans $(\mathbb{R}, |.|)$ est $\mathbb{R}$, sa composante connexe dans $(\mathbb{Q}, |.|)$ est $\{a\}$.

Exercice 8.2 *Soient E, F, G trois espaces topologiques et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.*

1. Montrer que f est ouverte si et seulement si pour toute partie $A \subset E$, $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$.

2. Montrer que l'injection canonique d'une partie $A \subset E$ dans E est ouverte si et seulement si A est ouverte dans E.

3. Montrer que si $g \circ f$ est ouverte et si g est injective et continue alors f est ouverte.

4. *Montrer que si $g \circ f$ est ouverte et si f est surjective et continue alors g est ouverte.*

Solutions

1. Supposons que f est ouverte, montrons que pour tout $A \subset E$, $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$. On sait que $(\overset{\circ}{A}) \subset A$ donc $f(\overset{\circ}{A}) \subset f(A)$, par suite $\overset{\circ}{f(\overset{\circ}{A}))} \subset \overset{\circ}{f(A)}$. du fait que $f(\overset{\circ}{A})$ est un ouvert alors $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$. réciproquement supposons que pour toute partie $A \subset E$, $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$ et montrons que f est ouverte. Soit O un ouvert, alors $O = \overset{\circ}{O}$ et donc $f(O) \subset \overset{\circ}{f(O)}$ or on sait que $\overset{\circ}{f(O)} \subset f(O)$, ce qui montre que $\overset{\circ}{f(O)} = f(O)$ et par suite f est ouverte.
2. $i : A \to E\,;\ x \mapsto x$. Montrons que i est ouverte ssi A est ouverte. Supposons que A et montrons que i est ouverte. Soit O_A est un ouvert de A donc il existe un ouvert O_E de E de façons que $O_A = A \cap O_E$, on sait que $i(O_A) = O_A = A \cap O_E$ est un ouvert dans E : l'intersection de deux ouverts. Réciproquement supposons que i est ouverte montrons que A est ouverte dans E. Sachant que A est ouvert dans lui même, alors $i(A) = A$ est un ouvert donc dans E.
3. Soit O un ouvert de E, montrons que $f(O)$ est un ouvert de F. On a $g(f(O))$ est un ouvert de G et puisque g est continue alors $g^{-1}[g(f(O))]$ est un ouvert de F d'autre part nous avons $g^{-1}[g(f(O))] = f(O)$ car g est injective.
4. Soit O un ouvert de F. Montrons que $g(O)$ est ouvert de G. Du fait que f est continue alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E et par suite $(g \circ f)(f^{-1}(O))$ est un ouvert de G et puisque f est surjective alors $(g \circ f)(f^{-1}(O)) = g(O)$ ce qui montre donc le résultat.

Exercice 8.3 *Soient E, F deux $\mathbb{R}$ e.v.n et $f : E \to F$ une application linéaire. On dit que f est compacte si $\overline{f(B'(0,1))}$ est compacte.*

1. *Montrer que f est compacte si et seulement si pour toute partie bornée $A \subset E$, $\overline{f(A)}$ est compacte.*
2. *Montrer que toute application linéaire compacte est continue.*
3. *On suppose que E est de dimension infinie. Montrer que l'application identique de E n'est pas compacte.*
4. *Montrer que si E ou F est de dimension finie, alors toute application linéaire continue est compacte.*

Solutions

1. Supposons que f est compacte, montrons que pour toute partie bornée $A \subset E$, $\overline{f(A)}$ est compacte. Soit A une partie bornée de E, alors $\exists a \in E, r > 0$ de façon que $A \subset B'(a,r)$, or $\overline{B'(a,r)} = a + r\overline{B'(0,1)}$, par suite $f(A) \subset f(a)+rf(B'(0,1))$ et donc $\overline{f(A)} \subset f(a)+r\overline{f(B'(0,1))}$ car $x \mapsto rx$ et $x \mapsto a+x$ sont des homéomorphismes, ce qui montre que $\overline{f(A)}$ est compacte. Réciproquement supposons que pour toute partie bornée $A \subset E$, $\overline{f(A)}$ est compacte, montrons alors que $\overline{f(B'(0,1))}$ est compacte. On sait que $B'(0,1)$ est bornée donc $\overline{f(B'(0,1))}$ est compacte.
2. Montrons que toute application linéaire compacte est continue. On a $\overline{f(B(0,1)}$ est compacte donc elle est bornée par suite il existe $M > 0$ de sorte que $||y|| \leq M$ pour tout $y \in \overline{f(B'(0,1))}$, en particulier $||f(x)|| \leq M$ pour tout $x \in B'(0,1)$, ce qui montre que $\sup\limits_{||x|| \leq 1} ||f(x)|| \leq M$, par conséquent f est continue.
3. $\dim E$ n'est pas fini est équivalente à dire que $B'(0,1)$ n'est pas compacte $\Leftrightarrow I(B'(0,1)) = B'(0,1)$ n'est pas compacte $\Leftrightarrow \overline{B'(0,1)} = \overline{B'(0,1)} = B'(0,1)$ n'est pas compacte $\Leftrightarrow I$ n'est pas compacte.
4. Cas où $\dim E < +\infty$: On sait que $B'(0,1)$ est compacte or f est continue ce qui montre que $f(B'(0,1))$ est compacte $\overline{f(B'(0,1))}$ est compacte.
   Cas où $\dim F < +\infty$: On a $\overline{f(B'(0,1))}$ est fermée il suffit donc de montrer que $\overline{f(B'(0,1))}$ est bornée , or nous avons $\delta(\overline{f(B'(0,1))}) = \delta(f(B'(0,1)))$. Soient $x, y \in B'(0,1)$, alors $||f(x) - f(y)|| = ||f(x-y)|| \leq ||f||||x-y|| \leq 2||f||$ ce qui montre que le diamètre de $f(B'(0,1))$ est fini et par suite $\overline{f(B'(0,1))}$ est bornée ce qui prouve que $\overline{f(B'(0,1))}$ est compacte.