Table des matières

1	Ensemble Réel	2
2	Suites Numériques	9
3	Continuité et Dérivabilité des Fonctions	16
4	Développement Limité	24

Chapitre 1

Ensemble Réel

Exercice 1

- (1) Montrer que $1 = 0,999\dots$
- (2) Trouver les entiers naturels a et b tels que $\frac{a}{b} = 5,17363636\dots36\dots$ à partir de la troisième décimale, le développement décimal est composé d'une suite infinie de nombres 36. On fera apparaître la somme des termes d'une suite géométrique.

Solution

1. Montrons que : $1 = 0,999\dots9\dots$ (déjà vu en cours).
2. Trouver a et b dans $\mathbb{N}$ tel que $\frac{a}{b} = 5,173636\dots36\dots$

Soit

$$\begin{aligned}x &= 5,173636\dots \\ &= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4} + \frac{36}{10^6} + \frac{36}{10^8} + \dots \\ &= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \left(\frac{1}{10^2}\right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} \quad \text{car} \quad \left| \frac{1}{10^2} \right| < 1 \\ &= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4 - 10^2} \\ &= \frac{517}{100} + \frac{36}{9900}.\end{aligned}$$

Donc $a = 517 \times 99 + 36 = 51219$ et $b = 9900$.

.....

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inégalités suivantes :

(1) $|x + 3| < 0,1$

(2) $|x - 3| \geq 10$

(3) $|x| > |x + 5|$.

Solution

Resoudre dans

1.

$$\begin{aligned}|x + 3| < 0,1 &\iff -0,1 < x + 3 < 0,1 \\ &\iff -3,1 < x < -2,9 \\ &\iff S =]-3,1; -2,9[.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}|x - 3| \geq 10 &\iff x - 3 \geq 10 \quad \text{ou} \quad x - 3 \leq -10 \\ &\iff x \geq 13 \quad \text{ou} \quad x \leq -7 \\ &\iff S =]-\infty; -7] \cup [13; +\infty[.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}|x| > |x + 5| &\iff (x + 5)^2 < x^2 \\ &\iff x^2 + 10x + 25 < x^2 \\ &\iff x < -\frac{25}{10} = -\frac{5}{2} \\ &\iff S =]-\infty; -5/2[.\end{aligned}$$

.....

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $A \cup B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que l'on a

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

(b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

(2) Montrer que $A + B = \{a + b, \text{ tel que } a \in A, b \in B\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et que l'on a

(a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

(b) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Solution

Soient A et B deux parties non vides bornées de

1. Montrons que : $A \cup B$ est bornée de

Si $s \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$,

et on a si $x \in A$ alors $\min(\inf A, \inf B) \leq \inf A \leq x \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$,

et si $x \in B$ alors $\min(\inf A, \inf B) \leq \inf B \leq x \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$,

Donc $\forall x \in A \cup B$ on a $\min(\inf A, \inf B) \leq x \leq \max(\sup A, \sup B)$,

d'où $A \cup B$ est bornée.

2. (a) Montrons que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

d'après 1) on a $x \leq \max(\sup A, \sup B)$, $\forall x \in A \cup B$.

Donc $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$.

Or $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$.

Donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

D'autre part on a

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \sup A \leq \sup(A \cup B),$$

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \sup B \leq \sup(A \cup B).$$

Donc $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$.

Par conséquent $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) Montrons que : $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

d'après 1) on a $x \leq \min(\inf A, \inf B)$, $\forall x \in A \cup B$.

Donc $\min(\inf A, \inf B)$ est un minorant de $A \cup B$.

Or $\inf(A \cup B)$ est le plus grand des minorants de $A \cup B$.

Donc $\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B)$.

D'autre part on a

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \inf(A \cup B) \leq \inf A,$$

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \inf(A \cup B) \leq \inf B.$$

Donc $\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B)$.

Par conséquent $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

3. On a si A est borné alors $\inf A \leq a \leq \sup A$, $\forall a \in A$,

et si B est borné alors $\inf B \leq b \leq \sup B$, $\forall b \in B$.

Donc $\inf A + \inf B \leq x \leq \sup A + \sup B$, $\forall x \in A + B$.

Donc $A + B$ est borné.

4. (a) Soit $x \in A + B$ donc $\exists a \in A$ et $\exists b \in B$ tel que : $x = a + b$.

D'après 3) on a $x \leq \sup A + \sup B$, $\forall x \in A + B$.

Donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$. Et puisque $\sup(A + B)$ est le plus

petit des majorant, alors :

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B. \quad (1.1)$$

D'autre part : $\forall x = a + b \in A + B$, on a :

$$\begin{aligned} x = a + b \leq \sup(A + B) &\Rightarrow a \leq \sup(A + B) - b, \quad \forall a \in A, \\ &\Rightarrow \sup(A + B) - b \text{ est un majorant de } A, \\ &\Rightarrow \sup A \leq \sup(A + B) - b, \\ &\Rightarrow b \leq \sup(A + B) - \sup A, \quad \forall b \in B, \\ &\Rightarrow \sup(A + B) - \sup A \text{ est un majorant de } B, \\ &\Rightarrow \sup B \leq \sup(A + B) - \sup A. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B). \quad (1.2)$$

Finalemment d'après (1.1) et (1.2), on obtient $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(b) Montrons que : $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

D'après 3) on a :

$$\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B. \quad (1.3)$$

D'autre part; $\forall(a, b) \in A \times B$, on a :

$$\begin{aligned} a + b \geq \inf(A + B) &\Rightarrow a \geq \inf(A + B) - b, \quad \forall a \in A, \\ &\Rightarrow \inf(A + B) - b \text{ est un minorant de } A, \\ &\Rightarrow \inf A \geq \inf(A + B) - b, \\ &\Rightarrow b \geq \inf(A + B) - \inf A, \quad \forall b \in B, \\ &\Rightarrow \inf(A + B) - \inf A \text{ est un minorant de } B, \\ &\Rightarrow \inf B \geq \inf(A + B) - \sup A. \end{aligned}$$

Donc

$$\inf A + \inf B \geq \inf(A + B). \quad (1.4)$$

Finalemment; d'après (1.3) et (1.4), on obtient $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

.....

Exercice 4

Déterminer les bornes supérieures et inférieures quand elles existent des ensembles suivants :

$$A = \left\{ \frac{2n-1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad D = \{e^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Solution

Déterminer les bornes supérieures et inférieures quand elles existent de

1. $A = \left\{ \frac{2n-1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \neq \emptyset.$

on a $-1 \leq \frac{2n-1}{2n+1} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Donc A est borné, d'où l'existence de $\sup A$ et $\inf A$.

$\sup A = 1?$

(i) 1 est un majorant de A .

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{2n_0 - 1}{2n_0 + 1} &\iff 1 - \frac{2n_0 - 1}{2n_0 + 1} < \varepsilon, \\ &\iff \frac{1}{2n_0 + 1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{2}{2n_0+1} \leq \frac{2}{2n_0}$ il suffit que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ c'est-à-dire $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$

$\sup A \in A?$

Si oui : $\sup A = 1 = \frac{2n-1}{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire $2n+1 = 2n-1$, donc $-1 = 1$ ce qu'est impossible donc $\sup A \notin A$.

$\inf A = -1:$

(i) -1 est un minorant de A .

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} -1 + \varepsilon > \frac{2n_0 - 1}{2n_0 + 1} &\iff 1 + \frac{2n_0 - 1}{2n_0 + 1} < \varepsilon, \\ &\iff \frac{4n_0}{2n_0 + 1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{4n_0}{2n_0+1} \leq 4n_0$ il suffit que $4n_0 < \varepsilon$ c'est-à-dire $n_0 < \varepsilon/4$.

On a $-1 = \frac{2 \times 0 - 1}{2 \times 0 + 1}$ donc $\inf A = -1 \in A$ d'où $\min A = -1$.

2. $B = \left\{ \frac{n^2-1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \neq \emptyset.$

on a $0 \leq \frac{n^2-1}{n^2} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Donc B est borné, d'où l'existence de $\sup B$ et $\inf B$.

$\sup B = 1?$

(i) 1 est un majorant de B .

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} &\iff 1 - \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} < \varepsilon, \\ &\iff \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon, \\ &\iff \frac{1}{\varepsilon} < n_0^2, \\ &\iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n_0. \end{aligned}$$

sup $B = 1 \in B$?

Si oui : sup $B = 1 = \frac{n^2-1}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire $n^2 = n^2 - 1$,
donc $0 = -1$ ce qu'est impossible donc sup $B \notin B$.

inf $B = 0$

(i) 0 est un minorant de B .

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon > \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} &\iff n_0^2 \varepsilon > n_0^2 - 1, \\ &\iff n_0^2(\varepsilon - 1) > -1, \\ &\iff n_0^2(1 - \varepsilon) < 1. \end{aligned}$$

Si $1 < \varepsilon$ alors n_0 est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

Si $1 > \varepsilon > 0$ alors $n_0^2 < \frac{1}{1-\varepsilon}$ c'est-à-dire $n_0 < \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}}$.

Si $\varepsilon = 1$ alors $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \frac{n_0^2-1}{n_0^2} < 1$.

D'autre part $0 = \frac{1^2-1}{1^2}$ donc $0 \in B$ d'où min $B = 0$.

3. $C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\} = C_1 \cup C_2$,
avec $C_1 = \left\{ \frac{1}{2n} + 1, n \geq 1 \right\}$ et $C_2 = \left\{ \frac{1}{2n+1} - 1, n \geq 0 \right\}$,
on a $1 \leq \frac{1}{2n} + 1 \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $-1 \leq \frac{1}{2n+1} - 1 \leq 0$.

Donc les $C_i, (i = 1, 2)$ sont bornés et non vides.

Donc d'après l'exercice 3, $C_1 \cup C_2$ est bornés et on a

sup($C_1 \cup C_2$) = max(sup C_1 , sup C_2) et inf($C_1 \cup C_2$) = min(inf C_1 , inf C_2),
avec inf $C_1 = 1$ et sup $C_1 = 3/2$ et inf $C_2 = -1$ et sup $C_2 = 0$.

4. $D = \{e^n, n \in \mathbb{N}\}$

D est non majoré car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$.

D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}, e^n \geq 1$, donc D est minoré, d'où l'existence de inf D .

inf $D = 1$

- (i) 1 est un minorant de D .
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 + \varepsilon > e^{n_0} \iff n_0 < \ln(1 + \varepsilon).$$

$1 = e^0$ c'est-à-dire $1 \in D$ d'où $\min D = 1$.

Chapitre 2

Suites Numériques

Exercice 1

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leurs termes généraux :

$$a_n = \frac{(-3)^n}{n}, b_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}, c_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}, d_n = \frac{\sin n + \cos n}{n}$$

$$x_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, y_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}, z_n = \frac{2^n + 3^n}{n^n}, w_n = \frac{n!}{n^n}$$

Solution

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(-3)^n}{n}$.
 $a_{2n} = \frac{3^{2n}}{2n} = \frac{e^{2n \ln 3}}{2n \ln 3} \ln 3 \rightarrow +\infty$ donc (a_n) diverge.
2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{n(1 - (-1)^n/n)}{n(1 + (-1)^n/n)} = \frac{1 - (-1)^n/n}{1 + (-1)^n/n} \rightarrow 1$.
Car $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$
3. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{3^n(1 - (2/3)^n)}{3^n(1 + (2/3)^n)} = \frac{1 - (2/3)^n}{1 + (2/3)^n} \rightarrow 1$.
Car $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$
4. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \frac{\sin n + \cos n}{n}$
on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1/n \leq d_n \leq 2/n$
et on a $-1/n \rightarrow 0$ et $2/n \rightarrow 0$ donc $d_n \rightarrow 0$.
5. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = (\sin(1/n))^{1/n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} x_n &= (\sin(1/n))^{1/n} = e^{(1/n) \ln |\sin(1/n)|}, \\ &= e^{(1/n) \ln \left(\left| \frac{\sin(1/n)}{1/n} \right| \frac{1}{n} \right)}, \\ &= e^{(1/n) \ln \left(\frac{\sin(1/n)}{1/n} \right) + \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n} \right)}, \\ &= e^{(1/n) \ln \left(\frac{\sin(1/n)}{1/n} \right)} e^{\frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n} \right)}, \end{aligned}$$

et on a $e^{(1/n) \ln \left(\frac{\sin(1/n)}{1/n} \right)} \rightarrow e^{0 \ln 1} = 1$ et $e^{\frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{n} \right)} \rightarrow e^0 = 1$.

Donc $x_n \rightarrow 1$.

6. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

Multiplions par l'expression conjuguée, on obtient

$$y_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1/n^2 + 1/n + 1} + \sqrt{1/n^2 - 1/n + 1}}.$$

Donc $y_n \rightarrow \frac{2}{2} = 1$.

7. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{2^n + 3^n}{a^n}$

$$\text{donc } z_n = \frac{3^n}{a^n} (1 + (2/3)^n) = \left(\frac{3}{a} \right)^n (1 + (2/3)^n)$$

(a) Si $|3/a| > 1$ alors (z_n) diverge.

(b) Si $|3/a| < 1$ alors $\lim(3/a)^n = 0$ donc $\lim z_n = 0$.

(c) Si $|3/a| = 1$ alors $|a| = 3$.

i. Si $a = 3$ alors $z_n = 1 + (2/3)^n \rightarrow 1$.

ii. Si $a = -3$ alors $z_n = (-1)^n (1 + (2/3)^n)$

donc $z_{2n} \rightarrow 1$ et $z_{2n+1} \rightarrow -1$.

Donc (z_n) diverge.

8. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = \frac{n!}{n^n}$.

$$\text{Donc } \omega_n = \frac{n \times (n-1) \cdots 2 \times 1}{n \times n \cdots n \times n} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{2}{n} \frac{1}{n}.$$

Et on a $\frac{k}{n} \leq 1$, pour tout entier $2 \leq k \leq n$

donc $0 \leq \omega_n \leq 1/n$. Donc $\omega_n \rightarrow 0$.

.....

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si cette suite converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $|(u_n)|$ converge vers $|l|$.

Que peut-on dire de la réciproque ?

Solution

- Montrons que : $|u_n| \rightarrow |l|$.

Soit $\varepsilon > 0$,

puisque $u_n \rightarrow l$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Or $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \text{ on a } ||u_n| - |l|| < \varepsilon,$
donc $|u_n| \rightarrow |l|$.

- La réciproque est en général fausse.

Pour $u_n = (-1)^n$, on a $|u_n| \rightarrow 1$,

mais (u_n) diverge.

.....

Exercice 3

Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_n = \frac{1}{(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{(n^3 + 2)^{\frac{1}{3}}} + \dots + \frac{1}{(n^3 + n)^{\frac{1}{3}}}$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Solution

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^3 + k)^{1/3}} = \frac{1}{(n^3 + 1)^{1/3}} + \frac{1}{(n^3 + 2)^{1/3}} + \dots + \frac{1}{(n^3 + n)^{1/3}}$.

On a :

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n &\Rightarrow n^3 + 1 \leq n^3 + k \leq n^3 + n, \\ &\Rightarrow (n^3 + 1)^{1/3} \leq (n^3 + k)^{1/3} \leq (n^3 + n)^{1/3}, \\ &\Rightarrow \frac{1}{(n^3 + n)^{1/3}} \leq \frac{1}{(n^3 + k)^{1/3}} \leq \frac{1}{(n^3 + 1)^{1/3}}, \\ &\Rightarrow \frac{n}{(n^3 + n)^{1/3}} \leq u_n \leq \frac{n}{(n^3 + 1)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Et on a $\frac{n}{(n^3 + n)^{1/3}} \rightarrow 1$ et $\frac{n}{(n^3 + 1)^{1/3}} \rightarrow 1$
donc $u_n \rightarrow 1$.

.....

Exercice 4

On considère la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ pour tout $n \geq 1$

- (1) Montrer que $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 1$.
- (2) En déduire que (u_n) est majorée. Conclure.

Solution

Soit $u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$.

1. Montrons que : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ $\forall n \geq 1$. (Par récurrence)

2. On a : $\forall 1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}, \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}, \\ &\Rightarrow u_n \leq 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 1 + 2(1 - (1/2)^n), \\ &\Rightarrow u_n \leq 3. \end{aligned}$$

donc $(u_n)_n$ est majorée.

De plus $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ donc $(u_n)_n$ est strictement croissante.

Par conséquent $(u_n)_n$ est convergente.

.....

Exercice 5

(1) Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Montrer que cette suite est divergente.

Solution

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrons que $(u_n)_n$ est divergente. (Par absurde)

Si $(u_n)_n$ converge vers l on a aussi $\lim u_{2n} = l$

alors $\lim(u_{2n} - u_n) = l - l = 0$.

$$\text{D'autre part : } u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n &\Rightarrow n+1 \leq n+k \leq 2n, \\ &\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}, \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = u_{2n} - u_n, \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \lim(u_{2n} - u_n) = 0. \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

.....

Exercice 6

Pour $n \geq 2$, on pose

$$w_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Etudier la convergence de la suite (w_n) , puis calculer sa limite ?

Solution

Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad \omega_n = \sum_{k=2}^n \ln(1 - 1/k^2) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n [\ln(k-1) - 2 \ln k + \ln(k+1)]$$

$$k = 2 : \quad \ln(1) - 2 \ln(2) + \ln(3)$$

$$k = 3 : \quad \ln(2) - 2 \ln(3) + \ln(4)$$

$$k = 4 : \quad \ln(3) - 2 \ln(4) + \ln(5)$$

.

.

.

$$k = n - 2 : \quad \ln(n-3) - 2 \ln(n-2) + \ln(n-1)$$

$$k = n - 1 : \quad \ln(n-2) - 2 \ln(n-1) + \ln(n)$$

$$k = n : \quad \ln(n-1) - 2 \ln(n) + \ln(n+1)$$

$$\text{Après sommation on a : } u_n = -\ln(2) - \ln(n) + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2).$$

Donc $u_n \rightarrow -\ln 2$.

.....

Exercice 7

Pour $n \geq 1$, on définit u_n comme la somme de n termes par la formule

$$u_n = \frac{1}{n + \ln 1} + \frac{1}{n + \ln 2} + \frac{1}{n + \ln 3} + \cdots + \frac{1}{n + \ln n}$$

Etudier la convergence de la suite (u_n) .

Solution

$$\text{Soit } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \ln k}.$$

$$\begin{aligned} 1 \leq k \leq n &\Rightarrow 0 \leq \ln(k) \leq \ln(n), \\ &\Rightarrow n \leq n + \ln(k) \leq n + \ln(n), \\ &\Rightarrow \frac{1}{n + \ln(n)} \leq \frac{1}{n + \ln(k)} \leq \frac{1}{n}, \\ &\Rightarrow \frac{n}{n + \ln(n)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \ln(k)} = u_n \leq \frac{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \ln(n)} = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

.....

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$

- 1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 2) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{2^n}$. En déduire un majorant de u_n .
- 3) Montrer que la suite (u_n) converge. Trouver sa limite.

Solution

Soit

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1/2^n} \geq 0, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

1. On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 1/2^n} - u_n = \frac{u_n^2 + 1/2^n - u_n^2}{u_{n+1} + u_n} = \frac{1/2^n}{u_{n+1} + u_n} \geq 0$, donc (u_n) est croissante.

2. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1/2^n}{u_{n+1} + u_n}$,
 et $u_{n+1} + u_n \geq u_n \geq u_1 = 1$,
 donc $\forall n \geq 1, \frac{1}{u_{n+1} + u_n} \leq 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leq 1/2^n$,
 donc $u_{n+1} \leq u_n + 1/2^n, \forall n \geq 1$, et on a

$$\begin{aligned}
 u_n &\leq u_{n-1} + 1/2^{n-1}, \\
 &\leq u_{n-2} + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \\
 &\leq \cdot \\
 &\leq \cdot \\
 &\leq u_1 + 1/2 + 1/2^2 + \dots + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \quad (u_1 = 1) \\
 &\leq \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2.
 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est majorée par 2.

3. On a (u_n) est strictement croissante et majorée, donc elle converge. Et on a

$$\begin{aligned}
 u_n^2 &= u_{n-1}^2 + 1/2^{n-1}, \\
 &= u_{n-2}^2 + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \\
 &= \cdot \\
 &= \cdot \\
 &= u_1^2 + 1/2 + 1/2^2 + \dots + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \quad (u_1 = 1) \\
 &= \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 2(1 - 1/2^n).
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\lim u_n^2 = 2$, donc $\lim u_n = \sqrt{2}$ car $u_n \geq 0$.

Chapitre 3

Continuité et Dérivabilité des Fonctions

Exercice 1

En utilisant la définition, montrer que

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = 4$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + 1} = 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} = 1$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Solution

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = 4$.
on a $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$
Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ $f(x) = x^2 + x + 2$. $\forall \varepsilon > 0$, pour $x \in]0; 2[- \{1\}$
 $|f(x) - 4| = |x - 1||x + 2| < \varepsilon$ dès que $|x - 1| < \varepsilon/4$
Pour $\alpha = \inf(1, \varepsilon/4)$ on a donc $|x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$.
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + 1} = 0$.
 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{|x - 1|}{x^2 + 1} \leq |x - 1|$.
Pour $\alpha = \varepsilon$, on a $|x - 1| < \alpha \Rightarrow \frac{|x - 1|}{x^2 + 1} < \varepsilon \Rightarrow$ résultat
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.
 $\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| = |x - 1||x + 2|$.
Pour $x \in]0; 2[- \{1\}$ on a $\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| \leq 4|x + 2|$.

Posons $\alpha = \inf(1; \varepsilon/4)$ on a $|x - 1| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 1)^{1/3} = 1$.

$$(x^2 + x + 1)^{1/3} - 1 = \frac{x^2 + x}{(x^2 + x + 1)^{2/3} + (x^2 + x + 1)^{1/3} + 1} \leq |x^2| + |x|$$

car $x^2 + x + 1 > 0$. on peut prendre $\alpha \in [0; 1]$ par exemple.

Donc $(x^2 + x + 1)^{1/3} - 1 \leq |x^2| + |x| \leq 2|x|$ dès que $|x| < 1$.

Pour $\alpha = \inf(1, \varepsilon/2)$ on a donc $|x| < \alpha \Rightarrow |(x^2 + x + 1)^{1/3} - 1| < \varepsilon$.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Soit $a > 0$, on a $x < -\sqrt{a} \Rightarrow x^2 > a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

.....

Exercice 2

Soit a et b deux réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.

Solution

Soit

$$\begin{cases} f(x) = ax + b, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{1+x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. f est continue si et seulement si f est continue en 0.

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow 1 = b = f(0)$.

- 2.

$$\begin{cases} f'(x) = a, & \text{si } x < 0 \\ f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'_d(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = -1, \quad \text{et } f'_g(0) = a.$$

Donc f est dérivable ssi $f'(0) = -1$

d'où $a = -1$ et $b = 1$.

.....

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$$

- 1) Montrer que la fonction f est 2π -périodique.
- 2) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 3) Montrer que la fonction f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $f'(\frac{\pi}{2})$.

Solution

Soit f une fonction vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|$.

1. Montrons que f est 2π -périodique

$$0 \leq |f(x + 2\pi) - f(x)| \leq |\sin(x + 2\pi) - \sin x| = |\sin x - \sin x| = 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)$.

2. On a (d'après T.A.F)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |\sin x - \sin x_0|, \\ &\leq |\cos c| |x - x_0| \leq |x - x_0|. \end{aligned}$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \varepsilon : |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Donc f est continue en x_0 pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

- 3.

$$\left| \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \leq \left| \frac{\sin x - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} \right|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left| \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| &= \left| \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \leq \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\sin x - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{et } \left| \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| = |\sin'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0| = 0$$

donc $f'(\pi/2) = 0$.

.....

Exercice 4

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c)$.
- 2) Déterminer les valeurs possibles de c .

Solution

Soit

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3-x^2}{2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Montrons que f est continue en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

Donc f est continue sur $[0; 2]$.

$$f'_g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 1}{2} = -1,$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = -1,$$

donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = -1$.

Par suite f est continue sur $[0; 2]$ et dérivable sur $]0; 2[$,

d'après le T.A.F, $\exists c \in]0; 2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c)$.

2. On a $f(2) = 1/2$, $f(0) = 3/2$

donc $1/2 - 3/2 = 2f'(c) = -1$ d'où $f'(c) = -1/2$, et on a

$$\begin{cases} f'(x) = -x, & \text{si } x \leq 1 \\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $c \in]0; 1[$ donc $-c = -1/2 \Rightarrow c = 1/2$.

Si $c \in]1; 2[$ donc $-1/c^2 = -1/2 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$.

.....

Exercice 5

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Solution

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Soit $g(x) = \ln(f(x))$ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

D'après le T.A.F, il $\exists c \in]a; b[$ tel que

$$g(b) - g(a) = \ln(f(b)) - \ln(f(a)) = (b - a)g'(c) = (b - a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Rightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a)\frac{f'(c)}{f(c)},$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

.....

Exercice 6

Pour $n \geq 2$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x - \cos\left(\frac{x}{n}\right)$

- 1) Montrer que f_n est strictement croissante ; en déduire qu'il existe un unique réel x_n tel que $x_n = \cos\left(\frac{x_n}{n}\right)$. Montrer que $x_n \in]0, 1[$.
- 2) Montrer que $\forall x \in]0, 1[$, on a $\cos\left(\frac{x}{n}\right) < \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$. En déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.
- 3) Montrer que (x_n) converge vers 1.

Solution

Pour $n \geq 2$, soit $f_n(x) = x - \cos(x/n)$.

1. $f'_n(x) = 1 - (1/n)\sin(x/n) \geq 1 - 1/n > 0$ car $n \geq 2$.

Donc f_n est strictement croissante,

$$f_n(1) = 1 - \cos(1/n) > 0 \quad \text{et} \quad f_n(0) = -\cos(0) = -1 < 0.$$

De plus f_n est continue et $f_n(0)f_n(1) < 0$.

Donc d'après le T.V.I $\exists x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$ d'où $x_n = \cos(x_n/n)$.

x_n est unique car f_n est strictement croissante.

2. On a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ et $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n} < \frac{1}{n} \leq 1$

et $\cos$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$ donc $\cos\left(\frac{x}{n}\right) < \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$

On a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{x_n}{n}\right) < \cos\left(\frac{x_n}{n+1}\right) &\Rightarrow x_n - \cos\left(\frac{x_n}{n}\right) > x_n - \cos\left(\frac{x_n}{n+1}\right), \\ &\Rightarrow 0 = f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_n), \\ &\Rightarrow x_{n+1} > x_n. \quad (f_{n+1} \text{ est strictement croissante}). \end{aligned}$$

3. On a (x_n) est strictement croissante et majorée donc elle converge ($x_n \in]0, 1[$)

$$\lim x_n = \lim \cos(x_n/n) \cos(\lim x_n/n) = \cos 0 = 1$$

car (x_n) est bornée et $1/n \rightarrow 0$ donc $x_n/n = x_n \times 1/n \rightarrow 0$

Donc $\lim x_n = 1$.

.....

Exercice 7

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Solution

Soit $g(x) = f(x + 1/2) - f(x)$ continue sur $[0, 1/2]$

$g(0) = f(1/2) - f(0) = f(1/2) - f(1)$ et $g(1/2) = f(1) - f(1/2) = -g(0)$ donc $g(0)g(1/2) \leq 0$.

D'après le T.V.I, $\exists c \in [0, 1/2]$ tel que $g(c) = 0$.

Donc $f(c + 1/2) = f(c)$.

.....

Exercice 8

Déterminer la dérivée n -ème de la fonction réelle f définie par $f(x) = x^3 e^x$, et calculer $f^{(n)}(0)$.

Solution

Soit $f(x) = x^3 e^x$. Calculer $f^{(n)}(0)$

Posons $f(x) = h(x)g(x)$ avec $h(x) = x^3$ et $g(x) = e^x$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad (\text{Formule de Leibnitz})$$

Or $g^{(n-k)}(x) = e^x$, $h'(x) = 3x^2$, $h''(x) = 6x$, $h^{(3)}(x) = 6$, et $h^{(4)}(x) = 0$, donc $\forall k \geq 4$, $h^{(k)}(x) = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= e^x (C_n^0 h(x) + C_n^1 h'(x) + C_n^2 h''(x) + C_n^3 h^{(3)}(x)), \\ &= e^x (C_n^0 x^3 + 3C_n^1 x^2 + 6C_n^2 x + 6C_n^3). \end{aligned}$$

Donc $f^{(n)}(0) = 6C_n^3$.

.....

Exercice 9

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que l'on a :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$

- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$
 3) $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) < x$
 4) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$

Solution

1. $\sin x$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$,
 d'après le T.A.F, $\exists c \in]0, x[$ tel que $\sin x - \sin 0 = x \cos c$
 donc $|\sin x| = |x| |\cos c| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
2. e^x est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$,
 d'après le T.A.F, $\exists c \in]0, x[$ tel que $e^x - e^0 = x e^c$
 donc $e^x - 1 = x e^c$ d'où $e^x = 1 + x e^c$.

$$1 + x \leq e^x \iff 1 + x \leq 1 + x e^c, \\ \iff x \leq x e^c.$$

Si $x \geq 0$: Mq $1 \leq e^c$ pour $c \in]0, x[$

$$0 < c \Rightarrow 1 < e^c$$

Si $x < 0$: Mq $1 \geq e^c$ pour $c \in]x, 0[$

$$c < 0 \Rightarrow e^c \leq e^0 = 1$$

Si $x = 0$: $1 + 0 \leq e^0 = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$

3. est équivalente à 2)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x \leq e^x \iff \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \in]-1, +\infty[$$

4. $\arctan x - \arctan 0 = x \arctan' c = \frac{x}{1+c^2}$ avec $c \in]0, x[$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \Rightarrow 1 < 1 + c^2 < 1 + x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} = \arctan x < x,$$

.....

Exercice 10

Montrer les relations suivantes :

- 1) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$.
 2) Résoudre l'équation $\arccos x - \arcsin x = \frac{5\pi}{6}$.

Solution

1. (a) $\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\cos(\arcsin x)}$.

Or

$$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

(b) $\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sin(\arccos x)}{x}$.

Or $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1 \Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c)

$$\arcsin x = \arccos(\sqrt{1 - x^2}) \iff \sin(\arcsin x) = \sin(\arccos \sqrt{1 - x^2})$$

$$\iff \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ (déjà vu)}$$

2. Résoudre $\arccos x - \arcsin x = \frac{5\pi}{6}$
on sait que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

donc

$$2 \arccos x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \arccos x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos(\arccos x) = \cos(2\pi/3) \Rightarrow x = \cos(2\pi/3)$$

Chapitre 4

Développement Limité

Exercice 1

Calculer $e^{\frac{1}{6}}$ et $\ln(\frac{4}{3})$ à 10^{-3} près.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule de Mac-Laurin permet d'affirmer qu'il existe $c \in]0, 1/6[$ tel que :

$$e^{\frac{1}{6}} - 1 - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{n!6^n} = \frac{e^c}{(n+1)!6^{(n+1)}}.$$

Et, comme $e^c < e^{\frac{1}{6}} < 2$, donc

$$0 < e^{\frac{1}{6}} - 1 - \frac{1}{6} - \dots - \frac{1}{n!6^n} < \frac{2}{(n+1)!6^{(n+1)}}.$$

Il suffit de choisir n tel que

$$\frac{2}{(n+1)!6^{(n+1)}} \leq 10^{-3},$$

soit $(n+1)!6^{(n+1)} \geq 2 \cdot 10^3$.

Cette inégalité est satisfaite pour $n \geq 3$.

Pour $n = 3$, on a

$$e^{\frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2 \cdot 6^2} + \frac{1}{3 \cdot 6^3} = \frac{1531}{1296} \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

autrement dit

$$e^{\frac{1}{6}} = 1,181 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près (par défaut)}$$

2. Posons $f(x) = \ln(1+x)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

La formule de Mac-Laurin donne l'existence d'un réel $c \in]0, 1/3[$ tel que :

$$\ln \frac{4}{3} = \ln \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n \cdot n} + \frac{(-1)^n}{3^n \cdot (n+1)(1+c)^{n+1}}.$$

Or $\left| \frac{(-1)^n}{3^n \cdot (n+1)(1+c)^{n+1}} \right| < \frac{1}{3^n \cdot (n+1)}$, donc il suffit de choisir $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \leq 10^{-3}$$

soit

$$(n+1)3^{n+1} \geq 10^3.$$

Cette inégalité est vérifiée pour $n \geq 4$.

Pour $n = 4$, on a

$$\ln \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} - \frac{1}{3^4 \cdot 4} = \frac{93}{324} \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près}$$

autrement dit

$$\ln \frac{4}{3} = 0,287 \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près (par défaut)}$$

.....

Exercice 2

Donner les développements limités d'ordre 3, au voisinage de 0, des fonctions réelles suivantes :

(a) $f(x) = \sin x(1 + \cosh x)$

(b) $g(x) = \ln(1 + \sin x)$

(c) $h(x) = \frac{\exp(x)}{1 + \sinh x}$.

Solution

1. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et

$$(1 + \cosh x) = 2 + \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

donc

$$\begin{aligned}\sin x(1 + \cosh x) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \left(2 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \\ &= 2x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= 2x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

2. On a :

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3);$$

donc

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left[1 - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3\right] + o(x^3),$$

soit

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(1 - x - \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3\right) + o(x^3).$$

D'où

$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

.....

Exercice 3

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.
- (b) Montrer que f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Solution

1. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0);$$

donc, f est continue à droite en 0. Et, puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0,$$

alors f est dérivable à droite en 0 et l'on a

$$f'_d(0) = 0.$$

2. S'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varepsilon(x) = 0$, alors

$$a + bx + cx^2 = x^2(\ln x - \varepsilon(x)).$$

Si l'on fait tendre x vers 0^+ , on obtient $a = 0$; et, donc

$$b + cx = x(\ln x - \varepsilon(x)).$$

Si, de nouveau, on fait tendre x vers 0^+ , on obtient $b = 0$; d'où

$$c = \ln x - \varepsilon(x).$$

Par conséquent,

$$c = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \varepsilon(x)) = -\infty,$$

ceci étant absurde; donc, f n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

.....

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$; $a, b \in \mathbb{R}^*$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - x\sqrt{1-x}}{\sin x - \tanh x}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$

Solution

1. On a :

$$\ln(\cos(ax)) = \ln(1 + (\cos(ax) - 1))$$

$$\ln(\cos(bx)) = \ln(1 + (\cos(bx) - 1));$$

et, puisque

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2),$$

$$\cos(ax) = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\cos(bx) = 1 - \frac{b^2x^2}{2} + o(x^2),$$

alors

$$\ln(\cos(ax)) = -\frac{a^2x^2}{2} + o(x^2), \quad \text{et} \quad \ln(\cos(bx)) = -\frac{b^2x^2}{2} + o(x^2),$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a^2x^2}{2}}{-\frac{b^2x^2}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

2. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$x\sqrt{1-x} = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$$

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

et

$$\begin{aligned} \ln(1+\sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\ln(1+\sin x) - x\sqrt{1-x}}{\sin x - \tanh x} = \frac{\frac{7}{24}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}.$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x) - x\sqrt{1-x}}{\sin x - \tanh x} = \frac{7}{4}$$

.....

Exercice 5

Faire l'étude locale au voisinage de 0 des fonctions réelles suivantes :

(1) $f(x) = \ln(\cos x) + \sqrt{x^2 + 1}$

(2)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{1+x^2}} - 1}{x} - x + x^3 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solution

1. Au voisinage de 0, on a

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1));$$

et, puisque

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$$

et

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

alors

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

par suite

$$\ln(\cos x) + \sqrt{x^2 + 1} - 1 = -\frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

et, comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{5}{24}x^4 \leq 0,$$

donc f présente un maximum en 0.

2. Faisons le développement limité d'ordre 6, au voisinage de 0, de g . On a

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{1+x^2}} = \exp\left(\frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}\right)$$

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6),$$

et

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6).$$

Il en résulte que l'on a

$$\frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} = \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) (1 - x^2 + x^4 - x^6) + o(x^6)$$

donc

$$\frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} = x^2 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{6}x^6 + o(x^6),$$

d'où

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 - x^4 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6);$$

par suite

$$g(x) = \frac{1}{2}x^5 + o(x^5).$$

Et, puisque

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{2}x^5 > 0 \quad \text{et} \quad \forall x < 0, \quad \frac{1}{2}x^5 < 0$$

alors g présente un point d'inflexion en 0.

.....

Exercice 6

Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x - \sinh x}{\sin x - \tanh x}$$

- (1) Montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction réelle g dérivable en 0.
- (2) Étudier la position du graphe de g par rapport à la tangente pour $x = 0$.

Solution

1. Déterminons le développement limité d'ordre 5, au voisinage de 0, de f . On a

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\sin x - \sinh x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^5)$$

et

$$\sin x - \tanh x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + o(x^5);$$

donc

$$\frac{\sin x - \sinh x}{\sin x - \tanh x} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^5)}{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + o(x^5)}$$

par suite

$$f(x) = -2 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2);$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2.$$

On déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & \text{si } x \neq 0 \\ g(x) = -2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\frac{3}{2}x + o(x);$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0,$$

ce qui montre que g est dérivable en 0 et que l'on a $g'(0) = 0$.

2. L'équation de la tangente au graphe de g , pour $x = 0$, est définie par $y = -2$.

Or

$$g(x) + 2 = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

donc g présente un maximum en 0 d'une part, et d'autre part le graphe de g est situé au dessous de la tangente, à ce graphe, au point $(0, -2)$, au voisinage de 0.