Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

Année universitaire 2018/19
LST MA - Module M 514
Responsable : M. TILIOUA

Feuille d'exercices 1

Exercice 1

1. Soit $T = (t_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^n$; $U = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^n$ deux matrices triangulaires inférieures (respectivement supérieures). Montrer que $A = TU$ est triangulaire inférieure (respectivement supérieure).
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n,p}$. On pose $B = AA^*$ et $C = A^*A$. Montrer que les matrices B et C admettent les mêmes valeurs propres non nulles. En déduire que $\rho(B) = \rho(C)$.

Corrigé 1

1. On a
$$t_{ij} = 0 \text{ si } i < j \text{ et } u_{ij} = 0 \text{ si } i < j$$
Montrons que $A = TU$ est triangulaire inférieure : $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Soit $i < j$. On a
$$a_{ij} = (TU)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{i} \underbrace{t_{ik}}_{\substack{=0\\ k\,\leq\, i,j}} u_{kj} + \sum_{k=i+1}^{j} \underbrace{t_{ik}}_{\substack{=0\\ i\,\leq\, k}} u_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} \underbrace{t_{ik}}_{\substack{=0\\ k\,\geq\, j+1\,\geq\, i}} u_{kj} = 0$$
2. On a $A^\top = (TU)^\top = U^\top T^\top$ inférieure d'après 1. Alors A est supérieure.
3. Montrons que les matrices B et C admettent les mêmes valeurs propres non nulles. Remarquons d'abord que les matrices B et C sont hermitiennes.
Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $B = AA^*$. Il existe alors $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Bv = \lambda v$, i.e.,
$$AA^*v = \lambda v. \tag{1}$$
D'où
$$A^*A(A^*v) = \lambda A^*v$$
Or $w = A^*v \neq 0$, car sinon $\lambda v = 0$ d'après (1) ce qui est impossible car $\lambda \neq 0$ et $v \neq 0$. Par suite, il existe $w \neq 0$, $A^*Aw = \lambda w$ donc λ est une valeur propre de $C = A^*A$.
De même, on montre que toute valeur propre non nulle de C est une valeur propre de B.
Ainsi
$$\{\lambda \neq 0, \lambda \text{ valeur propre de } B\} = \{\lambda \neq 0, \lambda \text{ valeur propre de } C\}.$$
En déduire que $\rho(B) = \rho(C)$. On a $\rho(B) = \sup\limits_i |\lambda_i|$, λ_i valeur propre de B.
Premier cas $\rho(B) \neq 0$. Alors il est clair, d'après ce qui précède, que $\rho(B) = \rho(C)$.
Deuxième cas $\rho(B) = 0$. Alors nécessairement $\rho(C) = 0$, car sinon il existe $\lambda \neq 0$ valeur propre de C, qui serait aussi valeur propre de B. ($\rho(B) = 0$ implique que toutes les valeurs propres de B sont nulles).

Exercice 2 Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{K}^{n,n}$. Pour p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, on notera $||A||_p$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $||x||_p$. Montrer que

$$||A||_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Corrigé 2

1. Cas de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $x = (x_0 n \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\leq (\sum_{j=1}^{n} |x_j|) \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|x\|_1 \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Donc on obtient

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leq \sup_{\|x\|_1=1} \|x\| \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{2}$$

Alors

$$\|A\|_1 \leq \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Soit maintenant j_0 tel que $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

On définit le vecteur $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_j^0, \ldots, x_n^0)^\top \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x_j^0 = \begin{cases} 1 \text{ si } j = j_0 \\ 0 \text{ si } j \neq j_0 \end{cases}$$

Alors on obtient

$$\|Ax^0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax^0)_i| = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}x_{j_0}^0| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| \leq \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \|A\|_1 \tag{3}$$

(2) et (3) donnent

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2. Cas de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $x = (x_0, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |(Ax)_i| = \max_{i=1,\ldots,n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|$$

$$\leq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} (|a_{ij}| \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|) = (\max_{i=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|) \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$$

$$= (\max_{i=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|)\|x\|_\infty$$

Donc on obtient

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \leq \sup_{\|x\|_\infty=1} \|x\|_\infty \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{4}$$

Alors

$$\|A\|_\infty \leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Soit maintenant i_0 tel que $\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$.

On définit le vecteur $x^0 = (x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)^\top \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x_j^0 = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{i_0 j} \geq 0 \\ \\ -1 \text{ si } a_{i_0 j} < 0 \end{cases}$$

Si $\forall j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} = 0$ c'est-à-dire si la matrice A est nulle alors $\|A\|_\infty = 0$. Sinon on a $\|x^0\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned} \|Ax^0\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0| \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j^0| \\ &= |\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \end{aligned} \tag{5}$$

Comme $\|x^0\|_\infty = 1$, x^0 est l'un des vecteurs de la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et de l'équation (5), on déduit que

$$\|A\|_\infty \geq \|Ax^0\|_\infty \geq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$$

On conclut que

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Exercice 3

1. Soit $D = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice diagonale. Montrer que

$$\|D\|_1 = \|D\|_\infty = \|D\|_2 = \max_{1\leq k\leq n} |d_{kk}|$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ et soit $U, V \in \mathbb{R}^{n,n}$ deux matrices orthogonales. Montrer que

$$\|VAU\|_2 = \|A\|_2.$$

Corrigé 3

1. • $||D||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |d_{ij}| = \max_{1\leq j\leq n} |d_{jj}| = \rho(D).$

- $||D||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |d_{ij}| = ||D^\top||_1 = ||D||_1$ puisque D est diagonale donc symétrique.
- $||D||_2 = \sqrt{\rho(D^* D)} = \sqrt{\rho(D^2)} = \rho(D) = \max_{1\le k\le n} |d_{kk}|$.

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ et soit $U, V \in \mathbb{R}^{n,n}$ deux matrices orthogonales. Alors $UU^\top = U^\top U = I$ et $VV^\top = V^\top V = I$. Montrons que $||VAU||_2 = ||A||_2$.

   On a

$$
\begin{aligned}
||VAU||_2^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{||VAUx||_2}{||x||_2} &= \sup_{x\neq 0} \frac{(VAUx, VAUx)}{||x||_2^2} \\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{(AUx, V^\top VAUx)}{||x||_2^2} \\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{(AUx, AUx)}{||x||_2^2} \\
&\underset{y=Ux}{=} \sup_{y\neq 0} \frac{(Ay, Ay)}{||U^{-1}y||_2^2} \\
&= \sup_{y\neq 0} \frac{||Ay||_2^2}{||y||_2^2} \text{ car } ||U^{-1}y||_2 = ||U^\top y||_2 \underset{\text{car } U^\top \text{ unitaire}}{=} ||y||_2 \\
&= ||A||_2^2
\end{aligned}
$$

   Ainsi $||VAU||_2 = ||A||_2$.

Exercice 4 Soit $\|.\|$ une norme vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et $|||.|||$ la norme matricielle subordonnée associée.

1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ inversible et soit λ une valeur propre de A. Montrer que

$$|||A||| \ge |\lambda| \ge \frac{1}{|||A^{-1}|||}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{1}{|||A^{-1}|||} \le \frac{||Ax||}{||x||} \le |||A|||.$$

Corrigé 4

1. On a

$$|||A||| \equiv \sup_{v\neq 0} \frac{||Av||}{||v||} \ge \frac{||Av_0||}{||v_0||}$$

   où v_0 est un vecteur propre associé à λ : $Av_0 = \lambda v_0$. D'où

$$|||A||| \ge |\lambda|.$$

   Par ailleurs, comme $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de A alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} : il existe w_0 tel que $A^{-1}w_0 = \frac{1}{\lambda} w_0$. Et par suite on a

$$|||A^{-1}||| \equiv \sup_{v\neq 0} \frac{||A^{-1}v||}{||v||} \ge \frac{||A^{-1}w_0||}{||w_0||} = \frac{1}{|\lambda|}$$

   d'où

$$|\lambda| \ge \frac{1}{|||A^{-1}|||}$$

   Ainsi

$$|||A||| \ge |\lambda| \ge \frac{1}{|||A^{-1}|||}$$

2. Il est clair, par définition d'une norme matricielle subordonnée, que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \frac{||Ax||}{||x||} \leq |||A|||.$$

Par ailleurs, on a

$$|||A^{-1}||| = \sup_{y \neq 0} \frac{||A^{-1}y||}{||y||} = \underset{x=A^{-1}y}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{||x||}{||Ax||}$$

D'où

$$|||A^{-1}||| \geq \frac{||x||}{||Ax||}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Finalement on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \quad \frac{1}{|||A^{-1}|||} \leq \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Exercice 5 Soient A et $A + \delta A$ deux matrices d'ordre n inversibles et soit $||.||$ une norme matricielle subordonnée. Montrer que

$$\frac{||(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}||}{||(A + \delta A)^{-1}||} \leq \text{cond}(A)\frac{||\delta A||}{||A||}.$$

Corrigé 5 On a

$$(A + \delta A)^{-1} - A^{-1} = (A + \delta A)^{-1}[I - (A + \delta A)A^{-1}] = (A + \delta A)^{-1}(-\delta A A^{-1})$$

d'où

$$||(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}|| \leq ||(A + \delta A)^{-1}|| ||\delta A|| ||A^{1}||$$

et par suite

$$\frac{||(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}||}{||(A + \delta A)^{-1}||} \leq ||\delta A|| ||A^{-1}|| \underset{||A|| \neq 0}{=} \frac{||\delta A||}{||A||} \underbrace{||A|| ||A^{-1}||}_{\text{cond}(A)}$$

Exercice 6 On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & -\alpha \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \dots & -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha} & \dots & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ -\frac{\gamma}{\alpha} & \ddots & -\frac{\gamma}{\alpha} & \vdots \\ \vdots & -\frac{\gamma}{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha} & -\frac{\gamma}{\alpha} \\ -\frac{\gamma}{\alpha} & \dots & -\frac{\gamma}{\alpha} & \frac{\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}$$

1. Calculer γ et β pour que B soit l'inverse de A.
2. Calculer le conditionnement $K_\infty(A)$ en fonction de n et en calculer la limite pour n qui tend vers l'infini.

Corrigé 6

1. Par définition, B est la matrice inverse de A si $AB = BA = I$. Comme

$$AB = \begin{pmatrix} \beta + \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \beta + \gamma & & 0 \\ -\beta + (n-1)\gamma & \dots & -\beta + (n-1)\gamma & n\gamma \end{pmatrix}$$

Il faut que

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ -\beta + (n-1)\gamma = 0 \\ n\gamma = 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\beta = \frac{n-1}{n}, \quad \gamma = \frac{1}{n}.$$

2. On trouve immédiatement $||A||_\infty = n|\alpha|$ tandis que

$$||A^{-1}||_\infty = \frac{1}{|\alpha|} \max\{1, \frac{2n-2}{n}\} = \frac{2}{|\alpha|}.$$

On conclut que le conditionnement $\text{cond}_\infty(A)$ en fonction de n est

$$\text{cond}_\infty(A) = n|\alpha|\frac{2}{|\alpha|} = 2n.$$

La matrice est donc mal conditionnée pour n grand.

Exercice 7 Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. En écrivant A sous la forme $A = 4(I_n - N)$ où n est à déterminer, montrer que A est inversible et que $||A^{-1}||_\infty \geq \frac{1}{2}$. En déduire un majorant de $\text{cond}_\infty(A)$.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $2 \leq |\lambda| \leq 6$.

Corrigé 7 On rappelle d'abord le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $|||.|||$ une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle et $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ telle que $|||A||| < 1$. Alors $I_n + A$ est inversible et $|||(I_n + A)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||A|||}$.*

1. $A = 4(I - N)$, où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$||N||_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|N_{ij}| = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} < 1$, d'où $I-N$ est inversible et par suite A est inversible.
De plus, on a

$$||A^{-1}||_\infty = \frac{1}{4}||(I-N)^{-1}||_\infty \le \frac{1}{4}\frac{1}{1-||N||_\infty} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Alors

$$||A^1||_\infty \le \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, $\mathrm{cond}_\infty(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty \le \frac{1}{2}||A||_\infty$. Or $||A||_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = 6$. Ainsi $\mathrm{cond}_\infty(A) \le 3$.

2. Soit λ une valeur propre de A. Montrons que $2 \le |\lambda| \le 6$.
   Soit v_0 un vecteur propre associé à λ : $Av_0 = \lambda v_0$. On a alors : $6 = ||A||_\infty \ge \frac{||Av_0||_\infty}{||v_0||_\infty} = |\lambda|$.
   A étant inversible, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}. Soit v_1 un vecteur propre associé à $\frac{1}{\lambda}$. On a

$$\frac{1}{2} \ge ||A^{-1}||_\infty \ge \frac{||A^{-1}v_1||_\infty}{||v_1||_\infty} = \frac{1}{|\lambda|}$$

   d'où $|\lambda| \ge 2$. Ainsi

$$2 \le |\lambda| \le 6.$$