Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

Année universitaire 2015/16
LST MA - Module M 514
Responsable : M. TILIOUA

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Soit A une matrice à diagonale strictement dominante. Montrer que les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.

Exercice 2 Soit le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Approcher la solution avec la méthode de Jacobi avec 3 itérations à partir de $x^0 = (2, 2, 2)$.
2. Approcher la solution avec la méthode de Gauss-Seidel avec 3 itérations à partir de $x^0 = (2, 2, 2)$.
3. Résoudre le système linéaire par la méthode d'élimination de Gauss.
4. Factoriser la matrice A (sans utiliser la technique du pivot) et résoudre le système linéaire.

Corrigé 2

1. On a
$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \; x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \; x^{(2)} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -2/3 \\ 10/9 \end{pmatrix} ; \; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 52/27 \\ -13/12 \\ 31/36 \end{pmatrix}$$
Ainsi
$$x \approx \begin{pmatrix} 1.926 \\ -1.083 \\ 0.861 \end{pmatrix}$$
2. On a
$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; \; x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x^{(2)} = \begin{pmatrix} 35/18 \\ -35/36 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; x^{(3)} = \begin{pmatrix} 431/216 \\ -431/432 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi
$$x \approx \begin{pmatrix} 1.995 \\ -0.995 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. On trouve
$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Factorisation LU.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; U = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 11/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système $Ax = b$, on résout successivement $Ly = b$ (qui donne $(12, -4, 6)^\top$) et $Ux = y$ pour trouver

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de α, la matrice A est-elle définie positive ?
2. Montrer que pour tout $\alpha \in]-1/2, 1[$, la méthode de relaxation converge pour tout $\omega \in]0, 2[$.
3. Écrire la matrice $\mathcal{J}$ de la méthode de Jacobi correspondante. Pour quelles valeurs de α, la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
4. Écrire la matrice $\mathcal{L}_1$ de la méthode de Gauss-Seidel correspondante. Calculer $\rho(\mathcal{L}_1)$.
5. Pour quelles valeurs de α, la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi ?

Corrigé 3

1. Cherchons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A est définie positive.

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda+2\alpha & 1-\lambda+2\alpha & 1-\lambda+2\alpha \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda+2\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1-\lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda+2\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda-\alpha \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda+2\alpha)(1-\lambda-\alpha)^2 \end{aligned}$$

donc

$$Sp(A) = \{1 + 2\alpha, 1 - \alpha\}.$$

Ainsi, A est définie positive si et seulement si $1 + 2\alpha > 0$ et $1 - \alpha > 0$. Alors

$$A \text{ est définie positive si et seulement si } \alpha \in]-\frac{1}{2}, 1[.$$

2. On a pour tout $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 1[$, la matrice A est symétrique définie positive. Alors, la méthode de relaxation est convergente pour $w \in]0, 2[$.

3. On $\mathcal{J} = D^{-1}(E+F);\ D = I;\ E+F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.

   Cherchons les valeurs de α pour lesquelles la méthode de Jacobi est convergente.

   La méthode de Jacobi converge $\Longleftrightarrow \rho(y) < 1$, or $\rho(y) = 2|\alpha|$ d'où

   La méthode de Jacobi converge $\Longleftrightarrow 2|\alpha| < 1 \Longleftrightarrow \alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

4. $\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$: matrice de la méthode de Gauss-Seidel.

$$D-E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ (D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2-\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2-\alpha \\ 0 & \alpha^2-\alpha & -\alpha(\alpha^2-\alpha)+\alpha^2 \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 1-\alpha \\ 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-2\alpha \end{pmatrix} = -\alpha\widetilde{\mathcal{L}}_1$$

   Calculons $\rho(\mathcal{L}_1) = |\alpha|\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_1)$. Calculons

$$P_\lambda(\widetilde{\mathcal{L}}_1) = -\lambda(\lambda^2 + (3\alpha+\alpha^2)\lambda + \alpha).$$

   Résolution de l'équation. $\Delta = \alpha(\alpha-1)^2(\alpha-4)$.

   - $\Delta \geq 0$ pour $\alpha \in]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup [4, +\infty[;\ \sqrt{\Delta} = |\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}$.

$$Sp(\widetilde{\mathcal{L}}_1) = \{0, \frac{(\alpha^2-3\alpha)+|\alpha-1|\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{2}, \frac{(\alpha^2-3\alpha)-|\alpha-1|\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{2}\}$$

   - $\Delta < 0$ pour $\alpha \in]0, 4[\backslash\{1\}$

$$Sp(\widetilde{\mathcal{L}}_1) = \{0, \frac{1}{2}[(\alpha^2-3\alpha)^2 \pm i|\alpha-1|\sqrt{-4\alpha(\alpha-4)}]\}$$

$$[\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_1)]^2 = \frac{1}{4}[(\alpha^2-3\alpha)^2 + (\alpha-1)^2\alpha(4-\alpha)] = \frac{1}{4}[\alpha^2(\alpha^2-6\alpha+9) + (\alpha^2-2\alpha+1)(4\alpha-\alpha^2)]$$

   D'où

$$[\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_1)]^2 = \alpha \Longrightarrow \rho(\widetilde{\mathcal{L}}_1)] = \sqrt{\alpha}(\text{ ici } \alpha \text{ est } t > 0).$$

   Par suite $\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_1) = \alpha\sqrt{\alpha}$.
   Ainsi on a

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_1) = \begin{cases} \frac{|\alpha|}{2}((\alpha^2-3\alpha)+|\alpha-1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}) \text{ si } \alpha \in]-\alpha, 0[\cup\{1\}\cup[4,+\infty[\\ \alpha\sqrt{\alpha} \text{ si } \alpha \in]0,4[\backslash\{1\} \end{cases}$$

5. Cherchons les valeurs de α pour lesquelles la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi, i.e, $\rho(\mathcal{L}_1) \leq \rho(J)$. Calculons d'abord $\rho(J)$:$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$P_\lambda(\mathcal{J}) = \det(\mathcal{J}_\lambda I) = -(\alpha+2\alpha)(\alpha-\lambda)(-\lambda+\alpha)$$

D'où

$$Sp(\mathcal{J}) = \{-2\alpha, \alpha, \alpha\}$$

et par suite

$$\rho(\mathcal{J}) = 2|\alpha|.$$

La méthode de Jacobi est convergente si et seulement si $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

La méthode de Gauss-Seidel est convergente si et seulement si $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$.

Comparons les deux méthodes :

On a

Premier cas : $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[$. $\rho(\mathcal{J}) = 2|\alpha|$ et $\rho(\mathcal{L}_1) = \frac{|\alpha|}{2}((\alpha^2 - 3\alpha) + |\alpha - 1|\sqrt{\alpha(\alpha-4)}) < \frac{|\alpha|}{2}[\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{3}{2}] = 2|\alpha|(< 1)$. Ainsi $\rho(\mathcal{L}_1) < \rho(\mathcal{J})$.

Deuxième cas : $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$. $\rho(\mathcal{J}) = 2|\alpha| = 2\alpha$ et $\rho(\mathcal{L}_1) = \alpha\sqrt{\alpha} < \alpha\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\alpha = \rho(\mathcal{J})$.

Conclusion : Pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi.

Exercice 4 Calculer, lorsqu'il est possible, la factorisation LU des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Comment peut-on modifier l'algorithme de factorisation pour pouvoir toujours aboutir à une factorisation LU lorsque la matrice est inversible ?

Corrigé 4

Matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{1}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{1}L_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

La factorisation LU ne peut pas être calculée car à la prochaine étape il faudrait effectuer le changement $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{6}{0}L_2$.

Matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{1}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{1}L_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La factorisation LU de la matrice B est donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'un pivot est nul, la méthode de Gauss pour calculer la factorisation LU de la matrice A n'est plus applicable. De plus, si le pivot n'est pas nul mais très petit, l'algorithme conduit à des erreurs d'arrondi importantes. C'est pourquoi des algorithmes qui échangent les éléments de façon à avoir le pivot le plus grand possible ont été développés. Les programmes optimisés intervertissent les lignes à chaque étape de façon à placer en pivot le terme de coefficient le plus élevé : c'est la méthode du pivot partiel. Pour la matrice A cela aurait donné

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{1} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{1} L_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bien évidemment, il faut garder trace de cet échange de lignes pour qu'il puisse être répercuté sur le terme source et sur l'inconnue lors de la résolution du système linéaire ; ceci est réalisé en introduisant une nouvelle matrice P, dite matrice pivotale, telle que $PA = LU$: la résolution du système linéaire $Ax = b$ est donc ramené à la résolution des deux systèmes triangulaires $Ly = Pb$ et $Ux = y$. Dans notre exemple cela donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Soit α un paramètre réel et soient les matrices A_α, P et le vecteur b définis par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. À quelle condition sur α, la matrice A_α est inversible ?
2. À quelle condition sur α, la matrice A_α admet-elle une décomposition LU (sans pivot) ?
3. Soit $\alpha = -1$. Calculer, si elle existe, la décomposition LU de la matrice $M = PA_\alpha$.
4. Soit $\alpha = -1$. Résoudre le système linéaire $Ax = b$ en résolvant le système linéaire $Mx = Pb$.

Corrigé 5

1. On a $\det(A) = -6 - 5\alpha$. La matrice est inversible si et seulement si $\alpha \neq -\frac{6}{5}$.
2. Pour une matrice A carrée d'ordre n quelconque, la factorisation de Gauss existe si et seulement si les sous matrices principales A_i de A d'ordre $i = 1, \dots, n-1$ sont inversibles. On a unicité si les sous-matrices principales d'ordre n est inversible. Pour la matrice A_α on a les sous-matrices principales suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A_2) = 2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(A_2) = -4(1+\alpha)$$

   Par conséquent, la matrice A_α admet une décomposition LU si et seulement si $\alpha \neq -1$.
3. Soit $\alpha = -1$. La matrice A n'admet pas de décomposition LU sans pivot. La matrice P échange les lignes 2 et 3 de la matrice A et on obtient la matrice

$$PA_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice M admet une décomposition LU (sans pivot) et l'on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-1}{2}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Par conséquent on obtient la décomposition LU suivante de la matrice M :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Pour résoudre le système linéaire $Mx = Pb$ il suffit de résoudre les deux systèmes triangulaires suivants

$$Ly = Pb \text{ ce qui donne } y_1 = 0, \;\; y_2 = -1, \;\; y_3 = -\frac{3}{2}.$$

$$Ux = y \text{ ce qui donne } x_3 = 3, \;\; x_2 = 4, \;\; x_1 = -\frac{19}{2}.$$

Exercice 6

Considérons le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec α, β, γ et δ des paramètres réels. Donner des conditions suffisantes sur les coefficients pour avoir

1. convergence de la méthode de Jacobi
2. convergence de la méthode de Gauss-Seidel.

Corrigé 6

1. Une condition suffisante pour que la méthode de Jacobi converge est que la matrice soit à diagonale strictement dominante. Il faut donc imposer

$$\begin{cases} |\alpha| > |\gamma| \\ |\alpha| > |\beta| \\ |\alpha| > |\delta| \end{cases}$$

c'est-à-dire $|\alpha| > \max|\gamma|, |\beta|, |\delta|$.

2. La condition précédente est aussi suffisante pour la convergence de la méthode de Gauss-Seidel. Une autre condition suffisante pour la convergence de cette méthode est que la matrice soit symétrique définie positive. Pour la symétrie il faut que $\gamma = 0, \beta = \delta$. On obtient ainsi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Elle est définie positive si ses valeurs propres sont positifs. On a

$$\lambda_1 = \alpha, \;\; \lambda_2 = \alpha - \beta, \;\; \lambda_3 = \alpha + \beta,$$

donc il faut que $\alpha > |\beta|$.

Exercice 7 Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont les éléments vérifient

- $a_{ij} = 1$ si $i = j$ ou $i = n$,
- $a_{ij} = -1$ si $i < j$,
- $a_{ij} = 0$ sinon.

Calculer la factorisation LU de A.

Corrigé 7

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_n \leftarrow L_n - \frac{1}{1}L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_n \leftarrow L_n - \frac{2}{1}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

[...]

$$\xrightarrow{L_n \leftarrow L_n - \frac{2^{n-1}}{1}L_{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent on obtient les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-2} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix}$$

Exercice 8 Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont les éléments vérifient

- $a_{ij} = 1$ si $i = j$ ou $j = n$,
- $a_{ij} = -1$ si $i > j$,
- $a_{ij} = 0$ sinon.

Calculer la factorisation LU de A.

Corrigé 8

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \cdots \\ \xrightarrow{L_n \leftarrow L_n + L_1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ \vdots & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \cdots \\ \xrightarrow{L_n \leftarrow L_n + L_2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 4 \\ \vdots & \vdots & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

[...]

$$\xrightarrow{L_n \leftarrow L_n + L_{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2^1 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & 2^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

On obtient les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2^0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2^1 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & 2^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$