Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2020/2021
Filière MIP (S1), Module M112
Responsable : PROF. JAWAD SALHI

Examen d'Algèbre 1 : Corrigé (partiel)
Session de rattrapage
Durée : 1h

N.B : Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie.

Exercice 1 : (6 points)
Soit G un groupe noté multiplicativement. Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par : $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que τ_a est un morphisme du groupe G vers lui même.
2. Vérifier que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ pour tous a et b dans G.
3. Montrer que τ_a est bijective et exprimer son application réciproque.

Solution :

1. Soit $x, y \in G$. On a par associativité :
$$\tau_a(x)\tau_a(y) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = axya^{-1} = \tau_a(xy).$$
L'application τ_a est donc un morphisme du groupe G vers lui-même.
2. On vérifie l'égalité de deux applications en constatant celle-ci en tout point. Pour tout $x \in G$, on a :
$$(\tau_a \circ \tau_b)(x) = \tau_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x).$$
On a donc : $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
3. On peut montrer que τ_a est bijective en étudiant injectivité et surjectivité, ou en résolvant l'équation $\tau_a(x) = y$ d'inconnue x. Ici, il est plus à propos de proposer un candidat pour l'application réciproque de τ_a. Pour cela, il suffit de remarquer que :
$$(\tau_a \circ \tau_{a^{-1}}) = \tau_1 = Id_G \quad \text{et} \quad (\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a) = \tau_1 = Id_G.$$
On en déduit que τ_a est bijective et $(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}$.

Exercice 2 : (6 points)

1. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :
$$P = (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Solution :

1. On a : $P = (\underbrace{X^2 - X + 1 + i}_{\text{noté } Q})(\underbrace{X^2 - X + 1 - i}_{\text{noté } R})$. Le discriminant Δ de Q est :

$$\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i = (1-2i)^2.$$

Donc les zéros de Q dans $\mathbb{C}$ sont :

$$\frac{1+(1-2i)}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad \frac{1-(1-2i)}{2} = i.$$

D'où : $Q = (X-(1-i))(X-i)$. De même (ou par conjugaison) : $R = (X-(1+i))(X+i)$. D'où :

$$\begin{aligned} P &= (X-1+i)(X-i)(X-1-i)(X+i) \\ &= (X-1+i)(X-1-i)(X-i)(X+i) \\ &= \Big((X-1)^2+1\Big)(X^2+1) = (X^2-2X+2)(X^2+1) \end{aligned}$$

et les deux trinômes obtenus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
   - **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg F < 0$, alors la partie entière est nulle.
   - **Forme de la décomposition en éléments simple dans** $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :
   $$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} \quad (\bigstar)$$
   où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
   - **Calcul de** a : On multiplie $\bigstar$ par X puis on évalue en 0, pour obtenir : $a = \frac{1}{2}$.
   - **Calcul de** b : On multiplie $\bigstar$ par $X+1$ puis on évalue en -1, pour obtenir : $b = -1$.
   - **Calcul de** c : On multiplie $\bigstar$ par $X+2$ puis on évalue en -2, pour obtenir : $c = \frac{1}{2}$.
   - **Conclusion** : Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :
   $$F = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}.$$

3. En utilisant la décomposition en éléments simples précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1/2}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que $(S_n)_n$ converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 : (8 points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(x, y, z) = (3z, -x + y + 3z, z).$$

1. Montrer que $f \circ f = f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
3. Vérifier que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.
4. En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Solution :

1. On vérifie facilement que $f \circ f = f$ (On dit que f est un projecteur).
2. On résout $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et on trouve $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1, 1, 0))$. Ainsi $\mathcal{B}_1 := \Big((1, 1, 0)\Big)$ engendre $\operatorname{Ker}(f)$. Comme $(1, 1, 0) \neq 0_E$, alors $\mathcal{B}_1$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$. De plus, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), f\left(e_3\right)\right) = \operatorname{Vect}((0, 1, 0), (3, 3, 1))$. Ainsi $\mathcal{B}_2 := \Big((0, 1, 0), (3, 3, 1)\Big)$ engendre $\operatorname{Im}(f)$. Comme $(0, 1, 0)$ et $(3, 3, 1)$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{B}_2$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Soit $u \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors $f(u) = 0_E$ et il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Ainsi, $f(u) = 0_E = f(f(v)) = f^2(v) \underset{f \text{ proj.}}{=} f(v) = u$ donc u est bien nul.
4. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \quad \text{et} \\ &\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f).\end{aligned}$$

   D'où le résultat d'après la caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.