Algèbre1
Chapitre 3: Espaces vectoriels et applications linéaires

Jawad SALHI

Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia

A.U. 2021/2022

Plan

Structure d'espace vectoriel : Définitions et premiers exemples

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un ensemble non vide quelconque.
La notion d'espace vectoriel introduite dans ce chapitre est un nouvel exemple fondamental de structure algébrique, après les groupes, les anneaux et les corps. Comme nous le verrons, la notion d'espace vectoriel généralise, comme son nom l'indique, les notions de vecteurs du plan et de l'espace introduites au lycée.
La théorie mathématique des espaces vectoriels s'appelle l'algèbre linéaire.

Structure d'espace vectoriel : Définitions et premiers exemples

Définition (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble. On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev en abrégé) si on peut le munir d'une opération interne (notée $+$) et d'une opération externe (notée $\cdot$) telles que :

- $\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x \quad$ (commutativité)
- $\forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad$ (associativité)
- $\exists 0_E \in E, \quad \forall x \in E, \quad x + 0_E = x \quad$ (existence d'un élément neutre)
- $\forall x \in E, \quad \exists x' \in E, \quad x + x' = 0_E \quad$ (existence d'un symétrique)
- $\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$
- $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $\forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $\forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

Structure d'espace vectoriel : Définitions et premiers exemples

Les éléments de E sont appelés des vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires. La loi $\cdot$, qui n'est pas une loi de composition interne sur E puisqu'à travers elle des éléments de $\mathbb{K}$ agissent sur des vecteurs, est qualifiée de loi externe. La loi $+$ est appelée addition et la loi $\cdot$ est appelée multiplication par un scalaire. Le corps $\mathbb{K}$ est qualifié de corps de base pour E.

- Sachez que les mathématiciens ne mettent jamais de flèches au-dessus de leurs vecteurs, sauf quand ils font de la géométrie dans le plan et dans l'espace comme vous en avez fait jusqu'ici.
- Notons qu'un espace vectoriel contient toujours au moins le vecteur nul, il ne peut être vide. Si un ensemble ne contient pas de vecteur nul (élément neutre pour la loi $+$), ce n'est pas un espace vectoriel.

Structure d'espace vectoriel : Définitions et premiers exemples

Exemples

Quelques exemples classiques d'espaces vectoriels (munis des lois usuelles) :

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *et plus généralement* $\mathbb{K}^n$ *;*
- $\mathbb{K}[X]$*, l'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *;*
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *de taille* $n \times p$ *;*
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *;*
- *l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes (que l'on pourrait noter* $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ *ou bien* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*).*

▶ Pour montrer que ces différents ensembles possèdent une structure d'espace vectoriel, on revient à la définition précédente. Il s'agit d'un résultat classique du cours qui peut être réutilisé sans démonstration.

Théorème (Règles de calcul dans un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. *Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.*
2. *Pour tout $x \in E$: $-x = (-1) \cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$.*

Définition (Sous-espace vectoriel)

Soient E un espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- F est stable par addition : $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$;
- F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F$, $\lambda \cdot x \in F$;
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois de E.

▶ Si F un sous-espace vectoriel de E, F est un sous-groupe additif de E, donc : $0_F = 0_E \in F$.

Exemples

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

▶ Pour montrer qu'un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire est un espace vectoriel, il suffit souvent de montrer qu'il est **SOUS**-espace d'un autre espace vectoriel connu. On peut recourir à la caractérisation suivante :

Théorème (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble (ou partie) de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $0_E \in F$;
2. $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$. *(stabilité par combinaison linéaire)*

▶ C'est **TOUJOURS** le résultat précédent qu'il faut utiliser pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel. Si on utilisait la DÉFINITION des sous-espaces vectoriels, on serait obligé de vérifier beaucoup d'axiomes dont la CARACTÉRISATION fait l'économie.

S'en suit toute une série d'exemples qu'il convient de maîtriser parfaitement.

Exemples

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de degré ***INFÉRIEUR OU ÉGAL*** *à n, noté $\mathbb{K}_n[X]$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
  - *Pour commencer :* $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$. *Ensuite :* $0 \in \mathbb{K}_n[X]$ *car :* $\deg(0) = -\infty \leq n$.
  - *Montrons enfin que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous savons qu'alors :* $\deg(\lambda P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$, *donc en effet :* $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Attention : L'ensemble des polynômes de degré **ÉGAL** à n **N'est PAS** un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, il ne contient même pas le polynôme nul !

Exemples

L'ensemble des suites convergentes à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs réelles :

- *la suite nulle converge (vers 0) ;*
- *si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ', λ un réel, alors la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $\lambda\ell + \ell'$). Il y a bien stabilité par combinaison linéaire.*

Théorème (Intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Nous voulons montrer que $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Pour commencer : $F \subset E$. Ensuite : $0_E \in F_i$ pour tout $i \in I$ puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E, donc : $0_E \in F$.
- Montrons enfin que F est stable par combinaison linéaire. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $i \in I$: $\lambda x + y \in F_i$ car F_i est un sous-espace vectoriel de E et : $x, y \in F_i$, donc : $\lambda x + y \in F$.

$\square$

Attention : ce théorème est faux pour la réunion !

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul.

Définition

Une famille de n vecteurs de E est un n-uplet d'éléments de E.

Une famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ de E est donc un élément de E^n, ordonnée.

Définition (Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs)

Soient $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ une famille de E. On appelle combinaison linéaire de $x_1, \cdots, x_n$ tout vecteur de E de la forme : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ pour certains $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Définition

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E. On note $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$, c'est-à-dire :

$$\text{Vect}(x_1, \cdots, x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i | (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

Exemples

- $\mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\}$.
- $\mathrm{Vect}(u)$ *est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent sous la forme* λu, *c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs colinéaires à* u. *Si* u *est non nul, on dit alors que* $\mathrm{Vect}(u)$ *est la droite vectorielle dirigée (ou engendrée) par* u.
- $\mathrm{Vect}(u, v)$ *est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent sous la forme* $\lambda u + \mu v$. *Si* u *et* v *ne sont pas colinéaires, on dit alors que* $\mathrm{Vect}(u, v)$ *est le plan vectoriel dirigé (ou engendré) par* u *et* v.

Théorème

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ *est une famille de vecteurs de* E.
$\text{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ *est un espace vectoriel.*

Démonstration.

Il suffit de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E :

- Tout d'abord, on a bien $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n) \subset E$ car E est un espace vectoriel, donc toute combinaison linéaire d'éléments de E est un élément de E.
- $0_E \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ car $0_E = 0x_1 + \ldots + 0x_n$.
- Soient $x, y \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ donc : $\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda \alpha_i + \beta_i)}_{\in \mathbb{K}} x_i$. Ainsi, $\lambda x + y \in \text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$.

$\square$

▶ Tout ensemble qui s'écrit sous la forme Vect$(\cdots)$ est donc un espace vectoriel. C'est une nouvelle façon de montrer qu'un ensemble possède une structure d'espace vectoriel. Ceci s'applique aux exemples suivant :

Exemples

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $\text{Vect}(1, X, \cdots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$.
- *Si le corps de base est* $\mathbb{R}$ *:* $\text{Vect}(1) = \{a \times 1 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ *et* $\text{Vect}(1, i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$.
  Si par contre le corps de base est $\mathbb{C}$ *:* $\text{Vect}(1) = \{a \times 1 | a \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

Théorème

Vect$(x_1, \cdots, x_n)$ *est le plus "petit" sous-espace vectoriel de* E *contenant les vecteurs* $x_1, \cdots, x_n$ *(au sens de l'inclusion). En d'autres termes, tout sous-espace vectoriel de* E *contenant* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *contient aussi* Vect$(x_1, \cdots, x_n)$.

Démonstration.

Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant $x_1, \ldots, x_n$. Considérons $x \in \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. F étant stable par combinaison linéaire, $x \in F$. D'où $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset F$. $\square$

Définition (Famille génératrice)

Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad \exists\,(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

On dit alors que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ engendre E et

$$E = \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_n)\,.$$

$\hookrightarrow$ Existence de la décomposition.

Attention : il peut exister plusieurs familles génératrices distinctes. Elles peuvent même ne pas avoir le même cardinal !

Exemples

- *$(1, X, \cdots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, donc la famille $\big((1, 0), (0, 1)\big)$ engendre $\mathbb{R}^2$.*
  Plus généralement, posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$. La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ engendre $\mathbb{K}^n$ car pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: $(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- *La famille $(1, i)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais (1) suffit à engendrer le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.*

Structure d'espace vectoriel : Famille génératrice

En pratique : Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel, c'est l'écrire comme un Vect.

Exemples

L'ensemble $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0 \,\text{et}\, x - y + t = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par la famille* $\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$.

- *Pour tout* $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$: $(x,y,z,t) \in E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} z & = x + 2y \\ t & = -x + y, \end{array} \right.$ *donc :*

$E = \{(x,y,x+2y,-x+y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,1,-1) + y(0,1,2,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$.

Ceci montre ***À LA FOIS*** *que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et que* $\big((1,0,1,-1),(0,1,2,1)\big)$ *engendre* E.

Exemples

L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid 2P(X+1) = XP'\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$ *engendré* par $X^2 - 4X + 3$.

▶ *Pour tout* $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$:

$P \in F \Leftrightarrow 2P(X+1) = XP'$

$$\Leftrightarrow 2a(X+1)^3 + 2b(X+1)^2 + 2c(X+1) + 2d = X(3aX^2 + 2bX + c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ c &= -4b \\ d &= 3b. \end{cases}$$

Conclusion : $F = \left\{bX^2 - 4bX + 3b \mid \quad b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\left(X^2 - 4X + 3\right) \mid \quad b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 4X + 3\right)$. *Ceci montre* ***À LA FOIS*** *que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_3[X]$ *et que* $\left(X^2 - 4X + 3\right)$ *en est une famille génératrice.*

Proposition (Propriétés des familles génératrices)

Soit $x_1, \cdots, x_n \in E$. *On pose* $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$.
On ne change pas l'espace vectoriel engendré F si :

1. *on permute plusieurs vecteurs dans la famille* $(x_1, \cdots, x_n)$.
2. *on ajoute à la famille un vecteur combinaison linéaire des* $x_1, \cdots, x_n$.
3. *on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.*
4. *on retranche à la famille un vecteur combinaison linéaire des autres.*

Démonstration.

Voir poly ! □

Proposition

Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est génératrice de E.

▶ En d'autres termes, si on rajoute à une famille génératrice de E des vecteurs de E, cette nouvelle famille reste génératrice. Si une famille génératrice de E contient des vecteurs combinaisons linéaires des autres, on peut les retirer, la nouvelle famille reste génératrice. Si l'on retire des vecteurs qui ne sont pas combinaisons linéaires des autres, la nouvelle famille ne sera en revanche plus génératrice !

Structure d'espace vectoriel : Famille libre

Définition (famille libre)

Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de E est dite libre si :

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \Big).$$

On dit alors que les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement indépendants.

Définition (famille liée, couple de vecteurs colinéaires)

- Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de E est dite liée ou que les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement dépendants si la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ **N**'est **PAS** libre. Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est donc liée s'il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$. Cela revient à dire que **L'UN AU MOINS** des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ est combinaison linéaire des autres.
- On dit que x et y sont colinéaires si la famille (x, y) est liée, i.e. si x ou y est un multiple de l'autre.

Explication : Dire que $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, c'est dire que pour certains $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$: $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \exists i_0 \in \{1, \cdots, n\},\ \lambda_{i_0} \neq 0 \right)$, auquel cas : $x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq i_0}} \lambda_i x_i$, i.e. x_{i_0} est "combinaison linéaire des autres".

Proposition

1. *Une famille est liée dès qu'elle contient le vecteur nul.*
2. *Une famille composée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.*
3. *Une famille composée de deux vecteurs est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.*

Démonstration.

1. La famille $(x_1, \cdots, x_n, 0_E)$ est liée car $0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n + 1 \cdot 0_E = 0_E$.
2. Si u est non nul, la famille (u) est libre car : $\lambda u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$.
3. Si (u, v) est liée alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha u + \beta v = 0_E$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Si α est non nul, $u = -\dfrac{\beta}{\alpha} v$. Si $\alpha = 0$, β est nécessairement non nul et alors $v = -\dfrac{\alpha}{\beta} u$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires. Réciproquement, si u et v sont colinéaires, on aura, par exemple, $u = \lambda v$ donc $1 \cdot u + (-\lambda) \cdot v = 0_E$, ce qui montre que la famille est liée.

$\square$

Exemples

La famille $(\sin, \cos)$ *du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *est libre.*

- *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lambda \sin + \mu \cos = 0$, *i.e. :*

$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \sin x + \mu \cos x = 0$. *Alors en particulier, pour* $x = 0$ *:*
$\lambda \sin 0 + \mu \cos 0 = 0$ *et donc* $\mu = 0$. *De plus, pour* $x = \dfrac{\pi}{2}$, *on a :*
$\lambda \sin \dfrac{\pi}{2} + \mu \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ *et donc* $\lambda = 0$, *comme voulu.*

Théorème (Caractérisation des familles libres)

Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de E est libre si et seulement si :

$$\forall x \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad \exists!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

$\hookrightarrow$ *Unicité de la décomposition.*

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Supposons que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. Soient $x \in \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \lambda_1' x_1 + \ldots + \lambda_n' x_n$. On a :

$$x - x = (\lambda_1 - \lambda_1')\, x_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_n')\, x_n = 0_E.$$

Comme la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 - \lambda_1' = \cdots = \lambda_n - \lambda_n' = 0$. On a donc bien $\lambda_j = \lambda_j'$ quel que soit $j \in [\![1, n]\!]$, ce qui nous assure l'unicité de la décomposition.
$\Longleftarrow$ On suppose l'unicité de la décomposition et nous allons montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$. Comme $0_E = 0x_1 + \cdots + 0x_n$, par unicité de la décomposition, il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Définition (famille libre/liée d'un nombre quelconque de vecteurs)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre ou que les vecteurs x_i, i décrivant I, sont linéairement indépendants si : $\forall(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle, $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0\right)$.
- On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée ou que les vecteurs x_i, i décrivant I, sont linéairement dépendants si $(x_i)_{i\in I}$ **N**'est **PAS** libre. Cela revient à dire que **L'UN AU MOINS** d'entre eux est combinaison linéaire des autres.

► L'expression "presque nulle" nous ramène toujours à un nombre **FINI** de vecteur, donc la liberté d'une famille **INFINIE** de vecteurs est équivalente à la liberté de **TOUTES** ses sous-familles **FINIES**. Pour montrer qu'une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs est libre, il suffit même de montrer que la famille $(x_0, \cdots, x_n)$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

On dit qu'une famille de polynômes non nuls $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est :

- étagée en degrés si on a $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- échelonnée en degrés si on a $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

▶ Une famille de polynômes échelonnée en degrés est étagée en degrés.

Le théorème suivant est **TRÈS IMPORTANT !**

Théorème

Une famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes non nuls étagée en degrés est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Conséquence : Une famille de polynômes **NON NULS** échelonnés en degrés est libre.

Structure d'espace vectoriel : Famille libre

Démonstration : Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes étagée en degrés. On vérifie par récurrence sur $n \geq 0$, que chaque famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre.

- Initialisation : Pour $n = 0$, P_0 est non nul, donc (P_0) est libre.
- Hérédité : Supposons le résultat acquis pour $n-1 \geq 0$ et soit $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. On a : $\displaystyle\lambda_n P_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k$. Si $\lambda_n \neq 0$, alors : $\deg(P_n) = \deg(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k)$, ce qui est en contradiction avec $\deg(P_k) < \deg(P_n)$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$. On a donc $\lambda_n = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k = 0$, ce qui impose $\lambda_k = 0$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$ puisque $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n-1}$ est libre par hypothèse de récurrence.

Structure d'espace vectoriel : Famille libre

Théorème (Propriétés des familles libres/liées)

1. *Toute famille contenant une famille liée est liée.*
2. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
3. *Si on ajoute à une famille libre un vecteur* ***NON*** *combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, alors la famille obtenue est encore libre.*

Démonstration.

Voir poly ! □

► Dire qu'une famille est libre, c'est dire qu'aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres, donc si on veut que l'ajout d'un vecteur conserve la liberté d'une famille libre, on doit faire attention de ne pas introduire de dépendance entre ses vecteurs (on ne peut donc ajouter qu'un vecteur linéairement indépendant des autres).

Définition (Bases)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E si $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.
- Dans ce cas, pour tout $x \in E$, l'unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ pour laquelle : $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$ est appelée la famille des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

À l'aide de la caractérisation d'une famille libre et de la définition d'une famille génératrice, on montre le théorème fondamental suivant :

Théorème (Caractérisation d'une base)

Une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \exists!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

$\hookrightarrow$ *Existence et unicité de la décomposition.*

La définition suivante est une synthèse des exemples précédents.

Définition (Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$)

- **Familles de scalaires** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose : $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
- **Polynômes** : La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ces différentes bases, "naturelles" pour les espaces concernés, sont qualifiées de "canoniques".

Attention, ces bases ne sont pas uniques !

Remarque (Convention de la base vide)

On convient que la famille vide $\emptyset$ est une base de l'espace nul $E = \{0_E\}$.

Méthode

Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on en cherche d'abord une famille génératrice en l'écrivant comme un Vect, puis on essaie de montrer que la famille ainsi obtenue est libre.

Exemples

L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 4z = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et la famille* $\mathcal{B} = \Big((4,0,1),(0,4,1)\Big)$ *en est une base.*

▶ *Dans cet exemple, tâchons de trouver nous-mêmes une base de* F*, sans aide extérieure.*

- *Commençons par chercher une famille génératrice de* F*. On a :* $F = \{(x, y, \frac{x+y}{4}) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,\frac{1}{4}),(0,1,\frac{1}{4})\Big) = \mathrm{Vect}\Big((4,0,1),(0,4,1)\Big)$*. Ceci montre À LA FOIS que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et que la famille* $\mathcal{B}$ *est bien génératrice de* F*.*
- *Montrons que la famille* $\mathcal{B}$ *est libre. Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lambda(4,0,1) + \mu(0,4,1) = (0,0,0)$*. Alors :* $4\lambda = 4\mu = 0$*, donc* $\lambda = \mu = 0$ *comme voulu. C'est fini.*

Structure d'espace vectoriel : Dimension finie

Définition (Espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie s'il possède une partie génératrice **FINIE**, et de dimension infinie sinon.

Exemples

- *$\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie car ils possèdent des familles génératrices finies (notamment les bases canoniques).*
- *$\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet, Pour toute famille* ***FINIE*** *$(P_1, \cdots, P_n)$ de polynômes non nuls, si nous posons : $d = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \deg(Pi)$, alors : $\text{Vect}(P_1, \cdots, P_n) \subset \mathbb{K}_d[X] \neq \mathbb{K}[X]$, donc $(P_1, \cdots, P_n)$ n'engendre pas $\mathbb{K}[X]$. Conclusion : aucune famille* ***FINIE*** *de $\mathbb{K}[X]$ n'engendre $\mathbb{K}[X]$.*

Passons maintenant à un théorème qui est à la base de la théorie sur la dimension des espaces vectoriels.

Théorème (Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Démonstration.

Voir poly ! $\square$

Théorème (Théorème de la base extraite)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E.

$\hookrightarrow$ Un espace de dimension finie admet donc une base finie.

Remarque

Si on connaît une famille génératrice de E, on peut toujours enlever des vecteurs combinaisons linéaires des autres jusqu'à obtenir une famille libre donc une base de E.

Démonstration : Raisonnons par récurrence. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{P}_k$ la proposition "Toute famille génératrice de k vecteurs de E contient une sous-famille qui est une base de E".

- Initialisation : Si $k = 0$, E est engendré par 0 vecteur : $E = \{0_E\}$. La famille vide est une base de E.
- Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang k et considérons une famille génératrice $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_{k+1})$ de E. Si $\mathcal{F}$ est libre, c'est une base de E.
  Sinon $\mathcal{F}$ est liée et l'un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres. Nous pouvons retirer ce vecteur et noter $\mathcal{F}'$ la sous-famille obtenue. D'après ce qui précède, celle-ci est toujours génératrice. Comme $\mathcal{F}'$ contient k vecteurs, elle contient par hypothèse de récurrence une sous-famille $\mathcal{F}''$ qui est une base de E. $\mathcal{F}''$ étant elle-même une sous-famille de $\mathcal{F}$, la propriété est démontrée au rang $k + 1$.

Définition (Dimension)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si : $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases de E sont finies de même cardinal. Ce cardinal unique est appelé la dimension de E et notée $\dim E$.
- Si : $E = \{0_E\}$, on décrète par convention que : $\dim E = 0$.

Si : $\dim E = 1$, on dit que E est une droite (vectorielle), et si : $\dim E = 2$, que E est un plan (vectoriel).

Démonstration.

Supposons : $E \neq \{0_E\}$. Comme E est de dimension finie, nous avons vu plus haut que toutes les familles libres de E sont finies, donc en particulier ses bases aussi. Soient alors $\mathcal{B}$ une base de E à n éléments et $\mathcal{B}'$ une base de E à n' éléments. Comme $\mathcal{B}$ engendre E et comme $\mathcal{B}'$ est libre, nous avons vu déjà que : $n' \leq n$. De plus, par symétrie des rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a aussi : $n \leq n'$. Conclusion : $n = n'$. $\square$

► À retenir : pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit d'exhiber une base de cet espace et de compter le nombre de vecteurs obtenus.

Théorème

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

Théorème (Dimension et cardinal d'une famille génératrice)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \geq n$, et si $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n$, c'est une base de E.

Démonstration.

Tout repose sur le théorème de la base extraite.

- $\mathcal{F}$ possède une sous-famille $\mathcal{F}'$ base de E qui comporte donc n vecteurs. Ainsi, $\mathcal{F}$ contient plus de n vecteurs.
- Si $\mathcal{F}$ possède n vecteurs, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, ce qui fait de $\mathcal{F}$ une base de E.

$\square$

▶ Dans la pratique, ce résultat a une importance capitale : il suffit qu'une famille soit génératrice et comporte autant de vecteurs que la dimension de E pour que celle-ci soit une base de E.

Voici maintenant l'équivalent du théorème de la base extraite pour les familles libres :

Théorème (Théorème de la base incomplète)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. On peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E.

Démonstration : Soient $\mathcal{L} = (u_1, \cdots, u_k)$ une famille libre et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

- Si $\mathcal{L}$ est génératrice, c'est une base de E. Supposons désormais que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice.
- Il existe au moins un vecteur de $\mathcal{B}$ qui n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs u_i. En effet, par l'absurde, si tous les vecteurs e_j étaient combinaisons linéaires des vecteurs u_i, on aurait $E = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$. Et comme $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k) \subset E$ (tous les vecteurs u_i sont dans E), on aurait $E = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_k)$, ce qui ferait de $\mathcal{L}$ une famille génératrice de E, absurde par hypothèse.

- Soit e_{j_0} un vecteur non combinaison linéaire des vecteurs u_i. On pose $\mathcal{L}' = (u_1, \cdots, u_k, e_{j_0})$. Montrons que la famille $\mathcal{L}'$ reste libre. Pour cela, supposons que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{j_0} = 0_E$. Si $\lambda_{k+1} \neq 0$, $e_{j_0} = -\dfrac{1}{\lambda_{k+1}}(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)$ est une combinaison linéaire des vecteurs u_i. Absurde. Donc $\lambda_{k+1} = 0$. Ainsi, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$. Comme $\mathcal{L}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. On a bien montré que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = 0$.
- On peut poursuivre le raisonnement et ajouter à $\mathcal{L}'$ des vecteurs non combinaison linéaire jusqu'à obtenir une famille génératrice, qui restera libre (comme $\mathcal{L}'$). On aura ainsi construit une base de E contenant $\mathcal{L}$.

Théorème (Dimension et cardinal d'une famille libre)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leq n$, et si $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n$, c'est une base de E.

Démonstration.

Tout repose sur le théorème de la base incomplète.

- $\mathcal{L}$ possède une sur-famille $\mathcal{L}'$ base de E qui comporte donc n vecteurs. Ainsi, $\mathcal{L}$ contient moins de n vecteurs.
- Si $\mathcal{L}$ possède n vecteurs, $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, ce qui fait de $\mathcal{L}$ une base de E.

$\square$

▶ Si on connaît une famille libre d'un espace vectoriel E qui contient $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base !

Théorème (Dimension d'un s.e.v.)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et : $\dim F \leq \dim E$, *avec égalité si et seulement si :* $F = E$.

▶ Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont égaux, il suffit donc de prouver que $F \subset E$ puis que $\dim F = \dim E$. La double inclusion ne sera alors pas nécessaire.

Démonstration.

L'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres d'éléments des familles libres de F est non vide et majoré par $\dim E$ car d'une part la famille vide est libre, et d'autre part, toute famille libre de F est une famille libre de E, donc constituée d'au plus $\dim E$ vecteurs. Conclusion : $\mathcal{N}$ possède un plus grand élément n inférieur ou égal à $\dim E$.

Donnons-nous alors une famille libre $\mathcal{L}$ de F à n éléments. Pour tout $x \in F$, la famille $\mathcal{L}$ augmentée de x est liée par maximalité de n dans $\mathcal{N}$, donc x est forcément combinaison linéaire de $\mathcal{L}$. Conclusion : libre et génératrice, $\mathcal{L}$ est une base de F, donc enfin F est de dimension finie et : $\dim F = n \leq \dim E$. Et si : $\dim E = \dim F = n$? Dans ce cas $\mathcal{L}$ est une famille libre de E à $n = \dim E$ éléments, donc c'est déjà une base de E et : $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{L}) = F$. $\square$

Exemples

Dans $\mathbb{R}^3$*, on note :* $u = (1,1,0)$*,* $v = (1,0,1)$*,* $x = (3,1,2)$ *et* $y = (1,3,-2)$*. Soient* F *et* G *les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *suivants :*

$$F = \mathrm{Vect}(u,v) \quad \textit{et} \quad G = \mathrm{Vect}(x,y).$$

Montrer que $F = G$*.*

▶ *On remarque que :* $x = u + 2v$ *et* $y = 3u - 2v$*. Ainsi :* $x, y \in F$ *et par suite* $G \subset F$*. De plus, il est clair que* (u,v) *est libre et que* (x,y) *est libre, donc :* $\dim G = \dim F = 2$*. On conclut que :* $G = F$*.*

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel produit)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$ est de dimension finie et :
$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.
Le résultat se généralise au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels.

Démonstration : Supposons E et F de dimensions non nulles et donnons-nous $(e_1, \cdots, e_m)$ une base de E et $(f_1, \cdots, f_n)$ une base de F.
Nous allons montrer que la famille
$\mathcal{B} = \Big((e_1, 0_F), \cdots, (e_m, 0_F), (0_E, f_1), \cdots, (0_E, f_n)\Big)$ est une base de $E \times F$.
Cela montrera bien que $E \times F$ est de dimension finie
$m + n = \dim E + \dim F$.

- Montrons que $\mathcal{B}$ engendre $E \times F$. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, si nous notons $(x_1, \cdots, x_m)$ les coordonnées de x dans $(e_1, \cdots, e_m)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ celles de y dans $(f_1, \cdots, f_n)$, alors :

$$(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j \Big) = \sum_{i=1}^{m} x_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} y_j (0_E, f_j).$$

- Pour la liberté, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K}$ pour lesquels : $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (0_E, f_j) = (0_E, 0_F)$. Alors : $\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j \Big) = (0_E, 0_F)$, donc : $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = 0_E$ et $\sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j = 0_F$.
  Ainsi, par liberté de $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$:
  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0.$

Définition (Somme de deux s.e.v.)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- L'ensemble $F + G = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F \text{ et } x_2 \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé la somme de F et G.
- Cette somme $F + G$ est également le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G. Cela signifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant F et G contient aussi $F + G$.

Attention : Ne confondez pas **SOMME** et **RÉUNION** ! La somme est un sous-espace vectoriel, mais pas la réunion en général.

Démonstration.

Montrons d'abord que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F+G$ car $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$.
- Soient $x, y \in F+G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Donc : $\lambda x + y = \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\lambda x_1 + y_1)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda x_2 + y_2)}_{\in G}$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels, donc stables par combinaison linéaire. Ainsi, on a bien $\lambda x + y \in F+G$.

$F+G$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

De plus, $F \subset F+G$ car tout vecteur $x \in F$ peut s'écrire sous la forme $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$. Idem pour G. $\square$

Théorème (Parties génératrices d'une somme de deux s.e.v)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F est engendré par $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ et si G est engendré par $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$, alors $F + G$ est engendré par $(f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n)$.

Démonstration.

Soit $x \in F + G$. Il existe alors $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Or $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ engendre F, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$; de même $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ engendre G, donc il existe $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $g = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots + \mu_n g_n$.
Finalement on obtient
$x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots + \mu_n g_n$. C'est le résultat voulu. $\square$

Théorème (Formule de Grassmann)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. La somme $F+G$ est alors elle aussi de dimension finie, et plus précisément : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration : Toute base $(e_1, \cdots, e_p)$ de $F \cap G$ peut être complétée en une base $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ de F et en une base $(e_1, \cdots, e_p, g_1, \cdots, g_r)$ de G (avec éventuellement p, q ou r nul). Par concaténation, la famille $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q, g_1, \cdots, g_r)$ est alors une famille génératrice de $F+G$, donc en particulier, $F+G$ est de dimension finie.

Nous allons montrer qu'en réalité la famille $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q, g_1, \cdots, g_r)$ est aussi libre, et donc que c'est une base de $F + G$. La formule de Grassmann en découlera aussitôt : $\dim(F+G) = p+q+r = (p+q)+(p+r)-p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
Soient donc $\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \mu_1, \cdots, \mu_q, \nu_1, \cdots, \nu_r \in \mathbb{K}^{p+q+r}$ pour lesquels : $\underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}_{\in F \cap G} + \underbrace{\mu_1 f_1 + \cdots, \mu_q f_q}_{\in F} + \underbrace{\nu_1 g_1 + \cdots + \nu_r g_r}_{\in G} = 0_E$.

- Pour commencer, on a $\nu_1 g_1 + \cdots + \nu_r g_r$ appartient à $F \cap G$ donc est combinaison linéaire de $e_1, \cdots, e_p$, ce qui n'est possible que si $\nu_1 = \cdots = \nu_r = 0$ par liberté de $(e_1, \cdots, e_p, g_1, \cdots, g_r)$.
- De même, $\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q$ appartient à $F \cap G$ donc est combinaison linéaire de $e_1, \cdots, e_p$, ce qui n'est possible que si $\mu_1 = \cdots = \mu_q = 0$ par liberté de $(e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$.
- Finalement : $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ par liberté de $(e_1, \cdots, e_p)$.

Définition (Somme directe de deux s.e.v)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en somme directe si tout vecteur de $F + G$ s'écrit **de manière unique** comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On note alors souvent $F \oplus G$ la somme $F + G$, pour indiquer qu'il y a somme directe.

► Le petit rond qu'on ajoute à la notation "F + G" pour indiquer que la somme est directe ne fait pas de $F + G$ et $F \oplus G$ des ensembles différents, la notation "$F \oplus G$" contient juste une INFORMATION d'unicité en plus.

Théorème (Caractérisation de la somme directe)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *F et G sont en somme directe.*
2. $F \cap G = \{0_E\}$.

Dans ce cas, par ailleurs, si F et G sont de dimension finie :
$\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Supposons F et G en somme directe et montrons que $F \cap G = \{0_E\}$, ce qui revient à montrer que $F \cap G \subset \{0_E\}$ puisque 0_E appartient au sous-espace vectoriel $F \cap G$ de toute façon. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = \overbrace{x}^{\in F} + \overbrace{0_E}^{\in G} = \overbrace{0_E}^{\in F} + \overbrace{x}^{\in G}$, donc : $x = 0_E$ par définition de la somme directe.
- $(2 \Rightarrow 1)$ Supposons que : $F \cap G = \{0_E\}$. Soient $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in G$ pour lesquels : $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Comme : $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in F \cap G = \{0_E\}$, alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

La formule : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ n'est enfin qu'un cas particulier de la formule de Grassmann. $\square$

Théorème (Bases d'une somme directe de deux s.e.v)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Si $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ est une base de F et $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ une base de G, alors $(f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n)$ est une base de $F \oplus G$. Une telle base dont les premiers vecteurs forment une base de F et les suivants une base de G est dite adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Attention : Ce résultat est faux si on ne suppose pas la somme directe. Pour les sommes en général, on dispose seulement du résultat vu précédemment sur les familles génératrices.

Démonstration.

Nous avons déjà vu que $(f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n)$ est une famille génératrice de $F \oplus G$. Il ne nous reste donc qu'à montrer que cette famille est libre.

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k + \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell g_\ell = 0_E$. Cette somme est une décomposition de 0_E comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Or la somme est directe donc il y a unicité d'une telle décomposition ; bref $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k = \sum_{\ell=1}^{n} \mu_\ell g_\ell = 0_E$. Enfin, les familles $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ et $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ étant libres, on en déduit comme voulu que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$. $\square$

Définition (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Tout vecteur de E est d'une et une seule manière la somme d'un élément de F et d'un élément de G :
   $\forall x \in E, \exists!(f, g) \in F \times G, x = f + g$.
2. E est la somme directe de F et G : $E = F \oplus G$, ce qui revient à dire que : $E = F + G$ **ET** que F et G sont en somme directe.

On dit dans ces conditions que F et G sont supplémentaires dans E. On dit aussi que F est **UN** supplémentaire de G dans E et que G est **UN** supplémentaire de F dans E.

Démonstration.

- Supposons que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$ et montrons que $E = F \oplus G$. Il est clair que $E = F + G$. Soit $x \in F \cap G$. On peut alors écrire $x = x + 0_E$ avec $x \in F$ et $0_E \in G$, mais également $x = 0_E + x$ avec $0_E \in F$ et $x \in G$. L'unicité de la décomposition impose que $x = 0_E$. Donc $E = F \oplus G$.
- Réciproquement, supposons $E = F \oplus G$. Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Montrons que cette décomposition est unique. Soient $f' \in F$ et $g' \in G$ tels que $x = f' + g'$. On a alors $f + g = f' + g'$, c'est-à-dire $f - f' = g' - g$. Or $f - f' \in F$ et $g' - g \in G$. On en déduit que $f - f' \in F \cap G = \{0_E\}$. Donc $f = f'$ et, de même, $g = g'$.

$\square$

Théorème (Base adaptée)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $(f_1, \cdots, f_m)$ et $(g_1, \cdots, g_n)$. Alors, $E = F \oplus G$ si et seulement si la famille $(f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n)$ est une base de E. Dans ce cas, la famille $(f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n)$ est qualifiée de base adaptée.

▶ Ce théorème fournit un moyen supplément pour justifier que deux espaces sont supplémentaires : il suffit de montrer que la concaténation de deux bases de F et G constitue une base de E. C'est un résultat précieux.

Démonstration.

Nous avons déjà vu que si F et G sont en somme directe alors la famille $(f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n)$ est une base de $F \oplus G = E$.
Réciproquement, supposons que $(f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n)$ est une base de E. Alors tout $x \in E$ s'écrit d'une manière unique :
$x = \underbrace{\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m}_{\in F} + \underbrace{\mu_1 g_1 + \cdots + \mu_n g_n}_{\in G}$ c'est-à-dire tout $x \in E$ s'écrit d'une manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$; donc $E = F \oplus G$. $\square$

Structure d'espace vectoriel : Espaces supplémentaires

Théorème (Existence de supplémentaires en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E.
Le supplémentaire de F n'est pas unique, mais, les supplémentaires de F dans E ont tous pour dimension : $\dim E - \dim F$.

Démonstration.

Soit $(f_1, \cdots, f_m)$ une base de F et soit $n = \dim E$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $f_{m+1}, \cdots, f_n$ vecteurs de E tels que $(f_1, \cdots, f_m, f_{m+1}, \cdots, f_n)$ est une base de E. En posant $G = \text{Vect}(f_{m+1}, \cdots, f_n)$ on obtient, d'après le théorème précédent, un supplémentaire de F dans E. Puisque le choix de $f_{m+1}, \cdots, f_n$ n'est pas unique, le supplémentaire de F n'est pas unique ; cependant, tous les supplémentaires de F sont de dimension $n - m$, m étant la dimension de F. $\square$

Le résultat suivant est aussi d'un usage fréquent :

Théorème (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)

Soient E un espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

1. $E = F + G$ *et* $F \cap G = \{0_E\}$.
2. $E = F + G$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
3. $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

▶ On a souvent recours à la dernière caractérisation. On commence par montrer que l'intersection des deux espaces est réduite à $\{0_E\}$ puis on prouve l'égalité des dimensions.

Démonstration.

Le point (1) correspond à la définition.

- Montrons que (1) $\Leftrightarrow$ (2). On suppose que $E = F + G$. On a :

$$\begin{aligned} F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim(F \cap G) = 0 &\Leftrightarrow \dim(F+G) = \dim F + \dim G \\ &\Leftrightarrow \dim E = \dim F + \dim G. \end{aligned}$$

- Montrons que (2) $\Leftrightarrow$ (3). On suppose que $\dim E = \dim F + \dim G$. Remarquons que $F + G \subset E$ donc pour avoir $F + G = E$, il faut et il suffit que $\dim(F+G) = \dim(E)$. On a :

$$\begin{aligned} F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim(F \cap G) = 0 &\Leftrightarrow \dim(F+G) = \dim F + \dim G \\ &\Leftrightarrow \dim(F+G) = \dim E. \end{aligned}$$

$\square$

La structure d'espace vectoriel ne devient vraiment intéressante que si l'on introduit la notion d'application linéaire. Il s'agit des applications entre espaces vectoriels qui, dans un sens que nous allons préciser, "conservent la structure d'espace vectoriel".
Dans cette partie, nous allons donner essentiellement les définitions et les résultats élémentaires de base.

Définition (Application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \to F$ qui préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

- **Cas particulier où $E = F$:** Une application linéaire de E dans E est aussi appelée un endomorphisme de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- **Cas particulier où $F = \mathbb{K}$:** Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est aussi appelée une forme linéaire de E.

Applications linéaires : Définitions et premières propriétés

Explication : Une application linéaire n'est rien d'autre qu'un "morphisme d'espaces vectoriels", à ceci près qu'on n'emploie jamais cette expression. Bref, c'est une application qui conserve les combinaisons linéaires.

Remarque

- *Clairement :* $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, *donc après simplification :* $f(0_E) = 0_F$.
- *Ensuite, si* A *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $f_{|A}$ *est aussi linéaire (mais sur* A*). En effet, s'il est vrai pour tous* $x, y \in E$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *que :* $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$*, c'est a fortiori vrai pour tous* $x, y \in A$*.*
- *Enfin, pour vérifier que* f *est linéaire, il est suffisant de vérifier que :* $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ *pour tous* $x, y \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *avec UN SEUL SCALAIRE. Dans ce cas, pour tous* $x, y \in E$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *:* $f(\lambda x) = f(\lambda x + 0_E) = \lambda f(x) + f(0_E) = \lambda f(x) + 0_F = \lambda f(x)$*, puis de même :* $f(\mu y) = \mu f(y)$*, donc enfin :* $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$*.*

Théorème (Opérations sur les applications linéaires)

1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
2. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tous $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$: $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.*
3. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f, f' \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g' \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors : $g \circ (f + f') = (g \circ f) + (g \circ f')$ et $(g + g') \circ f = (g \circ f) + (g' \circ f)$.*
4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, non commutatif en général, avec $1_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$.*

Deux formules à connaître

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f et g commutent. Alors :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k \circ g^{n-k}$$

et $$f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1}$$

(attention, les puissances désignent des compositions).

- Ces deux formules se démontrent ici exactement comme elles se démontrent dans $\mathbb{C}$.

Attention : Dans ces formules, il est essentiel que f et g commutent.

Théorème (Images directe et réciproque d'un s.e.v par une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A un sous-espace vectoriel de E et B un sous-espace vectoriel de F.

1. *L'image (directe) $f(A)$ de A par f est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *L'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.

1. Montrons que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F. Déjà, on a $f(A) \subset F$ et de plus $0_F = f(0_E) \in f(A)$. Soient $y, y' \in f(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque $y, y' \in f(A)$, il existe $a, a' \in A$ tels que $y = f(a)$ et $y' = f(a')$. Par linéarité de f : $\lambda y + y' = \lambda f(a) + f(a') = f(\lambda a + a')$, et par ailleurs : $\lambda a + a' \in A$ car A est un sous-espace vectoriel de E, donc comme voulu : $\lambda y + y' \in f(A)$.
2. Montrons que $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E. Déjà, on a $f^{-1}(B) \subset E$ et de plus $0_E \in f^{-1}(B)$ car $f(0_E) = 0_F \in B$. Soient $x, x' \in f^{-1}(B)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité de f, on a : $f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$. Or par définition de x et x', $f(x), f(x') \in B$ et B est un sous-espace vectoriel de E. Donc $f(\lambda x + x') \in B$, ce qui montre que $\lambda x + x' \in f^{-1}(B)$.

$\square$

Applications linéaires : Noyau et image d'une application linéaire

Définition (Noyau et image d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle noyau de f, noté $\operatorname{Ker} f$, l'ensemble $f^{-1}\Big(\{0_F\}\Big) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
- On appelle image de f, noté $\operatorname{Im} f$, l'ensemble $f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E : y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}$.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.

- Tout d'abord on a : $0_E \in \operatorname{Ker} f$, car $f(0_E) = 0_F$.
- Soient $x, y \in \operatorname{Ker} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $f(\lambda x + y) \overset{f \in \mathcal{L}(E,F)}{=} \lambda f(x) + f(y) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$ donc $\lambda x + y \in \operatorname{Ker} f$.

$\square$

Applications linéaires : Noyau et image d'une application linéaire

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application linéaire f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

▶ Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \to F$ est injective, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, c-à-d montrer que :
$\forall x \in E, \Big(f(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E\Big)$.

Démonstration.

Démontrons ce résultat par double implication.

- ($\Rightarrow$) Supposons f injective, c'est-à-dire que : $\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ et montrons qu'alors : $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ ou encore : $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$. Or pour tout $x \in \operatorname{Ker} f$: $f(x) = 0_F = f(0_E)$, donc comme f est injective : $x = 0_E$.
- ($\Leftarrow$) Supposons maintenant que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que : $f(x) = f(x')$. Alors : $f(x - x') = f(x) - f(x') = 0_F$ par linéarité, donc : $x - x' \in \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, donc : $x - x' = 0_E$, i.e. : $x = x'$.

□

Exemples

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par
$f(x, y, z) = (2x - y, y + z, z - x)$. *Étudions l'injectivité de f.*

- *Déterminons pour cela son noyau. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :*

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (2x - y, y + z, z - x) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Ce qui conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} 2x - y & = 0 \\ y + z & = 0 \\ z - x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Ainsi : $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ *et f est injective.*

Applications linéaires : Noyau et image d'une application linéaire

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration.

- Comme $0_F = f(0_E)$, on a bien : $0_F \in \operatorname{Im} f$.
- De plus, si $x, y \in \operatorname{Im} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe $x', y' \in E$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. D'où,
  $\lambda x + y = \lambda f(x') + f(y') \overset{f \in \mathcal{L}(E,F)}{=} f(\lambda x' + y') \in \operatorname{Im} f$.

$\square$

Applications linéaires : Noyau et image d'une application linéaire

Théorème (Familles génératrices de l'image d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E possède une famille génératrice $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Alors $\Big(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\Big)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. *En résumé :*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\Big).$$

Explication : Ce théorème montre que l'on peut aisément obtenir une famille génératrice de l'image (en prenant l'image par f de vecteurs constituant une base de E). Il suffit alors de retirer les vecteurs combinaisons linéaires des autres afin d'obtenir une famille libre, donc une base.

Applications linéaires : Noyau et image d'une application linéaire

Démonstration.

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ engendre E par hypothèse, donc $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ pour certains $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Par suite : $y = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$, ce qui montre bien que la famille $\big(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\big)$ engendre $\operatorname{Im} f$. $\square$

Applications linéaires : Isomorphisme et e. v. isomorphes

Définition (Isomorphisme, espaces vectoriels isomorphes)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- On appelle isomorphisme de E sur F toute application linéaire bijective de E sur F.
  Cas particulier où $E = F$: Un isomorphisme de E sur E est aussi appelée un automorphisme de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé le groupe linéaire de E.
- On dit que F est isomorphe à E s'il existe un isomorphisme de E sur F.

► Le fait que deux espaces vectoriels soient isomorphes signifie intuitivement que ces deux espaces sont "identiques" d'un strict point de vue vectoriel.

Théorème (Composition d'isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. *Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.*
2. *Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*

► En d'autres termes, la relation d'isomorphisme entre espaces vectoriels est une relation d'équivalence (pour la réflexivité, remarquer simplement que Id_E est un isomorphisme de E pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E).

Démonstration.

1. La composée de deux applications bijectives (resp. linéaires) est bijective (resp. linéaire).
2. Nous savons que f^{-1} est bijective de F sur E. Montrons que f^{-1} est linéaire. Soient $x', y' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons alors $x = f^{-1}(x')$ et $y = f^{-1}(y')$. On a alors $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$ et,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x' + y') &= f^{-1}\Big(\lambda f(x) + f(y)\Big) \\ &= f^{-1}\Big(f(\lambda x + y)\Big) \\ &= \lambda x + y, \quad \text{car} \quad f^{-1} \circ f = Id_E \\ &= \lambda f^{-1}(x') + f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

$\square$

Le théorème qui suit montre que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont tous "identiques" à un $\mathbb{K}^n$.

Théorème (Effet d'un isomorphisme sur la dimension)

- *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E est de dimension finie et si F est isomorphe à E, alors F est de dimension finie et :* $\dim E = \dim F$.
- *Réciproquement, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de* ***MÊMES*** *dimensions finies sont isomorphes. En particulier, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration :

- On peut supposer $E \neq \{0_E\}$ et noter f un isomorphisme de E sur F. De dimension finie $n \neq 0$, E possède une base $(e_1, \cdots, e_n)$. En particulier, par surjectivité de f : $F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\Big)$, donc F est engendré par la famille $\Big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\Big)$ donc est de dimension finie. Nous allons en fait montrer que cette famille est libre. Il en découlera que c'est une base de F, et donc que : $\dim F = n = \dim E$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$. Alors : $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = 0_F$, donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$. Or f est injective et donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Finalement comme voulu, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ étant libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie n. On peut supposer $n \neq 0$. Nous allons montrer que E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et E et F seront alors isomorphes tout court.
  Comme $n \neq 0$, E possède une base $(e_1, \cdots, e_n)$. Soit alors φ l'application $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de $\mathbb{K}^n$ dans E. On a, φ est linéaire. En effet, pour tous $x = (x_1, \cdots, x_n), x' = (x'_1, \cdots, x'_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
  $$\varphi(\lambda x + x') = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + x'_i)e_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i = \lambda\varphi(x) + \varphi(x').$$
  De plus, φ est bijective de $\mathbb{K}^n$ sur E, car $(e_1, \cdots, e_n)$ étant une base de E alors :
  $\forall x \in E, \exists!(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$. D'où φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E.

Remarque

L'application φ *de la preuve précédente mérite qu'on s'y attarde un instant. Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une famille* ***QUELCONQUE*** *de* E *(plus forcément une base de* E*). L'application* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \overset{\varphi}{\mapsto} \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *est toujours linéaire de* $\mathbb{K}^n$ *dans* E*.*

- φ *surjective si et seulement si :* $\forall x \in E, \exists (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$*, i.e. si et seulement si la famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *engendre* E*.*
- φ *est injective si et seulement si :* $\operatorname{Ker} \varphi = \{0_E\}$*, i.e. si et seulement si :* $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0_E \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$*, i.e. si et seulement si la famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est libre.*

Le théorème qui suit caractérise l'injectivité/surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i \in I}$.

1. *f est surjective de E sur F si et seulement si $\Big(f(e_i)\Big)_{i \in I}$ engendre F.*
2. *f est injective sur E si seulement si $\Big(f(e_i)\Big)_{i \in I}$ est libre.*
3. *f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\Big(f(e_i)\Big)_{i \in I}$ est une base de F.*
   $\hookrightarrow$ *L'image de toute base par un isomorphisme est donc une base, et réciproquement.*

Démonstration :

1. On sait que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(f(e_i)\Big)_{i\in I}$. Ainsi : $\operatorname{Im} f = F$ si et seulement si $\Big(f(e_i)\Big)_{i\in I}$ engendre F.
2. Supposons f injective et montrons que $\Big(f(e_i)\Big)_{i\in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle telle que : $\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$. Alors :

   $f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\Big) = 0_F$ et donc : $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$. Comme f est injective, alors $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$ et donc : $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

   Réciproquement, supposons $\Big(f(e_i)\Big)_{i\in I}$ est libre et montrons que f est injective, i.e. que : $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$. Soient $x \in \operatorname{Ker} f$ de coordonnées $(x_i)_{i\in I}$ dans $(e_i)_{i\in I}$. Alors : $0_F = f(x) = f\Big(\sum_{i\in I} x_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} x_i f(e_i)$,

   donc : $\forall i \in I : x_i = 0$, et donc : $x = 0_E$.

Applications linéaires : Notion de rang

Définition (Application linéaire de rang fini, rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On dit que f est de rang fini si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, et de rang infini sinon.
- Si f est de rang fini, on appelle rang de f , noté $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Théorème (Inégalités sur le rang et cas d'égalité)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Si F est de dimension finie, f est de rang fini et : $\mathrm{rg}(f) \leq \dim F$, avec égalité si et seulement si f est surjective.*
2. *Si E est de dimension finie, f est de rang fini et : $\mathrm{rg}(f) \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si f est injective.*

Démonstration.

1. Comme : $\operatorname{Im} f \subset F$, alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et : $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim F$, avec égalité si et seulement si : $\operatorname{Im} f = F$, i.e. si et seulement si f est surjective.
2. Supposons $E \neq \{0_E\}$ et donnons-nous une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Par suite : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\Big)$, donc $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et : $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f \leq n = \dim E$, avec égalité si et seulement si $\Big(f(e_1), \cdots, f(e_n)\Big)$ est libre, i.e. si et seulement si f est injective.

$\square$

Théorème (Applications linéaires entre e. v. de mêmes dimensions finies)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies ***ÉGALES*** *et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

$$f \quad \text{est bijective} \quad \Leftrightarrow f \quad \text{est injective} \quad \Leftrightarrow f \quad \text{est surjective.}$$

Attention : Le théorème ne dit pas que : bijectif = surjectif = injectif en algèbre linéaire ! Elle affirme seulement que c'est vrai lorsque les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont **MÊME DIMENSION FINIE**.

Démonstration.

Par hypothèse : $\dim E = \dim F$. Du coup, f est injective si et seulement si : $\mathrm{rg}(f) = \dim E$, i.e. si et seulement si : $\mathrm{rg}(f) = \dim F$, i.e. si et seulement si f est surjective. $\square$

Théorème (Forme géométrique du théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire E' dans E, alors $f_{|E'}$ est un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im} f$.

Explication : Dans l'égalité : $E = E' \oplus \operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des éléments de E que f ne voit pas, donc f ne voit passer que E', et comme E' ne touche $\operatorname{Ker} f$ que du bout de son zéro, f est injective sur E', donc envoie bijectivement E' sur $\operatorname{Im} f$. De manière moins imagée, $\left(f_{|E'}\right)^{-1}$ est l'application qui, à tout élément de $\operatorname{Im} f$, associe son unique antécédent dans E'.

Démonstration.

Par restriction, $f_{|E'}$ est linéaire de E' dans $\operatorname{Im} f$.

- Pour l'injectivité, sachant que E' et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe : $\operatorname{Ker} f_{|E'} = E' \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
- Pour la surjectivité, soit $y \in \operatorname{Im} f$, disons : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme $E = E' + \operatorname{Ker} f$, alors : $x = x' + k$ pour certains $x' \in E'$ et $k \in \operatorname{Ker} f$, donc :
  $y = f(x) = f(x') + f(k) = f(x') + 0_F = f_{|E'}(x')$.

□

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si E est de dimension finie : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$.

Morale de l'histoire : Si on connait le noyau, on connait un peu l'image (et vice versa).

▶ On notera que dans le théorème du rang, seule la dimension de l'espace de départ intervient. Ce théorème n'a plus de sens lorsque $\dim(E) = \infty$.

Démonstration.

Comme E est de dimension finie, $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire E' dans E. Or, d'après la forme géométrique du théorème du rang, $f_{|E'}$ est un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im} f$ et donc : $\dim E' = \dim \operatorname{Im} f$. Par supplémentarité de E' et $\operatorname{Ker} f$ dans E, on obtient :
$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim E' = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$. □

Pour connaitre une application en général, on n'a pas trop d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. En revanche, pour une application linéaire, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques. On connaît par exemple parfaitement l'application $(x, y, z) \mapsto (2x + y + z, 3x - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ **SI ON SAIT QU'ELLE EST LINÉAIRE** et si on sait que : $f(1, 0, 0) = (2, 3)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (1, -1)$.

- En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= f\Big(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\Big) \\
&\overset{\text{Linéarité}}{=} xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\
&= x(2, 3) + y(1, 0) + z(1, -1) = (2x + y + z, 3x - z).
\end{aligned}
$$

Le théorème qui suit, fondamental, généralise ce principe. Il signifie que, pour se donner une application linéaire complètement, on peut se contenter de donner les valeurs qu'elle prend sur une base quelconque fixée de l'espace vectoriel de départ.

Théorème (Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E possède une base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Pour toute famille $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que :
$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, f(e_k) = f_k$.

Explication : Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

Démonstration : Soit $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une famille fixée de vecteurs de F.

- **Unicité :** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que : $\forall k \in \{1, \cdots, n\}, f(e_k) = g(e_k) = f_k$. Montrons que $f = g$. Pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k g(e_k) \\ &= g\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\Big) = g(x), \end{aligned}$$

et donc $f = g$.

- **Existence :** Soit f l'application de E dans F qui associe, à tout vecteur x de E de coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, le vecteur $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$ de F. Montrons que f est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont les coordonnées respectives de x et y dans $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, les coordonnées de $\lambda x + y$ sont $(\lambda x_k + y_k)_{1 \leq k \leq n}$. Du coup :
$$f(\lambda x + y) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k) f_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k f_k + \sum_{k=1}^{n} y_k f_k = \lambda f(x) + f(y),$$
donc f est bien linéaire. Enfin, soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. Alors les coordonnées de e_k sont la famille $(0, \cdots, 0, 1, 0, .., 0)$ dans laquelle le 1 est placé en $k^{\text{ème}}$ position, donc aussitôt $f(e_k) = f_k$.

Théorème (Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration :

- Si : $\dim E = 0$, la seule application linéaire de E dans F est l'application nulle qui envoie 0_E sur 0_F, donc : $\mathcal{L}(E,F) = \{0_{\mathcal{L}(E,F)}\}$ et $\dim \mathcal{L}(E,F) = 0 = \dim E \times \dim F$.
- Si : $\dim E \neq 0$, nous pouvons nous donner une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Il n'est pas trop dur de vérifier que l'application $u \overset{\varphi}{\mapsto} \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ est linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ dans F^n, et d'après le théorème précédent :

$$\forall (f_1, \cdots, f_n) \in F^n, \exists! u \in \mathcal{L}(E,F), \varphi(u) = (f_1, \cdots, f_n).$$

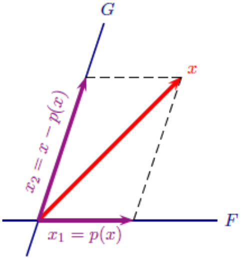
Conclusion : linéaire bijective, φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur F^n. Or F est de dimension finie, donc F^n aussi par produit, puis $\mathcal{L}(E,F)$ par isomorphisme. Finalement :

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F^n = n \times \dim F = \dim E \times \dim F.$$

Définition (Projecteur vectoriel)

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. On appelle projection sur F parallèlement à G l'application linéaire p définie par : $\forall x \in E, p(x) = x_1$.

L'application p est linéaire et $F = \mathrm{Im}(p)$, $G = \mathrm{Ker}(p)$ donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.



Projection d'un vecteur x sur F parallèlement à G

Théorème (Caractérisation des projecteurs)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$*.* p *est une projection vectorielle sur* $\mathrm{Im}(p)$*, parallèlement à* $\mathrm{Ker}(p)$ *si et seulement si* $p \circ p = p$*.*

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Supposons que p est la projection vectorielle sur F parallèlement à G et considérons $x \in E$. Alors, on a bien : $p(p(x)) = p(\underbrace{x_1}_{\in F}) = x_1 = p(x)$.

$\Longleftarrow$ Supposons que $p \circ p = p$ et montrons que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

- d'après le théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Im} p + \dim \operatorname{Ker} p$.
- De plus, $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0_E\}$. En effet, soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$. On a donc $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Donc : $p(x) = 0_E = p(p(y)) = p(y) = x$. Ainsi, $x = 0_E$. Donc on a bien $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} p \times \operatorname{Ker} p$ alors,

$$p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = p(p(y_1)) = p(y_1) = x_1.$$

p est bien la projection vectorielle sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

$\square$

Remarque

Dans la démonstration, nous avons justifié que $E = F \oplus G$ *via la caractérisation :* $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. *Nous aurions pu directement prouver que* $E = F + G$ *en utilisant la décomposition (évidente sur un dessin) :*

$$x = p(x) + (x - p(x)) \text{ avec } p(x) \in \mathrm{Im}(p) \text{ et } x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p),$$

puisque $p(x - p(x)) = p(x) - (p \circ p)(x) = p(x) - p(x) = 0_E$. *Cette approche plus géométrique a le mérite d'être valable en dimension infinie.*

Exercice

Montrer que si p est un projecteur, alors :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right).$$

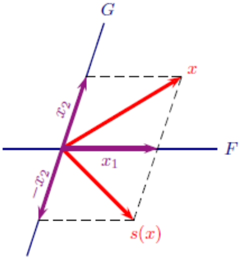
Solution

- $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Or $\left(p - \mathrm{id}_E\right)(x) = p(x) - x = p(p(y)) - p(y) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$.
- $\mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right) \subset \mathrm{Im}(p)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$. On a $p(x) - x = 0_E$ donc $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.

Définition (Symétries vectorielles)

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire s définie par : $\forall x \in E, s(x) = x_1 - x_2$.

L'application s est linéaire et on a : $F = \text{Ker}(s - id_E)$ et $G = \text{Ker}(s + id_E)$, donc : $E = \text{Ker}(s - id_E) \oplus \text{Ker}(s + id_E)$.



Symétrie d'un vecteur x par rapport F parallèlement à G

Théorème (Caractérisation des symétries)

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie vectorielle par rapport à $\operatorname{Ker}(s - id_E)$ *et parallèlement à* $\operatorname{Ker}(s + id_E)$ *si et seulement si* $s \circ s = id_E$.

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Supposons que s est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G et considérons $x \in E$. Alors, on a bien : $s(s(x)) = s(x_1 + (-x_2)) = x_1 + x_2 = x$.

$\Longleftarrow$ Supposons que $s \circ s = id_E$ et montrons que $E = \operatorname{Ker}(s - id_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + id_E)$.

- Analyse : Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe $x_1 \in \operatorname{Ker}(s - id_E)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(s + id_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Ainsi $s(x) = x_1 - x_2$. Donc : $x_1 = (x + s(x))/2$ et $x_2 = (x - s(x))/2$.
- Synthèse : Soit $x \in E$. Posons $x_1 = (x + s(x))/2$ et $x_2 = (x - s(x))/2$. On a : $x = x_1 + x_2$ et de plus, $s(x_1) = x_1$ et $s(x_2) = -x_2$ donc : $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. D'où : $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \times \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ alors, $s(x) = s(x_1 + x_2) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$. s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parall. à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Merci pour votre attention