Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2022/2023
LST MA, Module M617
Responsable : PROF. JAWAD SALHI

Série de Travaux-Dirigés : 1
Approximation numérique des équations différentielles ordinaires

Exercice 1

Considérons le problème de Cauchy suivant : trouver $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = -150y(t) + 30, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Donner la solution exacte de cette équation.
2. Écrire le schéma d'Euler explicite vérifié par $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, correspondant à cette équation et trouver une relation de récurrence entre $y_{n+1} - \frac{1}{5}$ et $y_n - \frac{1}{5}$.
3. En déduire la valeur de y_n.
4. En prenant $h = \frac{1}{50}$, calculer y_n et conclure.
5. Reprendre les mêmes questions pour le schéma d'Euler implicite.

Exercice 2

Soit $\beta > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t) = -\beta y(t), \text{ pour } t > 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où y_0 est une valeur donnée. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.

1. Écrire le schéma du trapèze (appelé aussi de CRANK-NICOLSON) permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n. Sous quelle condition sur h le schéma du trapèze est-il A-stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ a-t-elle lieu ?
2. À partir du schéma du trapèze, en déduire le schéma de HEUN. Sous quelle condition sur h le schéma de HEUN est-il A-stable ?

Exercice 3

Soit le problème de Cauchy $y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$, avec $f : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalement Lipschitzienne par rapport à y et continue par rapport à (t,y).

1. Etudier la consistance et la stabilité des méthodes d'Euler progressif, d'Euler modifié et de Heun.
2. Montrer que le schéma d'Euler progressif est d'ordre un dès que les solutions de l'EDO sont de classe C^2.
3. Montrer que le schéma d'Euler modifié est d'ordre deux dès que les solutions de l'EDO sont de classe C^3.

Exercice 4

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(PC) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), \quad \forall t \in [0,T] \\ y(0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé.} \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de $y \in C^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ vérifiant (PC) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction f est continûment différentiable de $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et est globalemement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L pour la norme choisie sur $\mathbb{R}^m$:

$$\forall t \in [0,T], \forall (y_1,y_2) \in (\mathbb{R}^m)^2, \|f(t,y_2) - f(t,y_1)\| \le L\|y_2 - y_1\|.$$

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{T}{N}$. Montrer, en utilisant un théorème de point fixe rappelé clairement, que si $hL < 1$ la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1 \\ y_0 \mathbb{R}^m \text{ fixé.} \end{cases} \tag{1}$$

   est bien définie.

2. On note $t_n = nh$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que :

$$\|e_{n+1}\| \leq (1 + hL_1)(\|e_n\| + \|\epsilon_n\|)$$

   où $L_1 = \frac{L}{1-hL}$ et ϵ_n désigne l'erreur de consistance :

$$\epsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})).$$

3. En déduire que :

$$\|e_n\| \leq e^{L_1 nh}\|e_0\| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)h}(1 + hL_1)\|\epsilon_i\|$$

   puis la convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\lim_{h \to 0, y_0 \to y(0)} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \|e_n\|\right) = 0.$$

   Pour simplifier, on pourra supposer que f est C^1 et en déduire une majoration de $\|\epsilon_n\|$ en $\mathcal{O}(h^2)$.

Exercice 5
Considérons le problème de Cauchy suivant : trouver $y : [t_0, T] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t_0, T] \\ y\,(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution y.

Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en N intervalles de longueur $h = \frac{T-t_0}{N} = t_{n+1} - t_n$. Pour chaque noeud $t_n = t_0 + nh\,(1 \leq n \leq N)$ on cherche la valeur inconnue y_n qui approche $y(t_n)$. L'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, \cdots, y_n\}$ représente la solution numérique.

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+2} :

$$y(t_{n+2}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(t, y(t)\,dt.$$

1. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{n+2} à partir de y_{n+1} et y_n. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(t_0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive.
2. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{n+2} à partir de y_{n+1} et y_n. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(t_0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive.
3. Proposer une modification du schéma au point précédent pour qu'il devient explicite.