Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia
Département de Mathématiques

A. U. 2022/2023
LST MA, Module M617
Responsable : PROF. JAWAD SALHI

Série de Travaux-Dirigés : 2
Méthode des différences finies pour les EDP elliptiques

Exercice 1 (Principe du maximum continu)
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0,1[\\ u(0) = A,\ u(1) = B. \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que $c \geq 0$ et que (1) admet une solution $u \in C^2$. Montrer que si $f \geq 0$ dans $]0,1[$, $A \geq 0$ et $B \geq 0$, alors $u \geq 0$ dans $[0,1]$.

Exercice 2 (Approximation de la dérivée première et seconde)
Supposons $a, b \in \mathbb{R}$ et $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^4. Soit $x \in]a,b[$. Montrer, en utilisant des développements de Taylor de u autour de x, que, lorsque $h \to 0$,

$$u'(x) - \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \mathcal{O}(h), \quad u'(x) - \frac{u(x)-u(x-h)}{h} = \mathcal{O}(h),$$
$$u'(x) - \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

et que

$$u''(x) - \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} = \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

Exercice 3 (Approximation par un schéma de différences finies)

1. Écrire le schéma de différences finies avec pas constant pour le problème avec conditions aux limites de Dirichlet non homogènes :

$$\begin{cases} -u''(x) + \sin(u(x)) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = a, \\ u(1) = b, \end{cases}$$

   où $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Écrire le schéma de différences finies avec pas constant pour le problème avec conditions aux limites de type Neumann :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u'(0) = a, \\ u'(1) = b, \end{cases}$$

   avec $c \in C([0,1], \mathbb{R}_+^*)$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3. Écrire le schéma de différences finies avec pas constant pour le problème avec conditions aux limites aux limites de Fourier (ou Robin) :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u'(0) - \alpha(u(0) - \tilde{u}) = 0, \\ u'(1) + \alpha(u(1) - \tilde{u}) = 0, \end{cases}$$

   avec $c \in C([0,1], \mathbb{R}_+^*)$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\tilde{u} \in \mathbb{R}$.

Dans les trois cas, écrire le schéma de différences finies sous la forme d'un système linéaire $\mathrm{A}_h \mathrm{U}_h = \mathrm{F}_h$ où A_h est une matrice et U_h et F_h des vecteurs qu'on explicitera.

Exercice 4 (Différences finies et principe du maximum discret)
Dans cet exercice, on considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

et son approximation par différences finies

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = f_i, & \forall i = 1,\cdots,N \\ u_0 = 0, \\ u_{N+1} = 0, \end{cases}$$

où u_i est censé être une approximation de $u(x_i)$ avec $x_i = ih$ pour $i = 0,\cdots,N+1$ et $h = \frac{1}{N+1}$ le pas du maillage.

1. Écrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $A_h U_h = F_h$ en explicitant soigneusement A_h, U_h et F_h.
2. Montrer que A_h est symétrique et définie positive.
3. En déduire l'existence et l'unicité d'une solution au problème approché.
4. On suppose ici $f \geq 0$. Montrer que $u_i \geq 0$ pour tout $i = 0,\cdots,N+1$.

Exercice 5 (Problème elliptique et discrétisation par différences finies)
Soit $f \in C^2([0,1])$. On veut résoudre de manière approchée le problème (P) suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \dfrac{u'(x)}{1+x} = f(x), & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

en utilisant le schéma à trois points usuel pour la dérivée seconde :

$$\frac{1}{h^2}\{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\} \approx u''(x_i), \quad x_i = ih$$

et le schéma centré suivant pour la dérivée première :

$$\frac{1}{2h}\{u_{i+1} - u_{i-1}\} \approx u'(x_i).$$

1. Ecrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $\mathrm{A}_h\mathrm{U}_h = \mathrm{F}_h$ en précisant la matrice A_h et le second membre F_h.
2. Montrer que la matrice A_h est monotone.
3. On définit la fonction auxiliaire θ par :

$$\theta(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2\ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2+2x)\ln(2), \quad x \in [0,1].$$

   (a) Montrer que θ est solution d'un problème aux limites de même type que (P).

   (b) Montrer qu'il existe $C > 0$, indépendante de h, tel que :

$$\left|\frac{-\theta(x_{i+1}) + 2\theta(x_i) - \theta(x_{i-1})}{h^2} + \frac{\theta(x_{i+1}) - \theta(x_{i-1})}{2h(1+ih)} - 1\right| \leq Ch^2, \text{ pour } i = 1,\cdots,N.$$

   (c) On définit le vecteur θ_h de composantes $\theta(x_i)$. Montrer que

$$(\mathrm{A}_h\theta_h)_i \geq 1 - Ch^2, \text{ pour } i = 1,\cdots,N.$$

   (d) Déduire de ce qui précède qu'il existe une constante M indépendante de h telle que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq M.$$

4. En précisant les hypothèses sur u solution de (P) montrer que le schéma adopté converge et préciser l'ordre de convergence.