

Analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Méthode des différences finies

Jawad SALHI

Faculté des Sciences et Techniques - Errachidia

A.U. 2022/2023

Plan

- 1 Introduction
 - Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles
 - Notion de problème bien posé
 - Classification des équations aux dérivées partielles
- 2 Equations elliptiques en dimension un et deux
 - Principe de la méthode de différences finies
 - Analyse de la méthode des différences finies
- 3 Méthode des différences finies pour l'équation de la chaleur
 - Discrétisation par un schéma d'Euler explicite en temps
 - Schéma implicite et schéma de Crank-Nicolson
- 4 Méthode des différences finies pour l'équation des ondes
 - Le schéma explicite naturel
 - Le schéma implicite naturel
- 5 Notes bibliographiques et remarques

Pour aborder le calcul numérique (à l'aide d'un outil informatique) des solutions d'un problème réel, on passe par les étapes suivantes :

Description qualitative des phénomènes physiques : Cette étape, effectuée par des spécialistes des phénomènes que l'on veut quantifier (ingénieurs, chimistes, biologistes etc...) consiste à répertorier tous les mécanismes qui entrent en jeu dans le problème qu'on étudie.

Modélisation : Il s'agit, à partir de la description qualitative précédente, d'écrire un modèle mathématique. En d'autres termes, la modélisation mathématique est la science de représenter (ou de transformer) une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul. On supposera ici que ce modèle amène à un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Selon les hypothèses effectuées, la modélisation peut aboutir à plusieurs modèles, plus ou moins complexes. Dans la plupart des cas, on ne saura pas calculer une solution analytique, explicite, du modèle ; on devra faire appel à des techniques de résolution approchée.

Analyse mathématique du modèle mathématique : Même si l'on ne sait pas trouver une solution explicite du modèle, il est important d'en étudier les propriétés mathématiques, dans la mesure du possible. Il est bon de se poser les questions suivantes :

- Le problème est-il bien posé, c'est-à-dire y a-t-il existence et unicité de la solution ?
- Les propriétés physiques auxquelles on s'attend sont-elles satisfaites par les solutions du modèle mathématique ? Si l'inconnue est une concentration, par exemple, peut-on prouver que la solution du modèle censé représenter le modèle physique est toujours positive ?
- Y a-t-il continuité de la solution par rapport aux données ?

Discrétisation et résolution numérique : Un problème posé sur un domaine continu (espace-temps) n'est pas résoluble tel quel par un ordinateur, qui ne peut traiter qu'un nombre fini d'inconnues. Pour se ramener à un problème en dimension finie, on discrétise l'espace et/ou le temps. Si le problème original est linéaire on obtient un système linéaire. Si le problème original est non linéaire on aura un système non linéaire à résoudre.

Analyse numérique : Il s'agit maintenant de l'analyse mathématique du schéma numérique. En effet, une fois le problème discret obtenu, il est raisonnable de se demander si la solution de ce problème est proche et en quel sens, du problème continu. De même, si on doit mettre en oeuvre une méthode itérative pour le traitement des non-linéarités, il faut étudier la convergence de la méthode itérative proposée.

Mise en oeuvre, programmation et analyse des résultats : La partie mise en oeuvre est une grosse consommatrice de temps. Actuellement, de nombreux codes existent, qui permettent en théorie de résoudre "tous" les problèmes. Il faut cependant procéder à une analyse critique des résultats obtenus par ces codes, qui ne sont pas toujours compatibles avec les propriétés physiques attendues...

Équation de Poisson

Soit d la dimension de l'espace (en général, $d = 1, 2$ ou 3), l'équation de Poisson s'écrit :

$$-\operatorname{div}(\kappa \nabla u) = f,$$

En une dimension d'espace, l'équation de Poisson s'écrit donc :

$$-(\kappa u)' = f.$$

- Le réel κ est un coefficient de diffusion et le terme $-\kappa \nabla u$ est un flux de diffusion.
- Avec un coefficient constant $\kappa = 1$, l'équation de Poisson s'écrit en une dimension d'espace $-u'' = f$.
- En deux dimensions d'espace, elle s'écrit $-\Delta u = f$ avec $\Delta u = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u$, où $\partial_{xx}^2 u$ (respectivement $\partial_{yy}^2 u$) désigne la dérivée partielle seconde de u par rapport à x (respectivement y).
- Dans le cas $f = 0$, on obtient l'équation de Laplace : $-\Delta u = 0$.

Équation de la chaleur

On note x la variable d'espace, c'est-à-dire un point de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3), et t la variable de temps. Dans Ω les sources de chaleur sont représentées par une fonction $f(t, x)$, tandis que la température est une fonction inconnue $u(t, x)$. En combinant la loi de conservation de l'énergie et la loi de Fourier, on obtient une équation de la température u :

$$u_t - \Delta u = f.$$

Il faut ajouter à cette équation qui est valable dans tout le domaine Ω , une relation, appelée *condition aux limites*, qui indique ce qui se passe à la frontière ou au bords $\partial\Omega$ du domaine, et une autre relation qui indique quel est l'état initial de la température. Par convention, on choisit l'instant $t = 0$ pour être le temps initial, et on impose une condition initiale

$$u(t = 0, x) = u_0,$$

où u_0 est la fonction de distribution initiale de température dans le domaine Ω .

En ce qui concerne la condition aux limites, cela dépend du contexte physique.

- Si le domaine est supposé baigner dans un thermostat à température nulle, alors la température vérifie la condition aux limites de *Dirichlet*

$$u(t, x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0.$$

Ainsi, on obtient l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(t, x) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(t = 0, x) = u_0 & \text{pour } x \in \Omega. \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

- Si le domaine est supposé thermiquement isolé de l'extérieur, alors le flux de chaleur sortant au bord est nul et la température vérifie la condition aux limites de *Neumann*

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t, x) := n(x) \cdot \nabla u(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0,$$

où n est la normale extérieure unité de Ω .

Équation des ondes

L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration. Par exemple, en deux dimensions d'espace elle est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue (comme la peau d'un tambour). Au repos, la membrane occupe un domaine plan Ω . Sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité f , elle se déforme et son déplacement normal est noté u . On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de *Dirichlet*. L'équation des ondes dont u est solution est donnée par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(t = 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \\ u_t(t = 0) = u_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Remarquons qu'il s'agit d'une équation du deuxième ordre en temps et qu'il faut donc deux conditions initiales pour u .

Le mathématicien Jacques Hadamard a donné une définition de ce qu'est un "bon" modèle, en parlant de problème bien posé. On décide de noter f les données (le second membre, les données initiales, le domaine etc), u la solution recherchée et \mathcal{A} l'opérateur qui agit sur u . Il s'agit ici de notations abstraites, \mathcal{A} désignant à la fois l'équation aux dérivées partielles et le type de conditions initiales ou aux limites. Le problème est donc de trouver u solution de

$$\mathcal{A}(u) = f. \quad (1)$$

Definition

On dit que le problème (1) est bien posé si pour toute donnée f il admet une solution unique u , et cette solution u dépend continûment de la donnée f .

Nous allons brièvement classifier les équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre portant sur des fonctions réelles de deux variables réelles $u(x, y)$. Une telle équation s'écrit :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g. \quad (2)$$

Pour simplifier nous supposons que les coefficients a, b, c, d, e, f sont constants.

Definition

On dit que l'équation (2) est elliptique si $b^2 - 4ac < 0$, parabolique si $b^2 - 4ac = 0$, et hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$.

Si on applique cette définition aux divers modèles du deuxième ordre que nous avons évoqué dans cette introduction (en remplaçant le couple (x, y) par les variables (t, x) en une dimension d'espace), nous concluons que l'équation de la chaleur est parabolique, que l'équation des ondes est hyperbolique, et que l'équation de Laplace est elliptique.

Principe de la méthode en dimension un

On considère le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

où $f \in C([0, 1])$. Les conditions aux limites considérées ici sont dites de type *Dirichlet* homogène (le terme homogène désigne les conditions nulles). Cette équation modélise par exemple la diffusion de la chaleur dans un barreau conducteur chauffé (terme source f) dont les deux extrémités sont plongées dans de la glace.

Méthode de différences finies : On cherche une valeur approchée de u en certains points x_i de l'intervalle $[0, 1]$. Ces points sont appelés points de discrétisation du maillage ; on les choisit (pour simplifier) équirépartis, i.e. de la forme : $x_i = ih$, $i \in \{0, \dots, N + 1\}$, où $h = 1/(N + 1)$ est le pas du maillage (destiné à tendre vers 0 quand le nombre $N + 2$ de points de discrétisation devient très grand).

On a en particulier aux extrémités : $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$; les autres points x_i pour $i \in \{1, \dots, N\}$, sont dits internes.

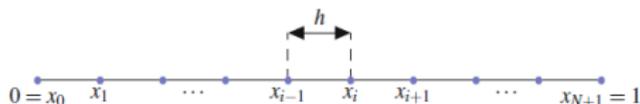


Figure – Les points de discrétisation du maillage

Le principe de la méthode des différences finies consiste à écrire l'équation aux dérivées partielles (3) aux points de discrétisation x_i :

$$-u''(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, N$$

puis à approcher l'opérateur différentiel (ici $-u''$) par un quotient différentiel, de manière à en déduire un système d'équations en fonction d'inconnues discrètes censées représenter des approximations de u aux points de discrétisation.

Voici comment on procède pour l'équation de Poisson unidimensionnelle. Effectuons d'abord un développement de Taylor en x_i , en supposant que $u \in C^4([0, 1])$:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i) \quad (4)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i) \quad (5)$$

avec $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. En additionnant, on obtient :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \mathcal{O}(h^4).$$

Il semble donc raisonnable d'approcher la dérivée seconde $-u''(x_i)$ par le quotient différentiel :

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}.$$

- Sous des hypothèses de régularité sur u , on peut montrer que cette approximation est d'ordre 2 au sens :

$$R_i = u''(x_i) - \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} = \mathcal{O}(h^2).$$

- On appelle *erreur de consistance* au point x_i la quantité R_i .
- L'approximation de $u''(x_i)$ par un quotient différentiel suggère de considérer les équations discrètes suivantes :

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

dont les inconnues discrètes sont les u_i , $i = 1, \dots, N$.

- Notons que la première équation fait intervenir u_0 tandis que la dernière fait intervenir u_{N+1} . Ces valeurs ne sont pas à proprement parler des inconnues, puisqu'elles sont données par les conditions aux limites.

On pose donc $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$. Le système complet d'équations s'écrit donc

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(x_i) & \forall i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Remarque

Attention à ne pas confondre u_i et $u(x_i)$: les équations discrètes (6) font intervenir les inconnues discrètes u_i , $i = 1, \dots, N$ et non pas les valeurs $u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ de la solution exacte. En général, ces valeurs ne sont pas les mêmes. Si la discrétisation a été effectuée correctement (comme c'est le cas ici et comme nous le démontrerons mathématiquement plus loin), la résolution du système discret nous permettra d'obtenir des valeurs u_i , $i = 1, \dots, N$ des inconnues discrètes qui seront de bonnes approximations des valeurs $u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ de la solution exacte que nous ne pouvons pas, dans le cas général, calculer explicitement.

Autres conditions aux limites

Conditions de Dirichlet non homogènes : Supposons que les conditions aux limites en 0 et en 1 soit maintenant de type Dirichlet non homogènes, c'est-à-dire :

$$u(0) = a \text{ et } u(1) = b \quad (7)$$

avec a et b pas forcément nuls. Dans ce cas, les équations discrètes du schéma aux différences finies (6) restent identiques mais les valeurs u_0 et u_{N+1} sont maintenant données par $u_0 = a$ et $u_{N+1} = b$.

Conditions de Neumann : On appelle condition de *Neumann* une condition qui impose une valeur de la dérivée, par exemple :

$$u'(0) = a. \quad (8)$$

Conditions de Fourier : On appelle condition de *Fourier* ou condition de *Robin* une condition qui impose une relation entre la valeur de la dérivée et la valeur de la solution, par exemple,

$$u'(1) + \alpha u(1) = b, \quad (9)$$

avec $\alpha > 0$. Cette condition est donc un mélange des conditions de *Dirichlet* et de *Neumann* et est souvent utilisée pour exprimer une condition de transfert, thermique par exemple, entre un milieu et l'extérieur.

Conditions mixtes : on dit que les conditions aux limites sont mixtes si elles sont de type différent sur des portions de frontière du domaine : on a des conditions mixtes dans le cas unidimensionnel si, par exemple, on a une condition de *Dirichlet* en 0 et une condition de *Neumann* en 1.

Exemple : Prenons par exemple le cas de conditions mixtes, en considérant l'équation (3) en $x = 0$ avec les conditions (8) et (9) en $x = 1$. Voyons comment tenir compte de ces nouvelles conditions limites :

- Pour approcher la condition de *Neumann* en 0, on effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 en 0 :

$$u'(0) = \frac{u(x_1) - u(0)}{h} + \varepsilon(h) = a.$$

Ceci suggère l'équation discrète suivante pour u_0 en écrivant que :

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = a \leftrightarrow u_0 = u_1 - ah.$$

- De la même manière, on écrit un développement limité pour la dérivée dans la condition de Fourier (9) :

$$\frac{u(1) - u(x_N)}{h} + \varepsilon(h) + \alpha u(1) = b$$

ce qui suggère l'approximation suivante :

$$\frac{u_{N+1} - u_N}{h} + \alpha u_{N+1} = b \leftrightarrow u_{N+1} = \frac{u_N + bh}{1 + \alpha h}.$$

Principe de la méthode en dimension deux

On cherche à approcher la solution u du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $[0, 1]$. Pour cela, on recouvre Ω de petits rectangles élémentaires de taille $h_1 = 1/(N_1 + 1)$ dans la direction x_1 et $h_2 = 1/(N_2 + 1)$ dans la direction x_2 .

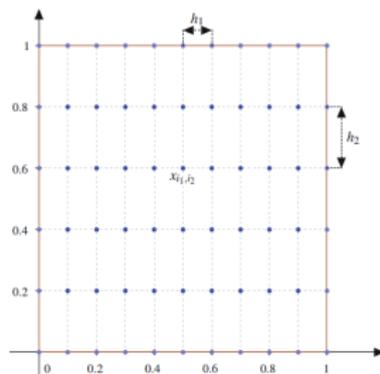


Figure – Maillage 2d

On cherche, pour chaque indice $i_1 \in \{0, \dots, N_1 + 1\}$, $i_2 \in \{0, \dots, N_2 + 1\}$, une approximation, notée u_{i_1, i_2} , de $u(i_1 h_1, i_2 h_2)$. En effectuant les développements limités de Taylor dans les deux directions, on approche $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, \cdot)$ (respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\cdot, x_2)$) par :

$$\frac{u(x_1 + h_1, \cdot) - 2u(x_1, \cdot) + u(x_1 - h_1, \cdot)}{h_1^2}$$

(respectivement par $\frac{u(\cdot, x_2 + h_2) - 2u(\cdot, x_2) + u(\cdot, x_2 - h_2)}{h_2^2}$).

Compte tenu du fait que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, cela donne le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{u_{i_1+1, i_2} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1-1, i_2}}{h_1^2} - \frac{u_{i_1, i_2+1} - 2u_{i_1, i_2} + u_{i_1, i_2-1}}{h_2^2} \\ = f(x_{i_1, i_2}), \text{ pour } i_1 \in \{1, \dots, N_1\}, i_2 \in \{1, \dots, N_2\}, \\ u_{i_1, i_2} = 0, \text{ pour } i_1 \in \{0, N_1 + 1\} \text{ ou } i_2 \in \{0, N_2 + 1\}. \end{array} \right.$$

Ce schéma s'appelle usuellement «**schéma à cinq points du laplacien**» ; il s'agit d'un schéma **centré**, où pour évaluer la valeur de u au point x_{i_1, i_2} , on utilise les valeurs en cinq points centrés autour du point x_{i_1, i_2} : le point x_{i_1, i_2} lui-même et les quatre points suivants : x_{i_1, i_2-1} , x_{i_1, i_2+1} , x_{i_1-1, i_2} et x_{i_1+1, i_2} .

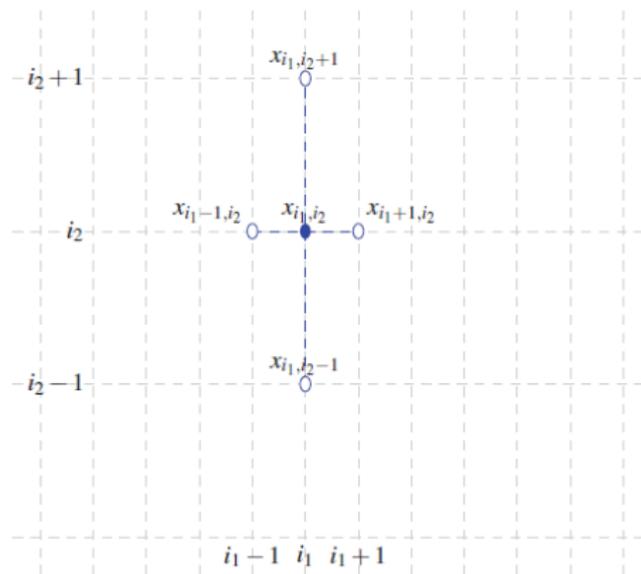


Figure – Le schéma à cinq points du laplacien

Questions d'analyse numérique

Voici un certain nombre de questions du domaine de l'analyse numérique, auxquelles nous tenterons de répondre dans la suite :

- 1 Le problème obtenu avec des inconnues localisées aux nœuds du maillage admet-il une (unique) solution ?
- 2 La solution du problème discret satisfait-elle les propriétés physiques qui sont vérifiées par la solution du modèle mathématique ?
- 3 La solution du problème discret converge-t-elle vers la solution du problème continu lorsque le pas du maillage h tend vers 0 ?

On cherche à discrétiser le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

où $c \in C([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, qui peut modéliser par exemple un phénomène de diffusion-réaction d'une espèce chimique.

- On se donne un pas du maillage constant $h = 1/(N + 1)$ et une subdivision de $[0, 1]$, notée $(x_k)_{k=0, \dots, N+1}$ avec $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$. Soit u_i l'inconnue discrète associée au nœud i , $i = 1, \dots, N$. On pose $u_0 = u_{N+1} = 0$.
- On obtient les équations discrètes en approchant $u''(x_i)$ par quotient différentiel. Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i & \forall i = 1, \dots, N \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

avec $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

Remarque

On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le «**schéma à trois points**» de la dérivée seconde. Il s'agit d'un schéma dit «**centré**» : pour évaluer la valeur de u au point x_i , on utilise les valeurs en trois points centrés autour de x_i , le point x_i lui-même et les points x_{i+1} et x_{i-1} , comme schématisé sur cette figure :

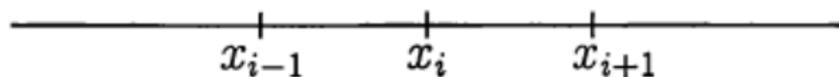


Figure – Le schéma à 3 points

On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$A_h U_h = F_h \quad (12)$$

avec

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 + c_{N-1} h^2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix},$$

$$U_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_h = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Les questions suivantes surgissent alors naturellement :

- ① Le système (12) admet-il une unique solution ?
- ② A-t-on convergence de U_h vers u et en quel sens ?

Proposition

Soit $c = (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que $c_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, N$, alors la matrice A_h définie dans (12) est symétrique définie positive et donc inversible.

Remarque

Puisque A_h est symétrique définie positive, donc inversible, cela entraîne l'existence et l'unicité de la solution de (12).

Introduisons à présent une autre notion utile : celle de matrice monotone.

Definition (Matrice monotone)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$. On dit que A est à coefficients positifs (ou $A \geq 0$) si $a_{i,j} \geq 0$, $\forall i, j = 1, \dots, N$. On dit que A est monotone si A est inversible et $A^{-1} \geq 0$, c-à-d que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

On a la caractérisation suivante des matrices monotones :

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$. Alors A est une matrice monotone si et seulement si

$$\forall v \in \mathbb{R}^N, \quad Av \geq 0 \Rightarrow v \geq 0. \quad (13)$$

(Les inégalités s'entendent composante par composante.)

On introduit une propriété qualitative des solutions du problème (10).

Théorème (Principe du maximum)

Supposons que $c \geq 0$ et que le problème (10) admet une solution $u \in C^2$. Si $f \geq 0$ dans $]0, 1[$, alors on a : $u \geq 0$ dans $[0, 1]$.

Explication : Cette propriété mathématique correspond à l'intuition physique : par exemple, si on chauffe $f \geq 0$, la température intérieure sera supérieure à celle au bord $u \geq 0$. Il est donc souhaitable que la solution approchée satisfasse la même propriété.

Lemme (Monotonie de la matrice de discrétisation)

Soit $(c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ et $A_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie en (12). Si $c_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, N$ alors A_h est une matrice monotone.

Explication : L'avantage des schémas dont la matrice est monotone est de satisfaire la propriété de conservation de la positivité qui peut être cruciale dans les applications physiques :

Si on a : $A_h U_h = F_h$ avec $F_h \geq 0$, alors $U_h \geq 0$.

▷ La troisième question concerne la convergence de la méthode : en d'autres termes, a-t-on par exemple, en chacun des sommets du maillage : $u_j - u(x_j) \rightarrow 0$ quand le pas de discrétisation h tend vers zéro ? Peut-on évaluer par ailleurs la précision de la méthode ?

Une première étape consiste à évaluer l'erreur dite de «consistance» de ce schéma.

Definition (Erreur de consistance)

On appelle erreur de consistance la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique.

- Dans le cas du schéma (11), l'erreur de consistance au point x_i est donc définie par :

$$R_i = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + c(x_i)u(x_i) - f(x_i). \quad (14)$$

- L'erreur de consistance R_i est donc l'erreur qu'on commet en remplaçant l'opérateur $-u''$ par le quotient différentiel

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}.$$

- Cette erreur peut être évaluée si u est suffisamment régulière en effectuant des développements de Taylor.

Definition (Ordre du schéma)

On dit qu'un schéma de discrétisation à N points est d'ordre p s'il existe $C \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de la solution exacte, tel que l'erreur de consistance satisfait :

$$\max_{i=1, \dots, N} (R_i) \leq Ch^p,$$

où h est le le pas du maillage.

Definition (Consistance du schéma)

On dit qu'un schéma de discrétisation est consistant si

$$\max_{i=1, \dots, N} (R_i) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

où N est le nombre de points de discrétisation.

Lemme

Si la solution de (10) vérifie $u \in C^4([0, 1])$ (ce qui suppose f de classe C^2), le schéma (11) est consistant d'ordre 2 et on a plus précisément :

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1]} |u^{(4)}| \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Remarque

Si on note $\bar{U}_h =: (u(x_i))_{i=1, \dots, N}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs exactes de la solution de (10) et $U_h = (u_1, \dots, u_N)$ la solution de (12), on a :

$$R_h = A_h \bar{U}_h - F_h = A_h(\bar{U}_h - U_h) \quad (16)$$

où $R_h \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur de composantes R_i , $i = 1, \dots, N$, erreur de consistance en x_i définie en (14).

Remarque

Remarquons que, si u est de dérivée quatrième nulle, alors l'erreur de consistance R_h est nulle, de sorte qu'on a : $A_h(U_h - \bar{U}_h) = 0$. Comme la matrice A_h est inversible, il s'ensuit que $U_h = \bar{U}_h$, ce qui signifie que pour tout $i \in \{0, \dots, N + 1\}$, nous avons $u_i = u(x_i)$. La solution discrète coïncide donc avec la solution exacte en chacun des sommets (internes ou non) du maillage ! Ceci est très spécifique au cas où la solution exacte u se trouve être une fonction polynomiale de degré au plus 3. Bien sûr, en général $u_i \neq u(x_i)$.

La preuve de convergence du schéma utilise la notion de consistance, ainsi qu'une notion de stabilité, que nous introduisons maintenant :

Definition (Stabilité du schéma)

On dit que le schéma (11) est stable, au sens où la norme infinie de la solution approchée est bornée par un nombre ne dépendant que de f .

Proposition

La matrice de discrétisation A_h satisfait :

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}, \quad (17)$$

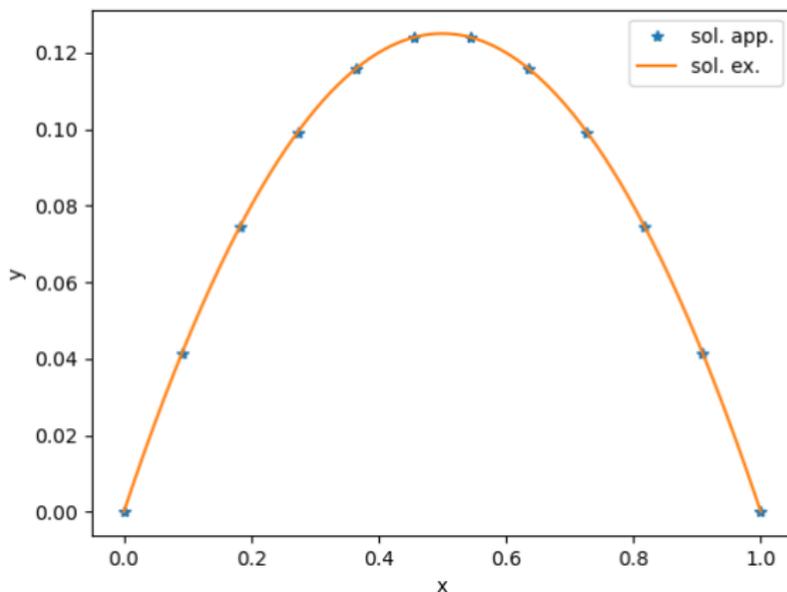
inégalité qui peut aussi s'écrire comme une estimation sur les solutions du système (12) :

$$\|U_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f\|_\infty. \quad (18)$$

Remarque

L'inégalité (18) donne une estimation sur les solutions approchées indépendantes du pas de maillage. C'est ce type d'estimation que l'on recherchera comme garant de la stabilité d'un schéma numérique.

Nous traçons sur la figure ci-dessous la solution exacte $\bar{u}(x) = x(1 - x)/2$ et la solution approché U_h dans le cas particulier utilisé dans la preuve de l'estimation de stabilité lorsque la solution discrète coïncide avec la solution exacte aux points de discrétisations.



Definition (Erreur de discrétisation)

On appelle erreur de discrétisation en x_i , la différence entre la solution exacte en x_i et la i -ème composante de la solution donnée par le schéma numérique :

$$e_i = u(x_i) - u_i \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (19)$$

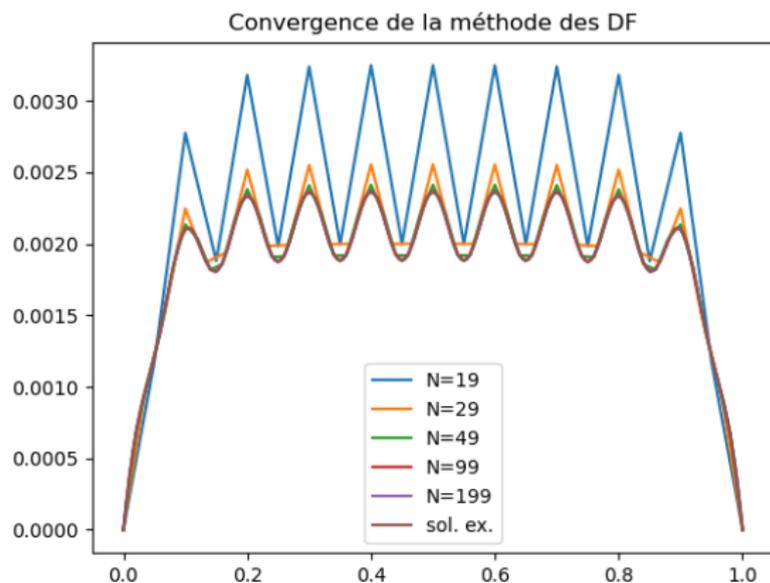
Théorème

Soit u la solution exacte de (10). On suppose $u \in C^4([0, 1])$. Soit U_h la solution de (11). Alors l'erreur de discrétisation définie par (19) satisfait :

$$\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_{\infty}.$$

Le schéma est donc convergent d'ordre 2.

Illustrons le résultat précédent avec un exemple numérique. On prend $c(x) = 1000 \sin(10\pi x)^2$ et $f(x) = 1$, et nous calculons les approximations par DF pour $N = 19, 29, 49, 99$ et 199 , c-à-d $h = 0,05, 0,033, 0,02, 0,01$ et $0,005$. Notons que la solution exacte, a été calculé avec la méthode des DF avec $N = 8000$, puisqu'aucune formule explicite semble être disponible.



Remarque

Supposons que l'on cherche à calculer la solution approchée de $-u'' = f$. Le second membre f est donc une donnée du problème. Supposons que des erreurs soient commises sur cette donnée (par exemple des erreurs d'arrondi, ou des erreurs de mesure). On obtient alors un nouveau système, qui s'écrit $A_h \tilde{U}_h = F_h + \varepsilon_h$ où ε_h représente la discrétisation des erreurs commises sur le second membre. Si on résout $A_h \tilde{U}_h = F_h + \varepsilon_h$ au lieu de $A_h U_h = F_h$, l'erreur commise sur la solution du système s'écrit :

$$E_h = \tilde{U}_h - U_h = A_h^{-1} \varepsilon_h.$$

On en déduit que :

$$\|E_h\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|\varepsilon_h\|_\infty.$$

On a donc une borne d'erreur sur l'erreur qu'on obtient sur la solution du système par rapport à l'erreur commise sur le second membre.

On se propose de résoudre numériquement le problème unidimensionnel : trouver $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pour } t \in]0, T[, \\ u(x, t = 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (20)$$

où $u(x, t)$ représente la température au point x et au temps t . Il s'agit de l'équation de la chaleur en une dimension d'espace.

- Dans toute la suite, nous supposons que le problème (20) admet une solution u suffisamment régulière, et, pour simplifier, que la condition initiale u_0 est compatible avec la condition à la limite, c'est-à-dire : $u_0(0) = u_0(1) = 0$.
- Le but est de calculer une solution approchée en un certain nombre de points (x_i, t_n) du domaine espace-temps, c'est-à-dire de l'ensemble des points $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$.

- Pour cela, on se donne un ensemble de points t_n , $n = 0, \dots, M + 1$ de l'intervalle $[0, T]$, et un ensemble de points x_i , $i = 0, \dots, N + 1$ de l'intervalle $[0, 1]$. Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace. Soit $h = 1/(N + 1)$ le pas de discrétisation en espace, et $k = T/(M + 1)$, le pas de discrétisation en temps. On pose alors $t_n = nk$ pour $n = 0, \dots, M + 1$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N + 1$. On cherche alors en chacun des points (x_i, t_n) un nombre, noté u_i^n qui soit une «bonne» approximation de $u(x_i, t_n)$.
- Comme la condition initiale u_0 est compatible avec la condition à la limite, on a

$$u_0^0 = u_0(0) = u_0(1) = u_{N+1}^0 = 0.$$

- Il est clair qu'aux extrémités de l'intervalle en espace $[0, 1]$, il suffit de prendre la condition à la limite exacte, i.e. d'imposer :

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \{0, \dots, M + 1\}.$$

De cette sorte, à tout instant t_n , les seules inconnues du problème sont les valeurs correspondant aux sommets internes du maillage en espace (i.e. les points x_i correspondant à $i \in \{1, \dots, N\}$).

- De même, à l'instant initial $t_0 = 0$, il suffit de prendre pour solution approchée la valeur de la donnée initiale en chacun des points x_i , i.e. d'imposer :

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N\}.$$

- Les seules valeurs qui restent inconnues à ce stade sont donc u_i^n pour $i = 1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, M + 1$. Ainsi, on cherche à calculer une solution approchée du problème (20) en calculant des valeurs u_i^n , $i = 1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, M + 1$, censées être des approximations des valeurs $u(x_i, t_n)$, $i = 1, \dots, N$, et $n = 1, \dots, M + 1$.

L'approximation en temps par la méthode d'Euler explicite consiste à écrire la première équation de (20) en chaque point x_i et temps t_n , à approcher la dérivée en temps $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k}$$

et la dérivée en espace $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n)$ par le quotient différentiel :

$$-\frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2}.$$

On obtient alors le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M,$$

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n = 0, \dots, M + 1.$$

(21)

On notera U^n le vecteur de \mathbb{R}^N formé par les N inconnues u_i^n , pour $i \in \{1, \dots, N\}$. Ainsi les N premières équations du schéma peuvent s'écrire vectoriellement sous la forme suivante :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + A_h U^n = 0, \text{ pour } n = 0, \dots, M,$$

où on a posé

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

La donnée initiale discrète est également un vecteur :

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0(x_1) \\ u_0(x_2) \\ \vdots \\ u_0(x_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Avec ces notations, le schéma est équivalent à :

$$\begin{cases} U^{n+1} = (I - kA_h) U^n \text{ pour } n = 0, \dots, M, \\ U^0 = U_0, \end{cases} \quad (23)$$

où I est la matrice identité d'ordre N .

- Connaissant U^0 , on peut ainsi calculer de proche en proche chacun des U^n .
- Le schéma est dit explicite car on peut ainsi très facilement calculer U^{n+1} à partir de U^n sans avoir à inverser de système linéaire.
- On peut également noter l'apparition du facteur $\frac{k}{h^2}$ qui jouera un rôle important dans la suite.

Consistance

Definition (Erreur de consistance, Euler explicite)

On pose $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$ la valeur exacte de la solution en x_i et t_n du problème (20). L'erreur de consistance du schéma (21) en (x_i, t_n) , notée R_i^n , est définie comme la somme des erreurs de consistance en temps et en espace :

$$\begin{aligned}
 R_i^n &= \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n, \text{ avec} \\
 \tilde{R}_i^n &= \frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{k} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \quad \text{et} \\
 \hat{R}_i^n &= -\frac{\bar{u}_{i+1}^n - 2\bar{u}_i^n + \bar{u}_{i-1}^n}{h^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Proposition (Consistance, Euler explicite)

Le schéma (21) est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ ne dépendant que de u tel que l'erreur de consistance $\mathbf{R}^n = (R_1^n, \dots, R_N^n)^t$ définie par (24) vérifie :

$$\|\mathbf{R}^n\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |R_i^n| \leq C(k + h^2).$$

Démonstration.

On a vu lors de l'étude des problèmes elliptiques que l'erreur de consistance en espace \widehat{R}_i^n est d'ordre 2. Un développement de Taylor en temps donne facilement que \widetilde{R}_i^n est d'ordre 1 en temps. □

Quelques remarques

On aurait pu approcher différemment la dérivée en temps, par exemple en écrivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_i, t_n) - u(x_i, t_{n-1})}{k}.$$

On obtient alors le schéma suivant :

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{k} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0, i = 1, \dots, N, n = 1, \dots, M + 1.$$

Vectoriellement, ce schéma peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{k} + A_h U^n = 0, \text{ pour } n = 1, \dots, M + 1.$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + A_h U^{n+1} = 0, \text{ pour } n = 0, \dots, M. \quad (25)$$

Quelques remarques

Le schéma (25) est dit **implicite**, car la formule ci-dessus n'est pas une simple relation de récurrence. En effet, U^{n+1} apparaît comme la solution d'une équation une fois que U^n est connue. Comme la matrice $(I + kA_h)$ est symétrique définie positive (et donc inversible), alors cette équation admet une unique solution et on obtient :

$$\begin{cases} U^{n+1} = (I + kA_h)^{-1} U^n \text{ pour } n = 0, \dots, M, \\ U^0 = U_0. \end{cases}$$

La mise en œuvre de la méthode d'Euler implicite nécessite la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps, alors que la méthode explicite est simplement un produit matrice-vecteur à chaque pas de temps. La méthode d'Euler implicite est donc plus coûteuse en calcul que la méthode explicite, mais elle a d'autres avantages comme nous le verrons plus tard.

Quelques remarques

Par des développements de Taylor, on montre de manière analogue que le schéma implicite est **consistant d'ordre deux en espace et un en temps**.

Question : Peut-on améliorer la précision en temps ?

Réponse : Oui, en centrant par exemple le schéma de discrétisation en temps, c'est-à-dire en écrivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n-1}))}{2k}.$$

Le schéma qui en résulte (appelé **schéma saute-mouton** ou **schéma de Richardson**) s'écrit vectoriellement :

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k} + A_h U^n = 0, \text{ pour } n = 1, \dots, M.$$

Quelques remarques

Ce schéma est explicite, puisque U^{n+1} se calcule directement à partir de U^n et U^{n-1} :

$$\begin{cases} U^{n+1} = U^{n-1} - 2kA_h U^n \text{ pour } n = 1, \dots, M, \\ U^0 = U_0, \quad U^1 = U_1. \end{cases}$$

On note qu'il est nécessaire pour ce schéma de connaître U^0 et U^1 . Le calcul de U^1 peut par exemple être fait en utilisant par exemple le schéma explicite (21) pour $n = 0$ (cette étape est alors seulement précise d'ordre un en temps); mais on peut aussi choisir d'autres schémas plus précis, par exemple un schéma de type Runge-Kutta d'ordre deux, ceci afin de ne perdre aucune précision dans cette étape d'initialisation.

Remarque

Ce schéma est à priori d'ordre 2 en temps. Cependant, il est toujours instable, et donc numériquement inutilisable.

Stabilité

Definition (Stabilité d'un schéma de discrétisation temps-espace)

On dit qu'un schéma est L^∞ -stable si la solution approchée qu'il donne est bornée en norme infinie, indépendamment du pas du maillage.

Proposition (Stabilité, Euler explicite)

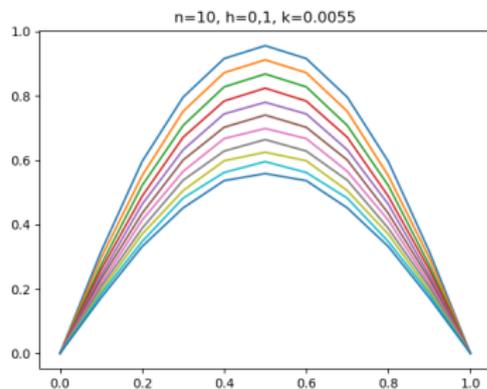
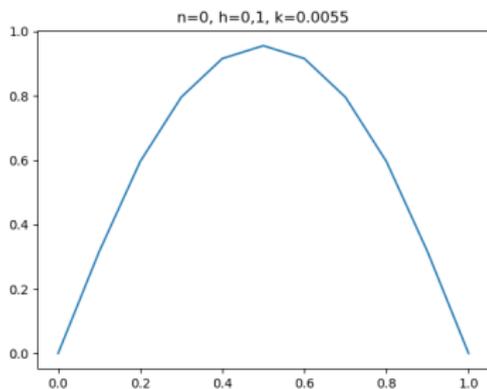
Si la **condition CFL** (ou **condition de Courant, Friedrichs et Lewy**) suivante

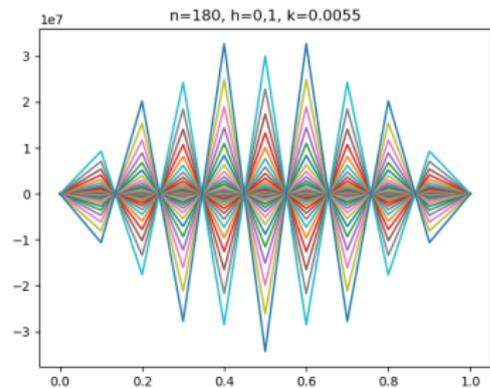
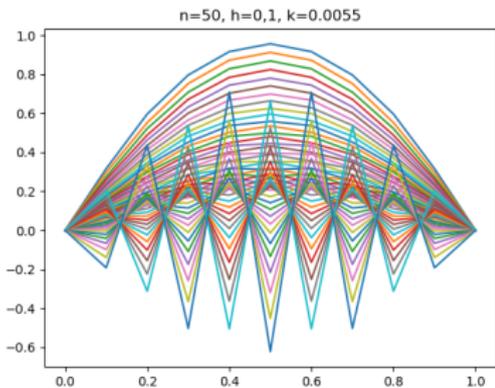
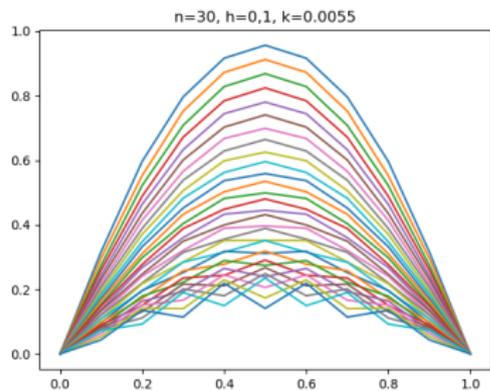
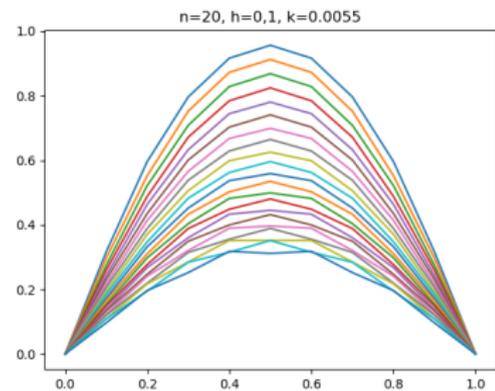
$$\lambda := \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (26)$$

est vérifiée, alors le schéma (21) est L^∞ -stable au sens où :

$$\max_{\substack{i=1, \dots, N \\ n=1, \dots, M}} |u_i^n| \leq \|u_0\|_\infty.$$

Voici une suite de figures correspondant à la méthode d'Euler explicite appliqué à $u_0(x) = 4x(1-x)$ dans un cas où $\frac{k}{h^2} = 0,55 > \frac{1}{2}$. Pour chaque valeur de n , on trace les valeurs u_i^n . **L'apparition de l'instabilité se produit entre $n = 10$ et $n = 20$ et ne fait qu'empirer.**





Remarque

Notons que la condition de stabilité (26) est très contraignante d'un point de vue pratique, car elle impose au pas de temps d'être très petit. Par exemple, pour un pas d'espace de l'ordre de 10^{-3} , cela impose un pas de temps de l'ordre de 10^{-6} . Ceci engendre trop de calculs : le schéma d'Euler explicite, est donc rarement utilisé pour les problèmes paraboliques dans les codes industriels. D'où l'idée d'essayer de trouver des schémas pour lesquels il soit possible de s'affranchir d'une telle condition. On les appellera schémas «inconditionnellement stables», c'est-à-dire stables sans aucune condition liant les pas de temps et d'espace.

Convergence

Definition (Erreur de discrétisation)

Soit u la solution exacte du problème (20) et $(u_i^n)_{i=1, \dots, N}^{n=1, \dots, M+1}$ la solution du schéma Euler explicite (21). Pour $i = 1, \dots, N$ et $n = 1, \dots, M + 1$, on note $\bar{u}_i^n = u(x_i, t_n)$ et on appelle erreur de discrétisation au point (x_i, t_n) la quantité

$$e_i^n = \bar{u}_i^n - u_i^n.$$

L'erreur de discrétisation associée au schéma (21) est alors

$$\|e^n\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N} |e_i^n|.$$

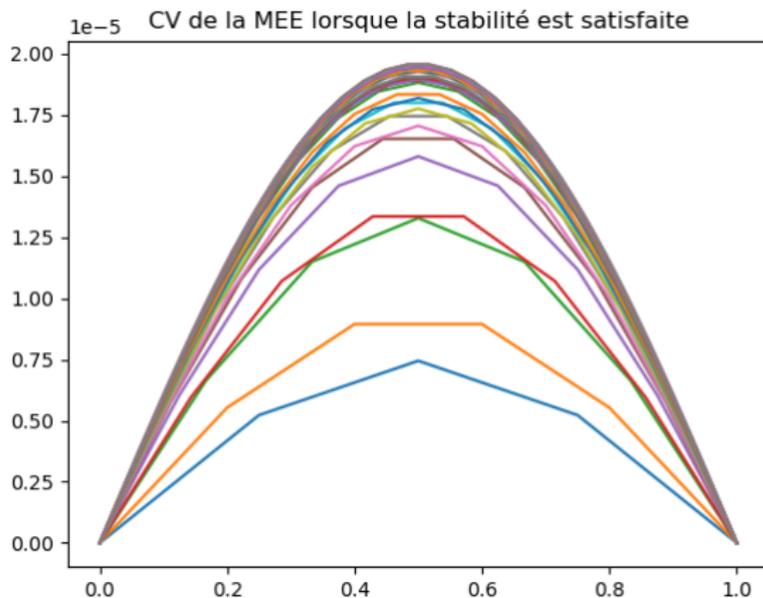
Théorème (Convergence du schéma d'Euler explicite)

Sous la condition de stabilité (26), il existe $C > 0$ ne dépendant que de u tel que

$$\|e^{n+1}\|_{\infty} \leq \|e^0\|_{\infty} + TC(k + h^2) \quad \forall n = 0, \dots, M.$$

Ainsi, si $\|e^0\|_{\infty} = 0$ alors $\max_{i=1, \dots, N} |e_i^n|$ tend vers 0 lorsque k et h tendent vers 0 pour tout $n = 1, \dots, M$. Le schéma (21) est donc convergent.

Nous traçons les valeurs discrètes U^{M+1} correspondant à $T = 1, 1$, pour la valeur initiale $u_0(x) = 4x(1 - x)$. Chaque courbe correspond à différentes valeurs de N allant de 3 à 30, et choisissant M de telle sorte que $\frac{k}{h^2} \approx 0,49$.



Rappel

Commençons par un petit rappel sur les équations différentielles. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Soit k un pas (constant) de discrétisation, on rappelle que les schémas d'Euler explicite et implicite pour la discrétisation de ce problème s'écrivent :

$$\text{Euler explicite : } \frac{y^{n+1} - y^n}{k} = f(y^n), \quad n \geq 0 \quad (27)$$

$$\text{Euler implicite : } \frac{y^{n+1} - y^n}{k} = f(y^{n+1}), \quad n \geq 0, \quad (28)$$

avec $y^0 = y_0$.

Le θ -schéma

On rappelle également que le θ -schéma, où θ est un paramètre de l'intervalle $[0, 1]$ s'écrit :

$$y^{n+1} = y^n + k\theta f(y^{n+1}) + k(1 - \theta)f(y^n).$$

Remarque

- *Remarquons que pour $\theta = 0$ on retrouve le schéma explicite (27) et pour $\theta = 1$ le schéma implicite (28).*
- *On peut facilement adapter le θ -schéma à la résolution des équations paraboliques.*

Le θ -schéma pour la discrétisation en temps du problème (20), avec une discrétisation par différences finies en espace s'écrit :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = \frac{\theta (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})}{h^2} + \frac{(1 - \theta) (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{h^2},$$

$$i = 1, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M,$$

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad n = 0, \dots, M + 1.$$
(29)

Remarque

Si $\theta = 0$, on retrouve le schéma d'Euler explicite; si $\theta = 1$, celui d'Euler implicite. Dans le cas où $\theta = 1/2$ ce schéma s'appelle schéma de **Crank-Nicolson**. Notons que dès que $\theta > 0$, le schéma est implicite, au sens où on n'a pas d'expression explicite de u_i^{n+1} en fonction des u_j^n .

Proposition (Consistance du θ -schéma)

Le θ -schéma (29) pour la discrétisation du problème (20) est d'ordre 2 en espace. Il est d'ordre 2 en temps si $\theta = 1/2$, et d'ordre 1 sinon.

Convergence du schéma d'Euler implicite : Prenons $\theta = 1$ dans le θ -schéma : on obtient le schéma d'Euler implicite :

$$(1 + 2\lambda)u_i^{n+1} - \lambda u_{i-1}^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n \text{ avec } \lambda = k/h^2. \quad (30)$$

Proposition (Stabilité L^∞ pour Euler implicite)

Si $(u_i^n)_{i=1, \dots, N}$ est solution du schéma (30), alors :

$$\max_{i=1, \dots, N} u_i^{n+1} \leq \max_{i=1, \dots, N} u_i^n \leq \max_{i=1, \dots, N} u_i^0.$$

De même :

$$\min_{i=1, \dots, N} u_i^{n+1} \geq \min_{i=1, \dots, N} u_i^n \geq \min_{i=1, \dots, N} u_i^0.$$

Le schéma (30) est donc inconditionnellement L^∞ -stable.

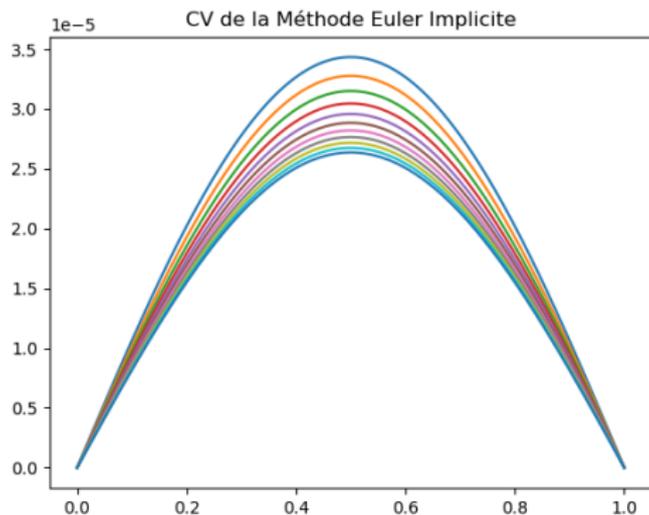
Théorème (Convergence, Euler implicite)

Soit $e^n = (e_1^n, \dots, e_N^n)$ l'erreur de discrétisation, définie par $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$ pour $i = 1, \dots, N$, avec u la solution exacte du problème (20) et $(u_i^n)_{i=1, \dots, N}^{n=1, \dots, M+1}$ la solution du schéma d'Euler implicite (30). Alors, il existe $C > 0$ ne dépendant que de u tel que

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + TC(k + h^2) \quad n = 0, \dots, M.$$

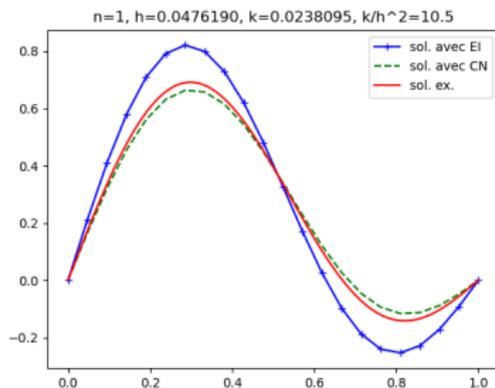
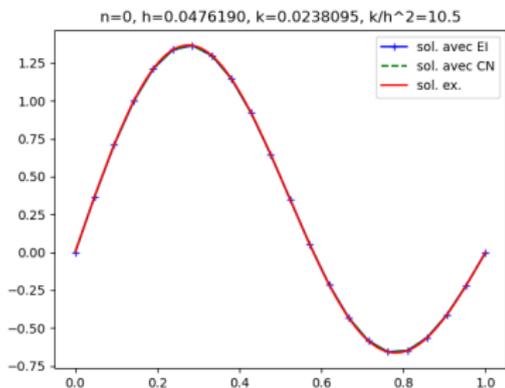
Ainsi, si $\|e^0\|_\infty = 0$ alors le schéma est donc convergent d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

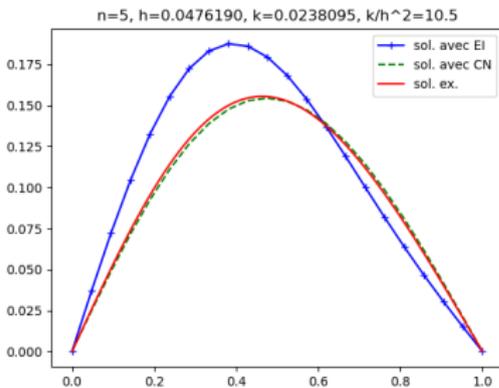
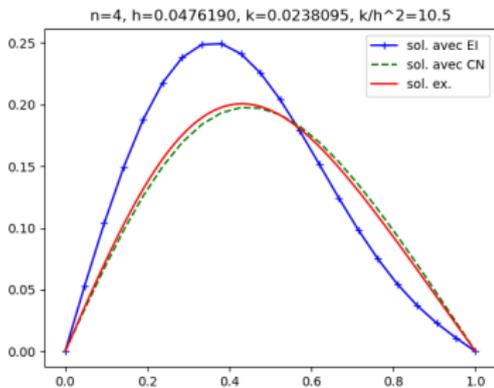
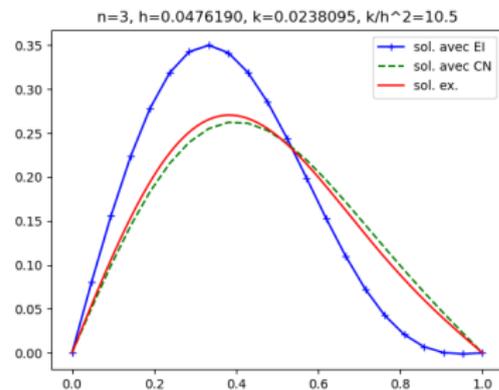
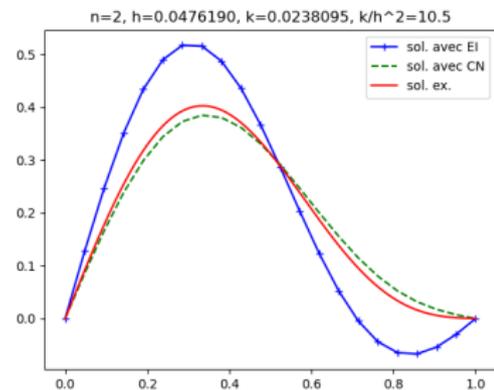
Nous traçons sur la figure ci-dessous la solution du schéma d'Euler implicite correspondant à $u_0(x) = 4x(1 - x)$ à l'instant $T = 1,1$ et $N = M$ allant de 120 à 240 par incréments de 12.

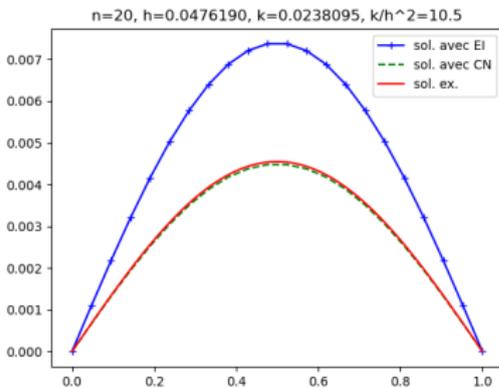
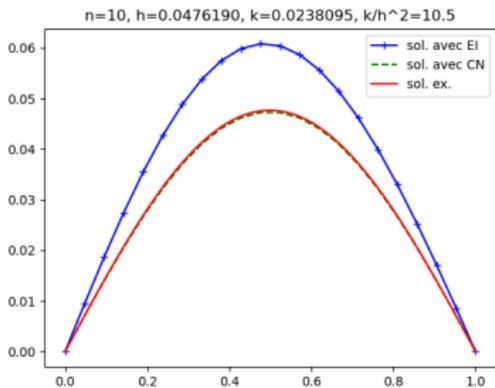
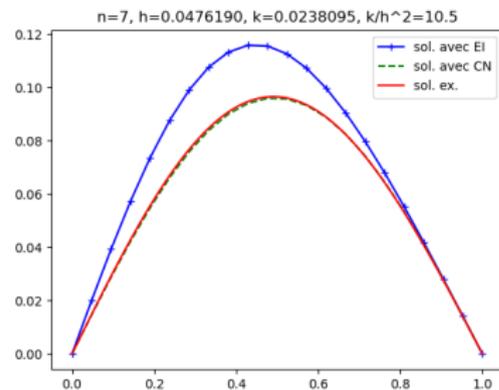
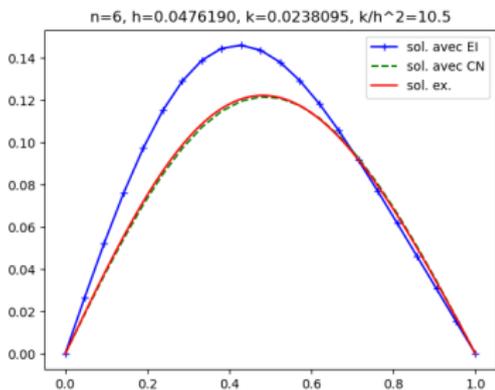


Dans les calculs ci-dessus, $\frac{k}{h^2}$ varie d'environ 130 à 270, **sans aucun effet néfaste**, bien sûr.

Pour comparer entre les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson, nous traçons sur les mêmes graphes, les résultats obtenues par chaque schéma avec les mêmes paramètres de discrétisation h et k fixés partout, et la solution exacte, pour différentes valeurs de n . On prend $u_0(x) = \sin(\pi x)/2 + \sin(2\pi x)$. Dans ce cas, la solution exacte est donnée par $u(x, t) = 1/2 \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t} + \sin(2\pi x)e^{-4\pi^2 t}$, ce qui permet de faire les comparaisons.



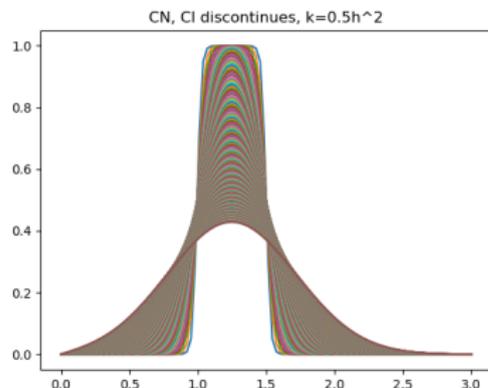
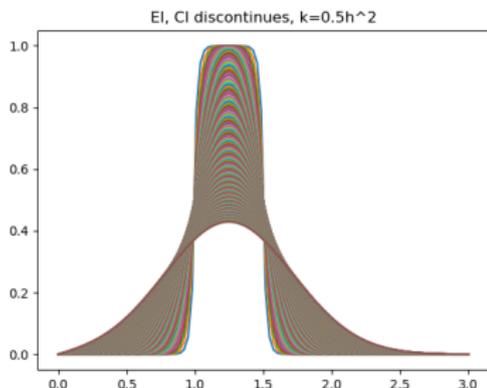




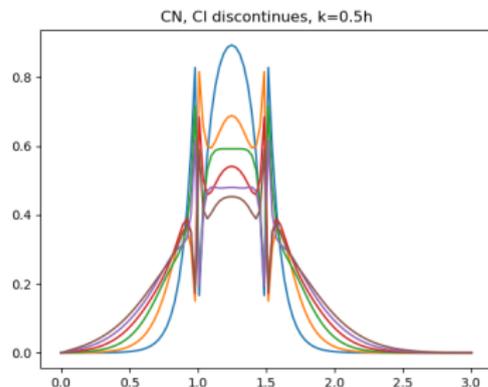
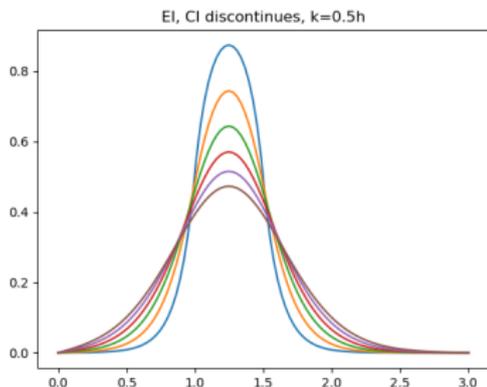
Remarque

- 1 Les deux schémas sont stables et l'ordre supérieur (donc une meilleure précision), du schéma de Crank-Nicolson est clairement visible pour cette donnée initiale particulière.
- 2 On va mettre en évidence un défaut du schéma Crank-Nicolson lorsque la donnée initiale est discontinue et le pas de temps de l'ordre de h . Pour cela, par exemple, on va travailler sur $]0, L[\times]0, T[$ avec $L = 3$ et $T = 0.1$ et on choisit comme donnée initiale :

$$u_0(x) = 1_{\left[\frac{L}{3}, \frac{L}{2}\right]}(x).$$



Avec un petit pas de temps type CFL (ici $k = 0.5h^2$) du schéma explicite, on a la solution attendue avec régularisation de la solution.



En revanche, le même code avec un pas de temps raisonnablement gros (ici $k = 0.5h$: un pas de temps de l'ordre de h) fait apparaître (pour le schéma de Crank-Nicolson) les artefacts ci-après hérités de la discontinuité.

On se propose de résoudre numériquement par un schéma de différences finies le problème unidimensionnel : trouver $u : [0, 1] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{pour } t \in]0, T[, \\ u(x, t = 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u_1(x) & \text{pour } x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (31)$$

u_0 et u_1 étant les données initiales du problème. Il s'agit de l'équation des ondes en une dimension d'espace.

Hypothèse

Nous supposons les conditions initiales u_0 et u_1 compatibles avec la condition à la limite, c'est-à-dire :

$$u_0(0) = u_0(1) = 0 \text{ et } u_1(0) = u_1(1) = 0.$$

On se donne :

- $N + 1$ points de discrétisation en espace ($N \in \mathbb{N}$) distants de $h = \frac{1}{N + 1} > 0$;
- $M + 1$ points de discrétisation en temps ($M \in \mathbb{N}$), le pas de temps étant alors défini par : $k = \frac{T}{M + 1} > 0$;
- puis on pose :

$$x_i = ih, \text{ pour } i \in \{0, \dots, N+1\}, \quad t_n = nk, \text{ pour } n \in \{0, \dots, M+1\}.$$

On cherche en chacun des points (x_i, t_n) une valeur approchée, notée u_i^n , de $u(x_i, t_n)$.

Question

Comment ?

- Aux extrémités de l'intervalle en espace $[0, 1]$, on prend (comme d'habitude) la condition à la limite exacte, i.e. on pose :

$$u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \text{ pour tout } n \in \{0, \dots, M+1\}. \quad (32)$$

A tout instant t_n , les inconnues du problème sont alors les valeurs u_i^n correspondant aux sommets internes du maillage en espace (i.e. les points x_i avec $i \in \{1, \dots, N\}$); on note $U^n \in \mathbb{R}^N$ le vecteur formé par ces N inconnues.

- De même, à l'instant initial $t_0 = 0$, on impose la condition initiale exacte (supposée compatible avec la condition à la limite), i.e. :

$$U^0 = \begin{pmatrix} u_0(x_1) \\ u_0(x_2) \\ \vdots \\ u_0(x_N) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

- Mais comme il s'agit d'un problème du second ordre en temps, il est aussi nécessaire de se donner U^1 . Par exemple, en écrivant que :

$$u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \approx \frac{u(x, k) - u(x, 0)}{k},$$

ce qui donne la valeur suivante pour U^1 :

$$U^1 = U^0 + k \begin{pmatrix} u_1(x_1) \\ u_1(x_2) \\ \vdots \\ u_1(x_N) \end{pmatrix}, \quad (34)$$

mais d'autres choix sont possibles. Par la suite, nous supposons U^0 et U^1 donnés. Il reste à préciser le calcul de U^n pour $n > 1$.

On approche chacune des dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ par le schéma (usuel) centré à trois points. Cela donne le schéma suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{k^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0, \quad (35)$$

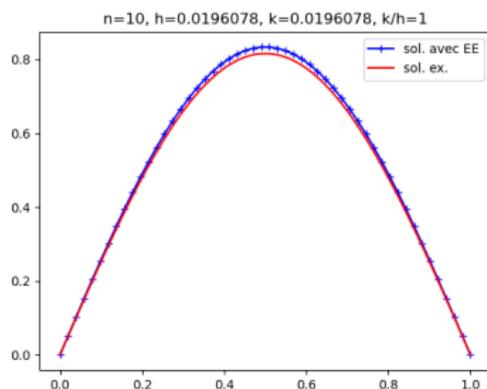
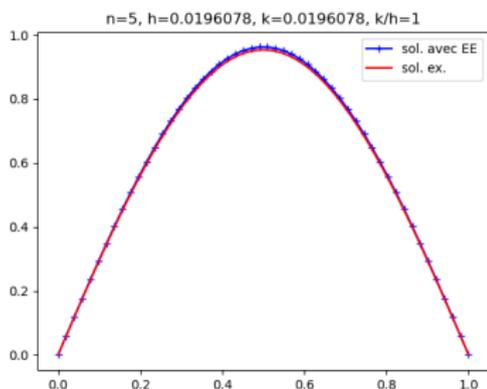
$$i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M,$$

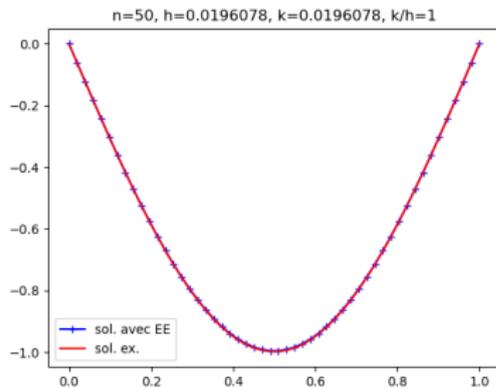
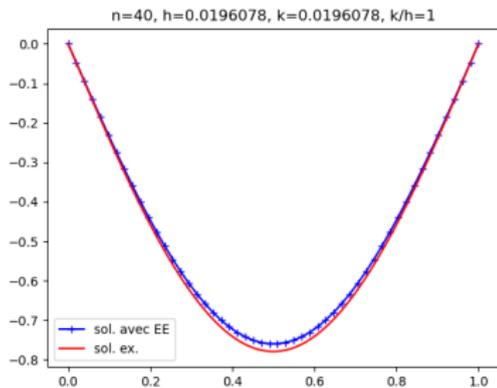
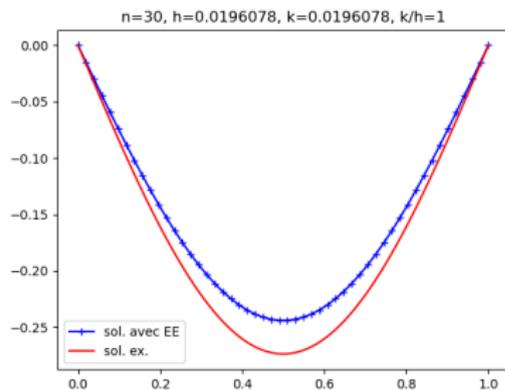
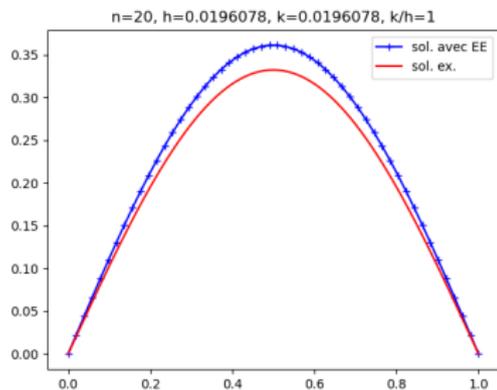
couplé aux conditions aux limites (32) et initiales (33)-(34) discrètes décrites précédemment. Vectoriellement, ce système peut s'écrire comme un schéma à deux niveaux de la forme :

$$\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{k^2} + A_h U^n = 0, \quad n = 1, \dots, M, \quad (36)$$

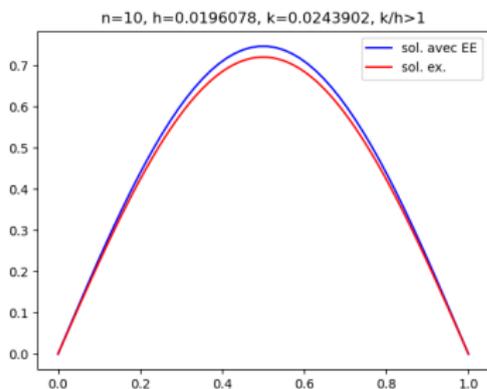
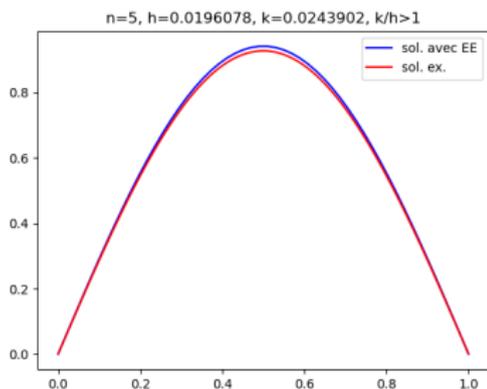
avec U^0, U^1 donnés et la matrice A_h est encore définie par (22). On vérifie aisément que ce schéma est explicite, consistant du second ordre en temps et en espace. Par conséquent, sa convergence est uniquement une question de stabilité !

Nous traçons le résultat du schéma explicite avec les marques $+$ et la solution exacte en ligne continue à la figure ci-dessous lorsque $\frac{k}{h} = 1$. Nous prenons $u_0 = \sin(\pi x)$ et $u_1 = 0$. La solution exacte est donnée par $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$.

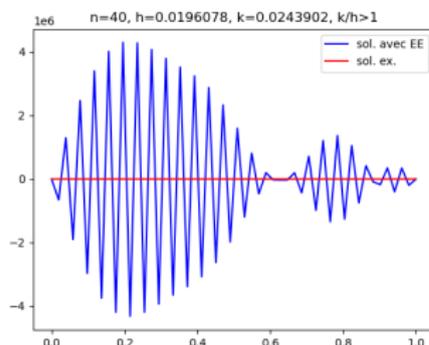
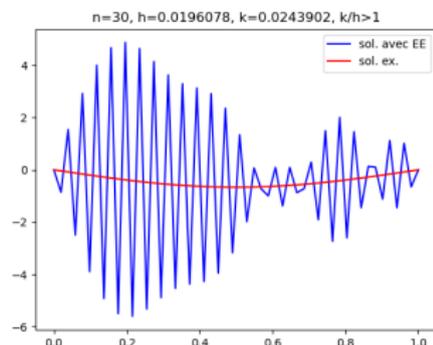
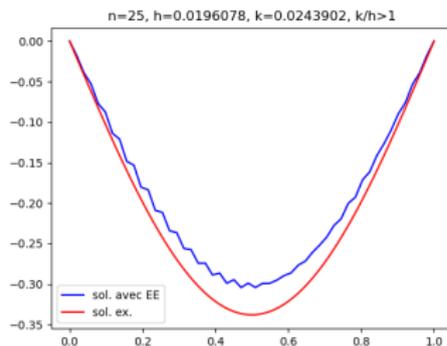
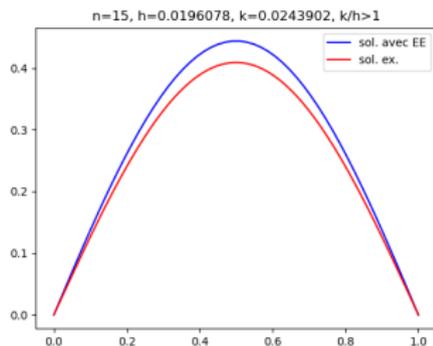




Passons maintenant à visualiser ce qui se passe après quelques itérations lorsque $\frac{k}{h} > 1$, même avec la condition initiale très régulière utilisée ci-dessus.



Nous remarquons **l'apparition de l'instabilité** entre $n = 15$ et $n = 25$:



Le schéma explicite est donc conditionnellement stable avec une condition de stabilité donnée par : $k/h \leq 1$.

Le schéma suivant est la version totalement implicite naturel du précédent :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{k^2} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0, \quad (37)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M,$$

avec les conditions aux limites et les données initiales habituelles. Sous forme vectorielle, il s'écrit :

$$\left(\frac{1}{k^2}\mathbf{I} + \mathbf{A}_h\right)\mathbf{U}^{n+1} = \frac{2}{k^2}\mathbf{U}^n - \frac{1}{k^2}\mathbf{U}^{n-1}, \quad n = 1, \dots, M. \quad (38)$$

- Pour approcher $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0)$, on a utilisé la formule de Taylor :

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + k \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \mathcal{O}(k^2),$$

ce qui a conduit à l'approximation :

$$u_i^1 = u_0(x_i) + ku_1(x_i).$$

Ce choix correspond alors à une approximation d'ordre 1 en temps de $\frac{\partial u}{\partial t}$.

- Pour avoir de l'ordre 2 en temps (plus cohérent avec le schéma à l'intérieur) on pousse plus loin le développement :

$$u(x_i, k) = u_0(x_i) + ku_1(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + \mathcal{O}(k^3),$$

et on utilise l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, d'où :

$$u(x_i, k) = u_0(x_i) + ku_1(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) + \mathcal{O}(k^3).$$

- Ce dernier choix conduit cette fois à l'approximation :

$$u_i^1 = u_0(x_i) + ku_1(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0}{h^2},$$

qui s'écrit encore :

$$U^1 = \left(I - \frac{k^2}{2} A_h \right) U^0 + k \begin{pmatrix} u_1(x_1) \\ u_1(x_2) \\ \vdots \\ u_1(x_N) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Notes bibliographiques et remarques

- ① On pourrait se contenter de dire qu'on ne vous a presque rien dit : le champ de l'analyse numérique consacré à l'approximation des équations aux dérivées partielles est très vaste !
- ② Signalons que la méthode des éléments finis est de nos jours probablement la plus répandue pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles :
 - **G. Allaire**, *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, Editions Ecole Polytechnique, (2005).
 - **B. Lucquin**, *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations : niveau M1*, Ellipses Éd. Marketing (2004).
- ③ Parmi les autres techniques répandues, mentionnons la méthode des volumes finis :
 - **R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin**, *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, vol. 7, p. 713-1018 (2000).
- ④ D'autres méthodes sont également possibles (méthodes spectrales ...).

Merci pour votre attention