Université Ibn Tofail
Faculté des Sciences de Kénitra

Département de Mathématiques
Master "Algébre, Géométrie et Analyse"

Concour d'accès au master (A,G,A)

Question 1. *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose que q est non dégénérée et non définie tel que il existe $x \in E$ qui verifie $q(x) < 0$. Quelle est l'assertion vraie ?*

1. ☐ *q est positive*
2. ☐ *q est négative*
3. ☐ *q n'est pas de signe constant.*
4. ☐ *On ne peut rien dire*

Question 2. *Soit la forme quadratique $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $q(A) = \det(A)$. Quelle est l'assertion vraie ?*

1. ☐ *q est de signature $(4, 0)$*
2. ☐ *q est de signature $(3, 1)$*
3. ☐*q est de signature $(2, 2)$*
4. ☐ *q est dégénérée.*

Question 3. *Soit l'application $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(A) = trace(A)$. Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ $\dim \ker T = 3$
2. ☐ $\dim \ker T = 0$
3. ☐ *T est surjective*
4. ☐ $T(A.B.C) = T(C.B.A)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Question 4. *On considére l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ *L'application f n'est pas continue en $(0, 0)$*
2. ☐ *$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent*
3. ☐ *f est différentiable en $(0, 0)$*
4. ☐ *f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

Question 5. *On considére l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ *f est continue sur $\mathbb{R}^2$*
2. ☐ *f admet des derivecés partielles en $(0,0)$*
3. ☐ *f est différentiable en $(0,0)$*
4. ☐ *f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

Question 6. *On considére l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ *f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$*
2. ☐ *La différentille $df_{(x,y)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}$*
3. ☐ *f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$*
4. ☐ *f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.*

Question 7.

Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[n,n+1]}(x),$$

avec $\mathbf{1}_{[n,n+1]}$ est la fonction indicatrice. Pour $x \neq 0$ fixé, quelle est l'assertion vraie ?

1. ☐ *La suite $(f_n(x))$ converge vers 0.*
2. ☐ *La suite $(f_n(x))$ tend vers $+\infty$.*
3. ☐ *La suite $(f_n(x))$ ne converge pas.*
4. ☐ *$(f_n(x))$ est une suite croissante ou décroissante.*

Question 8.

Soit $n \geq 1$ et f_n la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[n,n+1]}(x),$$

avec $\mathbf{1}_{[n,n+1]}$ est la fonction indicatrice. Quelle est l'assertion vraie ?

1. ☐ *$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = +\infty$.*
2. ☐ *$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \leq log(|\, x \,|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.*
3. ☐ *$n \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$ converge.*
4. ☐ *$n \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$ diverge.*

Question 9. *Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ *Un espace métrique connexe par arcs est connexe*
2. ☒ *Toute application numérique continue sur un espace metrique compacte est bornée*
3. ☐ *Toute partie fermée connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs*
4. ☐ *Toute suite dans une partie compacte d'un espace metrique est convergente.*

Question 10. *Soient (M,d) un espace métrique, A une partie de M et $r > 0$. Quelle est l'assertion vraie ?*

1. ☐ *Si $d(A,x) = 0$, alors $x \in A$*
2. ☒ *Si A est ouverte et férmée, alors A est vide*
3. ☐ *Si $x \in A$ tel que la boule fermée $\overline{B}(x,r) \subset A$, alors $\overline{B}(x,r)$ est contenue dans l'intérieur de A*
4. ☐ *Si $x \in A$ tel que la boule fermée $\overline{B}(x,r) \subset A$, alors la boule ouverte $B(x,r)$ est contenue dans l'intérieur de A*

Question 11. *On pose $E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ $E = r\frac{\partial}{\partial r}$
2. ☐ $E = \frac{\partial}{\partial \theta}$
3. ☐ $E(r) = 1$
4. ☐ $E(\theta) = 0$

Question 12. *On pose $F = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ $F = r\frac{\partial}{\partial r}$
2. ☐ $F = \frac{\partial}{\partial \theta}$
3. ☐ $F(r) = 0$
4. ☐ $F(\theta) = 0$

Question 13. *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$. Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ $\{x^2+y^2, arctg\frac{y}{x}\} = 0$
2. ☐ $\{e^f, e^g\} = e^{\{f,g\}}$
3. ☐ $\{f, g^2\} = 2g\{f,g\}$
4. ☐ $\{f, e^g\} = e^g\{f,g\}$

Question 14. *Soient I, $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles, $\varphi : I \longrightarrow J$ un difféomorphisme et $\psi : C^\infty(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(I,\mathbb{R})$, l'application définie par $\psi(f) = f \circ \varphi$. Quelles sont les assertions vraies ?*

1. ☐ ψ est liéaire
2. ☐ $\ker \psi = \mathbb{R}$
3. ☐ $\psi(f.g) = \psi(f).\psi(g)$
4. ☐ $\psi^{-1}(h) = \varphi^{-1} \circ h$

Question 15. *On note $I = (X)$, l'ideal de $\mathbb{Z}[X]$, engendré par X et $\mathbb{Z}[X]/I$ l'anneau quotient. Alors $\mathbb{Z}[X]/I$ est isomorphe à*

1. ☐ $\mathbb{Z}_{\geq 2}[X]$
2. ☐ $\mathbb{Z}[X]$
3. ☐ $\mathbb{Z}$
4. ☐ $\mathbb{Z} + I$