Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques, Marrakech
Département de Mathématiques

Année 2020 - 2021
Filière MIPC
Responsable : A. Ellabib

Module Analyse 1
Série 1

Exercice 1 : Soient x, y deux réels, montrer que $\forall \varepsilon > 0 \ \ |x-y| < \varepsilon \Longleftrightarrow x = y$

Exercice 2 : Soient A et B deux ensembles non vides bornés de nombres réels.
Montrer que si $A \subset B$ alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Exercice 3 : Soient A et B deux ensembles non vides bornés de nombres réels.
1- Montrer que $A \cup B$ est borné et que

$$\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B) \text{ et } \inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \inf B)$$

2- Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cap B$ est une partie bornée et que

$$\sup(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \inf(\sup A, \sup B).$$

Exercice 4 : 1- Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel non nul n on a

$$0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1$$

2- Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$

Exercice 5 : Calculer la borne supérieure et la borne inférieure des parties suivantes :

$$A = \{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$B = \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n});\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$C = \{(1 - \frac{1}{n}) \sin(\frac{n\pi}{2});\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

.

Exercice 6 : Soit A la partie des rationnels définies par $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \ /x^2 < 2\}$
1- Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
2- Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Montrer que le rationnel $M - h$ est aussi un majorant de A avec $0 < h < \frac{M^2-2}{2M}$, $h \in \mathbb{Q}$.
3- En déduire que A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 7 : Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2020 - 2021
Responsable : Abdellatif Ellabib
Filière : MIPC Semestre 1

Module Analyse 1
Corrigé série d'exercices N°1

Exercice 1. Soient x, y deux réels, montrer que $\forall \varepsilon > 0 \ \ |x - y| < \varepsilon \Longleftrightarrow x = y$

Correction d'exercice N° 1. Le sens direct. Supposons que $\forall \varepsilon > 0 \ \ |x-y| < \varepsilon$ et montrons que $x = y$. Faisons un raisonnement par l'absurde, alors supposons que $\forall \varepsilon > 0 \ \ |x - y| < \varepsilon$ et $x \neq y$. Posons $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2} > 0$ donc $|x - y| < \frac{|x-y|}{2}$ et comme $|x - y| \neq 0$ d'où $1 < \frac{1}{2}$ ce qui est absurde.

Réciproquement, il est clair que si $x = y$ on a alors $|x - y| = 0 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Finalement $\forall \varepsilon > 0 \ \ |x - y| < \varepsilon \Longleftrightarrow x = y$

Exercice 2. Soient A et B deux ensembles non vides bornés de nombres réels.

Montrer que si $A \subset B$ alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Correction d'exercice N° 2. Soient A et B deux ensembles non vides bornés de $\mathbb{R}$ et supposons que $A \subset B$. On a A et B sont des parties non vides, majorées et minorées de $\mathbb{R}$ alors A et B admettent des bornes inférieures et supérieures. Par suite $\inf A$, $\inf B$, $\sup A$ et $\sup B$ sont des réels.

Montrons d'abord que $\inf B \leq \inf A$. Soit $a \in A$ donc $a \in B$ car $A \subset B$. d'où $\inf B \leq a$. Alors $\forall\, a \in A \ \ \inf B \leq a$. Donc $\inf B$ est un minorant de A et comme $\inf A$ est le plus grand de tous les minorants de A alors $\inf B \leq \inf A$.

Montrons ensuite que $\sup A \leq \sup B$. Soit $a \in A$ donc $a \in B$ car $A \subset B$. d'où $a \leq \sup B$.

Alors $\forall\, a \in A \;\; a \leq \sup B$. Donc $\sup B$ est un majorant de A et comme $\sup A$ est le plus petit de tous les majorants de A alors $\sup A \leq \sup B$.

Comme $\inf A \leq \sup A$ par définition de la borne supérieure et la borne inférieure. On obtient alors que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Exercice 3. Soient A et B deux ensembles non vides bornés de nombres réels.

1- Montrer que $A \cup B$ est borné et que

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \text{ et } \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$$

2- Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cap B$ est une partie bornée et que

$$\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

Correction d'exercice N° 3. Soient A et B deux ensembles non vides bornés de nombres réels. Alors A et B sont des parties non vides, majorées et minorées de $\mathbb{R}$ donc A et B admettent des bornes inférieures et supérieures. Par suite $\inf A$, $\inf B$, $\sup A$ et $\sup B$ sont des réels.

D'où $\forall\, a \in A \;\; \inf A \leq a \leq \sup A$ et $\forall\, b \in B \;\; \inf B \leq b \leq \sup B$.

1- Montrons que $A \cup B$ est borné. Soit $x \in A \cup B$ donc $x \in A$ ou $x \in B$.

D'où $\inf A \leq x \leq \sup A$ ou $\inf B \leq x \leq \sup B$. Alors $\min(\inf A, \inf B) \leq x \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Donc $\forall\, x \in A \cup B \;\; \min(\inf A, \inf B) \leq x \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Par suite $A \cup B$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

On a d'après ce qui précède que $\forall\, x \in A \cup B \;\; x \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Donc $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$.

Alors $\sup(A \cup B) \leq max(\sup A, \sup B)$ car la borne supérieure est le plus petit de tous les majorants de l'ensemble.

D'autre part, soit $a \in A$ donc $a \in A \cup B$ alors $a \leq \sup(A \cup B)$ d'où $\sup(A \cup B)$ est un majorant de A et par suite $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et de la même façon, on montre que $\sup B \leq \sup(A \cup B)$.

Alors $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$. Finalement $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Montrons que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

On a d'après ce qui précède que $\forall\, x \in A \cup B \quad \min(\inf A, \inf B) \leq x$.

Donc $\min(\inf A, \inf B)$ est minorant de $A \cup B$ d'où $\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B)$ car la borne inférieure est le plus grand de tous les minorants de l'ensemble.

D'autre part, soit $a \in A$ donc $a \in A \cup B$ alors $\inf(A \cup B) \leq a$ d'où $\inf(A \cup B)$ est un minorant de A. D'où $\inf(A \cup B) \leq \inf A$ et de la même façon, on montre que $\inf(A \cup B) \leq \inf B$. Par conséquent $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

2- Supposons que $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ d'où $\inf A \leq a \leq \sup A$. Alors $\forall\, x \in A \cap B \quad \inf A \leq a \leq \sup A$. Donc $A \cap B$ est une partie bornée.

Soit $x \in A \cap B$ donc $x \in B$ d'où $\inf B \leq a \leq \sup B$.

Par suite $\max(\inf A, \inf B) \leq x \leq \min(\sup A, \sup B)$. Alors $\max(\inf A, \inf B)$ est un minorant de $A \cap B$ et $\min(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cap B$. D'où $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B)$ et $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$. Comme $\inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B)$, on obtient

$$\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

Exercice 4. 1- Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel non nul n on a

$$0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$$

2- Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$

Correction d'exercice N° 4. 1- On sait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < E(x) \leq x. \tag{1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ donc d'après (1)

$$nx - 1 < E(nx) \leq nx \tag{2}$$

et

$$n(x-1) < nE(x) \leq nx \tag{3}$$

Donc

$$-nx \leq -nE(x) < -nx + n \tag{4}$$

Par suite, en additionnant membre à membre les inégalités (2) et (4), on obtient

$$-1 < E(nx) - nE(x) < n \tag{5}$$

D'où

$$0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1 \tag{6}$$

2- Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \text{ et } E(y) \leq y < E(y) + 1 \tag{7}$$

D'où

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2 \tag{8}$$

Comme la partie entière, $E(w)$, d'un réel w est le plus grand entier plus petit que le réel w, alors

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) < E(x) + E(y) + 2 \tag{9}$$

Donc

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1 \tag{10}$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
Année universitaire 2020 - 2021
Responsable : Abdellatif Ellabib
Filière : MIPC Semestre 1

Module Analyse 1
Corrigé de la série d'exercices N°1
$2^{ème}$ partie
Corrigé Exercices N°5, N°6 et N°7

Exercice 1.

Correction d'exercice N° 1. Voir correction $1^{ère}$ partie

Exercice 2.

Correction d'exercice N° 2. Voir correction $1^{ère}$ partie

Exercice 3.

Correction d'exercice N° 3. Voir correction $1^{ère}$ partie

Exercice 4.

Correction d'exercice N° 4. Voir correction $1^{ère}$ partie

Exercice 5. Calculer la borne supérieure et la borne inférieure des parties suivantes :

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$B = \left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right);\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$C = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right);\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

.

Correction d'exercice N° **5.** 1.

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ et $0 \in A$. Donc A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ alors A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\sup A = 1$. On a 1 est un majorant de A.

Soit $\varepsilon > 0$; posons $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ d'où $n > \frac{1}{\varepsilon}$ alors $\varepsilon > \frac{1}{n}$ d'où $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} < 1$ et $1 - \frac{1}{n} \in A$. Finalement , d'après la caractérisation de la borne supérieure, $\sup A = 1$.

- On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{n}$ et $0 \in A$. Donc A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ alors A admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\inf A = 0$.

Première méthode : On a 0 est un minorant de A et $0 \in A$ alors 0 est le plus petit élément de A d'où $\inf A = 0$

Deuxième méthode : Soit $\varepsilon > 0$; posons $n = E\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) - 1$ d'où $n < \frac{1}{1-\varepsilon}$ alors $1 - \varepsilon < \frac{1}{n}$ d'où $0 < 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon$ et $1 - \frac{1}{n} \in A$. Finalement , d'après la caractérisation de la borne inférieure, $\inf A = 0$.

2.

$$B = \left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right);\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$= \left\{1 - \frac{1}{2p};\ p \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2p+1};\ p \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= B_1 \cup B_2$$

avec

$$B_1 = \left\{1 - \frac{1}{2p};\ p \in \mathbb{N}^*\right\}$$

et

$$B_2 = \left\{-1 + \frac{1}{2p+1};\ p \in \mathbb{N}\right\}$$

Calculons la borne supérieure et la borne inférieure de B_1 et B_2.

On a $\forall\, p \in \mathbb{N}^*\ \ \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2p} < 1$, comme $\frac{1}{2} \in B_1$ et $\frac{1}{2}$ est un minorant de B_1 alors $\frac{1}{2}$ est le plus petit élément de B_1 donc $\inf B_1 = \frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$; posons $p = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) + 1$ d'où $p > \frac{1}{2\varepsilon}$ alors $\varepsilon > \frac{1}{2p}$ d'où $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{2p} < 1$ et $1 - \frac{1}{2p} \in B_1$. Alors, d'après la caractérisation de la borne supérieure, $\sup B_1 = 1$.

Pour B_2, on a $\forall\, p \in \mathbb{N}\ \ -1 < -1 + \frac{1}{2p+1} \leq 0$, comme $0 \in B_2$ et 0 est un majorant de B_2 donc 0 est le plus grand élément de B_2 et alors $\sup B_2 = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$; posons $p = E\left(\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)+1$ d'où $\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} < p$ alors $2p+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ d'où $-1+\frac{1}{2p+1} < -1 + \varepsilon$ et $-1 + \frac{1}{2p+1} \in B_2$. Alors, d'après la caractérisation de la borne inférieure, $\inf B_2 = -1$.

Par suite $\sup B = \max(\sup B_1, \sup B_2) = 1$ et $\inf B = \min(\inf B_1, \inf B_2) = -1$

3.

$$C = \left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right);\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

.

$$= \{0\} \cup \left\{1 - \frac{1}{4p+1};\ p \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{4p+3};\ p \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

avec

$$C_1 = \{0\}$$

$$C_2 = \left\{1 - \frac{1}{4p+1};\ p \in \mathbb{N}\right\}$$

$$C_3 = \left\{-1 + \frac{1}{4p+3};\ p \in \mathbb{N}\right\}$$

On a $\forall p \in \mathbb{N}\ \ 0 \leq 1 - \dfrac{1}{4p+1} < 1$ comme $0 \in C_2$ et 0 est un minorant de C_2 donc 0 est le plus petit élément de C_2 et alors $\inf C_2 = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$; posons $p = E\left(\dfrac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}\right) + 1$ d'où $p > \dfrac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}$ alors $\varepsilon > \dfrac{1}{4p+1}$ d'où $1 - \varepsilon < 1 - \dfrac{1}{4p+1} < 1$ et $1 - \dfrac{1}{4p+1} \in C_2$. Alors, d'après la caractérisation de la borne supérieure, $\sup C_2 = 1$.

On a $\forall p \in \mathbb{N}\ \ -1 < -1 + \dfrac{1}{4p+3} \leq -\dfrac{2}{3}$ comme $-\dfrac{2}{3} \in C_3$ et $-\dfrac{2}{3}$ est un majorant de C_3 donc $-\dfrac{2}{3}$ est le plus grand élément de C_3 et alors $\sup C_3 = -\dfrac{2}{3}$.

Soit $\varepsilon > 0$; posons $p = E\left(\dfrac{1-3\varepsilon}{4\varepsilon}\right) + 1$ d'où $\dfrac{1-3\varepsilon}{4\varepsilon} < p$ alors $4p + 3 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ d'où $-1 + \dfrac{1}{4p+3} < -1 + \varepsilon$ et $-1 + \dfrac{1}{4p+3} \in C_3$. Alors, d'après la caractérisation de la borne inférieure, $\inf C_3 = -1$.

Par suite $\sup C = \max(\sup C_1, \sup C_2, \sup C_3) = 1$ et $\inf C = \min(\inf C_1, \inf C_2, \inf C_3) = -1$

Exercice 6. Soit A la partie des rationnels définies par $A = \{x \in \mathbb{Q}^+, \quad x^2 < 2\}$

1- Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

2- Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Montrer que le rationnel $M - h$ est aussi un majorant de A avec $0 < h < \dfrac{M^2 - 2}{2M}$, $h \in \mathbb{Q}$.

3- En déduire que A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Correction d'exercice N° **6.** Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}^+, \quad x^2 < 2\}$

1. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, donc $\exists\, a \in \mathbb{Z}$, $\exists\, b \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge b = 1$ et $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$

donc $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ c-à-d $2b^2 = a^2$

d'où a^2 est pair ce qui implique que a est aussi pair

donc $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis $a^2 = 4k^4$ ainsi on aura $2b^2 = 4k^2$ donc $b^2 = 2k^2$ c-à-d b^2 est pair ce qui implique que b est aussi pair donc $b = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ donc $a \wedge b = 2(k \wedge k') \geq 2$ ce qui absurde car $a \wedge b = 1$.

2. Soit $M \in \mathbb{Q}$ un majorant de A, et $h \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < h < \dfrac{M^2 - 2}{2M}$.

   On a alors, $2hM < M^2 - 2$ d'où $2hM < M^2 - 2 + h^2$ donc $2 < (M - h)^2$

   par suite $\forall x \in A \quad x^2 < 2 < (M - h)^2$. D'où $x < M - h$ ce qui implique que $M - h$ est un majorant de A.

3. Supposons que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, et posons $M = \sup_{\mathbb{Q}}(A)$.

   On remarque que $M \neq 0$ car $1 \in A$, et $M \neq \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} \ni \mathbb{Q}$ et $M \in \mathbb{Q}$.

   Montrons que $M^2 > 2$. Par absurde, on suppose que $M^2 < 2$, donc d'aprés la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $M < r < \sqrt{2}$ donc $r^2 < 2$

   alors $r \in A$ et $M < r$ ce qui est impossible car M est la borne supérieure de A, d'où $M^2 > 2$.

   Puis on aura $\dfrac{M^2 - 2}{2M} > 0$, alors il existe $h \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < h < \dfrac{M^2 - 2}{2M}$

   d'après la question 2, on tire que $M - h$ est un majorant de A et $M - h < M$ ce qui est absurde, car $M = \sup_{\mathbb{Q}}(A)$ est le plus petit de tous les majorants de A.

   Conclusion, A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 7. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Correction d'exercice N° **7.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, d'aprés la densit'e de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe

$r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x - \sqrt{2} \leq r \leq y - \sqrt{2}, \qquad \text{car} \quad x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

d'où $\quad x \leq r + \sqrt{2} \leq y$, comme $r + \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ alors on en déduit que entre deux réels il existe au moins un irrationnel. D'où $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.