

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques, Marrakech
Département de Mathématiques

Année 2020 - 2021
Filière MIPC
Responsable : A. Ellabib

Module Analyse 1 Série 2

Exercice 1 :

1. Soit (u_n) une suite numérique de terme général $u_n = \frac{7n-1}{2n+3}$, montrer à l'aide de la définition que (u_n) tend vers $\frac{7}{2}$.
2. Soit (u_n) une suite numérique de terme général $u_n = \frac{8n-3}{3n+4}$, montrer à l'aide de la définition que (u_n) tend vers $\frac{8}{3}$.

Exercice 2 : Étudier la convergence des suites de terme général u_n défini par :

1. $u_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$
2. $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
3. $u_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{(-2)^n(n^3 + 6)}$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$
5. $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$
6. $u_n = \left(5 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5} \cos(n)\right)^n$.

Exercice 3 : Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent alors la suite (u_n) converge.

- ### Exercice 4 :
1. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
 2. Encadrer la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5 : Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes.

Exercice 6 : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Montrer que $\forall p \geq q \in \mathbb{N} \quad |u_p - u_q| \geq \frac{p-q}{\sqrt{p}}$.
2. (u_n) est-elle de Cauchy ?

Exercice 7 : Soit (v_n) une suite réelle décroissante, de limite 0. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k v_k$. Montrer que (u_n) est une suite convergente.

Exercice 8 : Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles fermés, bornés, emboîtés avec $I_n = [a_n, b_n]$ et a_n, b_n sont deux suites réelles avec $a_n \leq b_n$. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Module Analyse 1

Corrigé de la série d'exercices N°2

1^{ère} partie

Corrigé Exercices N°1, N°2, N°3 et N°4

Exercice 1. 1. Soit (u_n) une suite numérique de terme général $u_n = \frac{7n-1}{2n+3}$, montrer à l'aide de la définition que (u_n) tend vers $\frac{7}{2}$.

2. Soit (u_n) une suite numérique de terme général $u_n = \frac{8n-3}{3n+4}$, montrer à l'aide de la définition que (u_n) tend vers $\frac{8}{3}$.

Correction d'exercice N° 1. 1. Soit $\varepsilon > 0$, posons $N = E\left(\frac{23-6\varepsilon}{4\varepsilon}\right) + 1$.

Soit $n > N$ donc $n > \frac{23-6\varepsilon}{4\varepsilon}$

alors $4n > \frac{23}{\varepsilon} - 6$, d'où $\frac{23}{4n+6} < \varepsilon$ par suite $\left|\frac{7n-1}{2n+3} - \frac{7}{2}\right| < \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|u_n - \frac{7}{2}\right| < \varepsilon$, alors (u_n) converge vers $\frac{7}{2}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, posons $N = E\left(\frac{41-12\varepsilon}{9\varepsilon}\right) + 1$.

Soit $n > N$, donc $n > \frac{41-12\varepsilon}{9\varepsilon}$, alors $9n > \frac{41}{\varepsilon} - 12$,

alors $\frac{41}{9n+12} < \varepsilon$, par suite $\left|\frac{8n-3}{3n+4} - \frac{8}{3}\right| < \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left|u_n - \frac{8}{3}\right| < \varepsilon$, alors (u_n) converge vers $\frac{8}{3}$.

Exercice 2. Étudier la convergence des suites de terme général u_n défini par :

1. $u_n = \cos \left(\left(n + \frac{1}{n} \right) \pi \right)$
2. $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
3. $u_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{(-2)^n(n^3 + 6)}$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$
5. $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$
6. $u_n = \left(5 \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{5} \cos(n) \right)^n$.

Correction d'exercice N° 2. 1. $u_n = \cos \left(\left(n + \frac{1}{n} \right) \pi \right)$.

Alors $u_{2n} = \cos \left(2n\pi + \frac{\pi}{2n} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2n} \right)$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$.

D'autre part $u_{2n+1} = \cos \left((2n+1)\pi + \frac{\pi}{2n+1} \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2n+1} \right)$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$. Alors on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$.

Par conséquent (u_n) n'est pas une suite convergente.

2. $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n^2 + n}{n + \sqrt{n^2 - n}}$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} = \frac{1}{2}.$$

Finalement (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

3. Soit $u_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{(-2)^n(n^3 + 6)}$, on a $|u_n| \leq \frac{n^2}{2^n(n^3 + 6)}$, or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n(n^3 + 6)} = 0$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Par suite (u_n) converge vers 0.

4. Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2n}} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{2n+1}} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0.$$

Alors (u_n) converge vers 0.

5. Considérons $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$.

On a (u_{n^2}) est une sous-suite de (u_n) et $u_{n^2} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2} = 0$.

D'autre part, on a $n^2 \leq n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Donc $n \leq \sqrt{n^2 + 2n} \leq (n+1)$, d'où $E(\sqrt{n^2 + 2n}) = n$

(u_{n^2+2n}) est une suite extraite de (u_n) , et on a alors

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2+2n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - E(\sqrt{n^2 + 2n}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 \right)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2+2n}$.

Alors (u_n) n'est pas une suite convergente.

6. Soit $u_n = \left(5 \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{5} \cos(n) \right)^n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0$

d'où $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \left| \sin \left(\frac{1}{n^2} \right) \right| < \frac{1}{25}$

d'où $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |u_n| < \left(\frac{2}{5} \right)^n$, car $|\cos(n)| \leq 1$.

Comme $\left(\frac{2}{5} \right)^n$ converge vers 0 car $0 < \frac{2}{5} < 1$

d'où (u_n) converge vers 0.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent alors la suite (u_n) converge.

Correction d'exercice N° 3. Supposons que (u_{2n}) converge vers l_1 , (u_{2n+1}) converge vers l_2 et (u_{3n}) converge vers l_3 . Montrons que $l_1 = l_2$.

On a (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}) , car $6n = 3(2n)$ donc (u_{6n}) converge vers l_1 .

D'autre part (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{3n}) , car $6n = 2(3n)$ donc (u_{6n}) converge vers l_3 .

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n} = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n} = l_3$$

par suite $l_1 = l_3$.

Maintenant (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}) , car $6n + 3 = 3(2n + 1)$ donc (u_{6n+3}) converge vers l_2 .

De plus (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{3n}) , car $6n = 3(2n)$ donc (u_{6n+3}) converge vers l_3 .

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n+3} = l_2 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{6n+3} = l_3$$

par suite $l_2 = l_3$, il s'en suit que $l_1 = l_2$.

Finalement (u_n) est une suite convergente.

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. Encadrer la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Correction d'exercice N° 4. 1. Soit $n \geq 1$, posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ donc

$$1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$$

alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

alors

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

donc

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}$

alors $\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad 1 \leq k \leq n$

donc $\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$

d'où $\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$

donc $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1}$

alors $\frac{n}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$

Posons maintenant $v_n = \frac{n}{n^2 + n}$ et $w_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$,

on a alors $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$, donc (v_n) et (w_n) sont convergentes.

Par suite (u_n) est une suite convergente, de plus on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1.$$