Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques, Marrakech
Département de Mathématiques

Année 2020 - 2021
Filière MIPC
Responsable : A. Ellabib

Module Analyse 1
Série 3

Exercice 1 : Déterminer les limites des expressions suivantes

1. $x-\sqrt{x^2-x}$ pour $x\to+\infty$;
2. $\sqrt{E(x)}-\sqrt{x}$ pour $x\to+\infty$.
3. $xE\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x\to+\infty$;
4. $xE\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x\to 0$;
5. $1+3xE(x)-(2E(x))^2$ pour $x\to 2$;
6. $\dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ pour $x\to\pi$;
7. $\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}$ pour $x\to 0$;
8. $\dfrac{e^x-e^{x^2}}{x-x^2}$ pour $x\to+\infty$;
9. $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ pour $x\to 0$;
10. $\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{4x+\pi}$ pour $x\to-\frac{\pi}{4}$;

Exercice 2 : Soit $f(x)=x^\alpha\sin(x)$ avec α un réel
a. Trouver deux suites réelles (x_n) et (y_n) qui tendent vers $+\infty$ telles que $f(x_n)=x_n^\alpha$ et $f(y_n)=-y_n^\alpha\quad\forall n\in\mathbb{N}$. En déduire que pour $\alpha\geq 0$, $f(x)$ ne peut avoir de limite quand x tend vers $+\infty$.
b. Calculer, dans le cas où $\alpha<0$, la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
Exercice 3 : Étudier la continuité des fonctions définies par

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{2|x|} & \text{pour } x\neq 0\\ 0 & \text{pour } x=0\end{cases}$; 2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^2-2x+1}} & \text{pour } x\neq 1\\ 1 & \text{pour } x=1\end{cases}$;
3. $f(x)=x-E(x)-(x-E(x))^2$; 4. $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par $f(x)=(E(x))^2+(2E(x)+1)(x-E(x))$. Montrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.
Exercice 5 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère f définie par

$$f(x)=\begin{cases} xE(\frac{1}{x}) & \text{pour } x<0\\ \dfrac{x-E(x)}{\sqrt{x}} & \text{pour } x>0\\ 0 & \text{pour } x=0\end{cases}$$

1. f est elle continue en 0 ? 2. f est elle continue en n ?
3. Montrer que f est continue sur $]n-1,n[$. 4. Étudier la continuité de f sur $\left]-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right[$.
5. Montrer que f est continue sur $]-\infty,-1]$.
Exercice 6 :

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{pour } x\in\mathbb{Q}\\ 1-x & \text{pour } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

1. f est elle continue en $\frac{1}{2}$? 2. Montrer que, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, f n'est pas continue en x.

Exercice 7 : Étudier le prolongement par continuité au point 0 des fonctions suivantes.

1. $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$; 2. $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
3. $f(x) = \cos x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$; 4. $f(x) = E\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Exercice 8 : 1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe un $c \in [0,1]$ tel que $f(c) + f(1-c) = 2c$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe un $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$.
3. Soient f et g deux applications définies et continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que $g(a) = f(b)$ et $g(b) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = f(c)$.
4. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$. Montrer qu'il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9 : Soit k un réel de l'intervalle $]0,1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.
b. En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy et converge vers un réel que l'on va noter l.
c. Montrer que $f(l) = l$ et que l est l'unique point fixe de f.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Année universitaire 2020 - 2021

Responsable : Abdellatif Ellabib

Filière : MIPC Semestre 1

Module Analyse 1

Corrigé de la série d'exercices N°3

$2^{ème}$ partie

Corrigé Exercices N°5, N°6, N°7 , N°8 et N°9

Exercice 1.

Correction d'exercice N° 1.

Exercice 2.

Correction d'exercice N° 2.

Exercice 3.

Correction d'exercice N° 3.

Exercice 4.

Correction d'exercice N° 4.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère f définie par

$$f(x) = \begin{cases} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x < 0 \\ \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

1. f est elle continue en 0 ?
2. f est elle continue en n ?
3. Montrer que f est continue sur $]n-1, n[$.
4. Étudier la continuité de f sur $\left]-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n+1}\right[$.
5. Montrer que f est continue sur $]-\infty, -1]$.

Correction d'exercice N° 5.

1. Soit $x < 0$ donc

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

d'où

$$1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x \text{ car } x < 0$$

alors

$$\lim_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \neq f(0)$$

par suite f n'est pas continue en 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\lim_{x \to n^-} E(x) = n - 1 \text{ et } f(n) = 0$$

donc

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \neq 0$$

d'où

$$\lim_{x \to n^-} f(x) \neq f(n)$$

par suite f n'est pas continue en n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]n-1, n[$ donc $E(x) = n-1$ et alors $f(x) = \dfrac{x-n+1}{\sqrt{x}}$.

   Alors f est continue en x comme rapport de deux fonctions continues en x car $\sqrt{x} \neq 0$.

   Par suite f est continue sur $]n-1, n[$.

4. Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n+1}\right[$ donc

$$-n-1 < \frac{1}{x} < -n$$

   Alors

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = -n-1$$

   D'où

$$f(x) = -(n+1)x$$

   Par suite f est continue sur $\left]-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n+1}\right[$ car $x \mapsto -(n+1)x$ est continue sur $\left]-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n+1}\right[$.

5. Soit $x \in]-\infty, -1]$ donc $-1 \leq \dfrac{1}{x} < 0$. Alors

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = -1$$

   D'où $f(x) = -x$. Par suite f est continue sur $]-\infty, -1]$ car $x \mapsto -x$ est continue sur $]-\infty, -1]$.

Exercice 6. On considère f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. f est elle continue en $\dfrac{1}{2}$?

2. Montrer que, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, f n'est pas continue en x.

Correction d'exercice N° 6.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$;

   Si $x \in \mathbb{Q}$; donc $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$

   Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; donc $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|1 - x - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

   D'où $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|1 - x - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

   Alors
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0.$$

   Donc $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Par suite f est continue en $\frac{1}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

   Premier Cas : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; il existe alors une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que (x_n) converge vers x. Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = x_n$ car $x_n \in \mathbb{Q}$.

   Donc
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

   et $f(x) = 1 - x \neq x$ car $x \neq \frac{1}{2}$.

   D'où
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq f(x)$$

   Alors f n'est pas continue en x.

   Deuxième Cas : $x \in \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

   Considérons la suite (x_n) donnée par $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Donc $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et(x_n) converge vers x. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = 1 - x_n$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - x_n = 1 - x$$

et $f(x) = x \neq 1 - x$ car $x \neq \frac{1}{2}$.

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(x)$$

Alors f n'est pas continue en x.

Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ f n'est pas continue en x.

Exercice 7. Étudier le prolongement par continuité au point 0 des fonctions suivantes.

1. $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$;
2. $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
3. $f(x) = \cos x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$;
4. $f(x) = E\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Correction d'exercice N° 7.

1. $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$. On a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

   Donc $\forall x > 0 \quad 1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

   alors $\lim\limits_{x\to 0^+} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 - x = 1$

   Aussi $\forall x < 0 \quad 1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x$

   alors $\lim\limits_{x\to 0^-} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 - x = 1$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

   Par suite f possède un prolongement par continuité, noté $\tilde{f}$, en 0 :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} xE\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. $f(x) = \sin(x)\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   On a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| = \left|\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin(x)|$ car $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

   alors $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} |\sin(x)| = 0$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Par suite f possède un prolongement par continuité, noté $\tilde{f}$, en 0 :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin(x)\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = \cos(x)\ \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Considérons les deux suites (x_n) et (y_n) définies par

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $f(x_n) = \cos\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)$; $f(y_n) = 0$.

   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$.

   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$.

   On a construit deux suites (x_n) et (y_n) telles que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0;\ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$$

   D'où f ne possède pas de limite en 0.

   Par conséquent f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

4. $f(x) = E\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{\dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

   On a $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \dfrac{1}{x} - 1 < E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$

   D'où $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 0 \leq \dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right) < 1$

   D'où $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \dfrac{1}{x} - 1 < f(x) < \dfrac{1}{x} + 1$

   Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} - 1 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

   Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} + 1 = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Donc f n'admet pas de limite en 0. Par conséquent f ne possède pas un prolongement par continuité en 0.

Exercice 8. 1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer qu'il existe un $c \in [0,1]$ tel que $f(c) + f(1-c) = 2c$.

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe un $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{c-1}$.

3. Soient f et g deux applications définies et continues sur l'intervalle $[a,b]$ telles que $g(a) = f(b)$ et $g(b) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = f(c)$.

4. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$. Montrer qu'il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Correction d'exercice N° 8.

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue.

   Considérons la fonction g sur $[0,1]$ définie par $g(x) = f(x) + f(1-x) - 2x$.

   Soit $x \in [0,1]$; donc $1 - x \in [0,1]$;

   d'où $g(0) = f(0) + f(1) \geq 0$ et $g(1) = f(1) + f(0) - 2 \leq 0$ car $f(0) \leq 1$ et $f(1) \leq 1$.

   Aussi g est continue sur $[0,1]$ car f ; $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto 2x$ sont continues sur $[0,1]$.

   Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$.

   D'où il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) + f(1-c) = 2c$.

2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue.

   Considérons la fonction g sur $[0,1]$ définie par $g(x) = x(x-1)f(x) - 2x + 1 \;\; \forall x \in [0,1]$.

   L'application g est continue sur $[0,1]$ car f ; $x \mapsto 1 - x$; $x \mapsto x$ et $x \mapsto -2x + 1$ sont continues sur $[0,1]$.

On a $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -1 < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$.

Comme $g(0) \neq 0$ et $g(1) \neq 0$, alors il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$.

D'où il existe $c \in]0, 1[$ tel que $c(c-1)f(c) - 2c + 1 = 0$.

Comme $c \neq 0$ et $c \neq 1$; Alors $f(c) = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{c-1}$.

3. Soient f et g deux applications définies et continues sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ telles que $g(a) = f(b)$ et $g(b) = f(a)$. Considérons la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

   Donc h est continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ comme différence de deux fonctions continues sur $[a, b]$ et

$$\begin{aligned} h(a)h(b) &= (g(a) - f(a))(g(b) - f(b)) \\ &= (g(a) - g(b))(g(b) - g(a)) \text{ car } f(a) = g(b) \text{ et } f(b) = g(a) \\ &= -(g(a) - g(b))^2 \leq 0 \end{aligned}$$

   D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $h(c) = 0$.

   Donc il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

4. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$. On f et g sont continues sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, donc les bornes de f et g sont atteintes sur $[a, b]$. Alors il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que $f(c_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $g(c_2) = \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$. Donc $f(c_1) = g(c_2)$.

   <u>1^{er} Cas : $c1 = c2$</u> :

   Alors $c = c1 = c2 \in [a, b]$ et $f(c) = g(c)$.

   <u>$2^{ème}$ Cas : $c_1 \neq c_2$</u> :

   Supposons que $c_1 < c_2$ et considérons la fonction h définie sur $[c_1, c_2]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Donc h est continue sur l'intervalle fermé borné $[c_1, c_2]$ comme différence de deux fonctions continues sur $[c_1, c_2]$ et

$$\begin{aligned} h(c_1) = & \quad f(c_1) - g(c_1) & \\ = & \quad g(c_2) - g(c_1) & \text{car } f(c_1) = g(c_2) \\ \geq & \quad 0 & \text{car } g(c_2) = \sup_{x \in [a,b]} g(x) \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} h(c_2) = & \quad f(c_2) - g(c_2) & \\ = & \quad f(c_2) - f(c_1) & \text{car } f(c_1) = g(c_2) \\ \leq & \quad 0 & \text{car } f(c_1) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [c_1, c_2]$ tel que $h(c) = 0$.

Donc il existe $c \in [c_1, c_2]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Comme $[c_1, c_2] \subset [a, b]$, finalement il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9. Soit k un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

b. En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy et converge vers un réel que l'on va noter l.

c. Montrer que $f(l) = l$ et que l est l'unique point fixe de f.

Correction d'exercice N° 9.

Soit k un réel de l'intervalle $]0,1[$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$; soit $\varepsilon > 0$; soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ et suposons que $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{k}$.

   Or $|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$. Alors $|f(x) - f(a)| < k\dfrac{\varepsilon}{k}$. Donc

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

   Par suite f est continue en a.

   Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

   $$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

   Nous allons utiliser un raisonnemenr par récurrence.

   Base de récurrence :

   Pour $n = 0$, il est clair que $|u_1 - u_0| \leq k^0 |u_1 - u_0|$.

   Hypothèse de récurrence :

   Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons que elle est vraie pour $n+1$. Supposons que $\forall\, l \leq n \quad |u_{l+1} - u_l| \leq k^l |u_1 - u_0|$ et montrons que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k^{n+1} |u_1 - u_0|$.

   On a alors

   $$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &= |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \\ &\leq k|u_{n+1} - u_n| \\ &\leq kk^n |u_1 - u_0| \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

D'où $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k^{n+1}|u_1 - u_0|$.

Finalement $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leq k^n|u_1 - u_0|$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$; soient $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p > q$. Alors

$$
\begin{array}{rcl}
|u_p - u_q| & = & |u_p - u_{p-1} + u_{p-1} - u_{p-2} + \cdots + u_{q+1} - u_q| \\
 & \leq & |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + \cdots + |u_{q+1} - u_q| \\
 & \leq & k^{p-1}|u_1 - u_0| + k^{p-2}|u_1 - u_0| + \ldots + k^q|u_1 - u_0| \\
 & \leq & (k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + k^q)|u_1 - u_0| \\
 & \leq & k^q(k^{p-q-1} + k^{p-q-2} + \ldots + k + 1)|u_1 - u_0| \\
 & \leq & k^q \dfrac{1 - k^{p-q}}{1 - k}|u_1 - u_0| \\
 & \leq & \dfrac{k^q}{1 - k}|u_1 - u_0| \text{ car } 1 - k^{p-q} < 1
\end{array}
$$

Or $\lim\limits_{qto+\infty} k^q = 0$ car $k \in]0, 1[$. D'où

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, q > N \;\; |k^q| < \frac{1 - k}{|u_1 - u_0|}\varepsilon$$

Alors $\forall\, p > N \;\; \forall\, q > N \;\; |u_p - u_q| < \varepsilon$.

Finalement $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, p > N \;\; \forall\, q > N \;\; |u_p - u_q| < \varepsilon$.

Donc (u_n) est une suite de Cauchy.

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ **avec** $l \in \mathbb{R}$

On a (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors (u_n) est une suite convergente dans $\mathbb{R}$. Par conséquent il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

(c) Montrons que $f(l) = l$.

On a $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$ car f est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrons que l **est l'unique point fixe de** f.

Supposons qu'il existe deux réels l_1, l_2 tels que $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$.

On a alors $|f(l_1) - f(l_2)| = |l_1 - l_2|$ et d'autre part $|f(l_1) - f(l_2)| \leq k|l_1 - l_2|$.

Donc $|l_1 - l_2|| \leq k|l_1 - l_2|$. Alors $1 \leq k$ ce qui est absurde $k < 1$