

Test écrit pour la sélection des candidats du Master SMA

Partie Topologie

- Toutes les réponses doivent être justifiées -

Exercice 1. Soit K un espace métrique compact. On munit l'espace vectoriel E des applications continues de K à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la norme de la convergence uniforme.

1. Est-ce que l'ensemble

$$F = \{f \in E, f(x) \geq 0 \forall x \in K\}$$

est un fermé de E ?

2. Montrer que l'ensemble

$$\Omega = \{f \in E, f(x) > 0 \forall x \in K\}$$

est un ouvert de E .

3. En déduire que l'ensemble

$$\Theta = \{f \in E, f(x) \neq 0 \forall x \in K\}$$

est un ouvert de E .

4. Soit x_0 un élément quelconque de K . Est-ce que l'application J de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E, J(f) = f(x_0)$$

est continue ?

5. Déterminer l'image par J de Θ .

6. Est-ce que Θ est connexe ?

7. Est-ce que Ω est connexe par arcs ?

Test écrit pour la sélection des candidats du Master SMA

INTEGRATION

Exercice 1 : Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable tel que $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{P}(X)$ et soit $f : (X, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ une application.
Montrer que $|f|$ peut être mesurable sans que f le soit.

Exercice 2 : Soient X un ensemble et $f : X \longrightarrow X$ une application. Soit la famille

$$\mathcal{B} = \{A \subset X : f^{-1}(A) = A\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu sur X .

2) On suppose que $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la tribu $\mathcal{B}$.

b) Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ne sont pas comparables (au sens de l'inclusion).

Exercice 3 : Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = +\infty$.

1) On suppose qu'il existe une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ **strictement positive** et μ -**intégrable** sur X . Pour tout $n \geq 1$, on pose : $A_n = \left\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\}$.

Montrer que :

a) $\forall n \geq 1 \quad A_n \in \mathcal{B}$;

b) μ est σ -finie.

2) On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $0 < \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1$.

Construire une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ **strictement positive** et μ -**intégrable** sur X .

Test écrit pour la sélection des candidats du Master SMA

Analyse
Partie I

Les questions 1, ..., 7 de l'Exercice 1 peuvent être traitées indépendamment.

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx).$$

- 1- Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{R}$.
- 2- Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, +\infty[$.
- 3- Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $[\lambda, +\infty[$ avec λ réel > 0 , fixé.
- 4- Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$.
- 5- Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier, selon les valeurs du paramètre réel a , la nature (convergence, divergence) de l'intégrale généralisée :

$$I_a := \int_0^{+\infty} t^a \operatorname{Log}(t) \operatorname{Log}(2+t) f_n(t) dt.$$

- 6- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit R un réel > 0 . Soit $b \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, On note $\mathcal{C}^+(0, R)$ le cercle du centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens direct. Calculer l'intégrale : $J_{R,b} = \int_{\mathcal{C}^+(0,R)} \frac{f_n(z)}{z^2 + 2bz + 1} dz$

selon les valeurs des paramètres R et b .

- 7- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $g(x, y) = e^{-xy} \sin(xy)$. Déterminer la nature des points critiques de la fonction g .

Test écrit pour la sélection des candidats du Master SMA

Analyse
Partie II

Exercice 1. L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) Pour quelles valeurs de α , f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
- 2) Pour quelles valeurs de α , f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Soit E un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \langle x | x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Soit u un endomorphisme continu de E que l'on suppose symétrique, i.e. $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.

- 1) Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) := \langle u(x) | x \rangle$.
 - i) Montrer que l'application f est différentiable sur E et calculer sa différentielle sur E .
 - ii) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde $D^2 f(x)$ pour tout $x \in E$.

2) On définit une application $g : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$g(x) = \frac{\langle u(x) | x \rangle}{\langle x | x \rangle}.$$

- i) Montrer que g est une application différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer la différentielle $Dg(x)$, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.
- ii) Montrer que, pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a $Dg(a) = 0$ si, et seulement si, a est un vecteur propre de u .

3) Posons $\mathcal{N}(x) := \|x\|$, pour tout $x \in H$.

- i) Etudier la différentiabilité de $\mathcal{N}$ au point 0.
- ii) Trouver G la partie de H où $\mathcal{N}$ est différentiable et calculer la différentielle de $\mathcal{N}$ en tout point de G .

est écrit pour la sélection des candidats du Master SMA

Exercice d'algèbre

ent $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

dication : On peut utiliser la concavité de la fonction logarithme)

ppeler le théorème spectral pour les matrices réelles symétriques.

et A une matrice réelle symétrique d'ordre n .

-) Montrer que A est positive si, et seulement si, les valeurs propres de A sont positives.
-) En déduire que lorsque A est positive, on a l'inégalité :

$$\sqrt[n]{\det(A)} \leq \frac{\text{tr}(A)}{n}.$$

oit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée réelle d'ordre n . Montrer que

$$n \sqrt[n]{\det(M)^2} \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} m_{ij}.$$

Test écrit pour la sélection des candidats du Master SMA

Exercice de Probabilités

Soit M un entier naturel non nul fixé. Considérons une urne contenant initialement $4M$ boules indiscernables au toucher, dont M boules rouges, M boules vertes et $2M$ boules bleues. On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, selon le protocole suivant:

- Si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, mais on met dans l'urne une boule bleue.
- Si la boule tirée est verte on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, mais on met dans l'urne une boule rouge.

On note, pour tout entier naturel non nul n , X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne au $n^{\text{ième}}$ tirage, et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à M .

1°) Déterminer la loi de probabilité ainsi que l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires X_1 et X_2 .

2°) On suppose que $n \geq 2M$, de sorte que l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X_n est $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, 3M\}$.

2.1) Pour $k \in X_n(\Omega) - \{0, 3M\}$, quelle est la composition de l'urne lorsque l'événement $(X_n = k)$ se réalise?

En déduire la loi de X_{n+1} sachant l'événement $(X_n = k)$.

2.2) Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n = k) = \left(1 - \frac{1}{2M}\right)k + \frac{3}{4}$.

Cette expression est-elle encore vraie lorsque $k \in \{0, 3M\}$?

2.3) En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2M}\right)\mathbb{E}(X_n) + \frac{3}{4}$.

3°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.