Université Moulay Ismaïl
Département de Mathématiques - FST Errachidia
Filière : Tronc commun MIP

Polycopié de TD avec corrections

Module : M112
Algèbre 1 : Polynômes et espaces vectoriels

Jawad SALHI

Année Universitaire : 2022-2023

Table des matières

Introduction

Ce recueil rassemble tous les exercices proposés dans le cours de première année d'algèbre 1 pour la filière MIP.

Deux écueils sont à éviter. D'une part, il n'est pas nécessairement souhaitable de faire énormément d'exercices au détriment de l'étude approfondie du cours. Souvenez-vous que le cours n'est pas un prétexte pour faire des exercices et passer des examens : au contraire, ce sont les exercices qui sont faits pour tester et améliorer votre compréhension du cours. D'autre part, il est probablement nuisible de se contenter de lire les corrections d'exercices que l'on n'a pas cherché soi-même : l'impression, en lisant et en comprenant le corrigé, qu'on « aurait su faire l'exercice » est en général mauvaise conseillère.

Malgré la vigilance de l'auteur, ce manuscrit comporte sans aucun doute (encore) de multiples erreurs de tout ordre. De nombreux exercices mériteraient un traitement plus élégant autant d'un point de vue mathématique que stylistique. J'invite d'ailleurs tout lecteur à participer à son amélioration. Vous pouvez me signaler toute erreur en envoyant un mail à l'adresse : sj.salhi@gmail.com

Je serais également heureux de recevoir de nouvelles solutions aux exercices proposés ou toutes autres suggestions. Bon courage !

CHAPITRE 1

Rudiments de logique-Ensembles-Applications

Exercice 1 (Raisonnement par contraposée)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\big(\forall \varepsilon > 0, \quad |a| \leq \varepsilon\big) \Rightarrow a = 0.$$
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\big(\forall \varepsilon > 0, \quad a < b + \varepsilon\big) \Rightarrow \big(a \leq b\big).$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\big(n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8\big) \Rightarrow \big(n \text{ est pair}\big).$$

Solution :

1. Raisonnons par contraposée et montrons que :
$$a \neq 0 \Rightarrow \big(\exists \varepsilon > 0, \quad |a| > \varepsilon\big).$$
Supposons que $a \neq 0$. Posons $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et on a bien $|a| > \varepsilon$.
2. Raisonnons par contraposition. Supposons $a > b$ et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant $a \geq b + \varepsilon$. Ce que nous devons montrer maintenant, c'est qu'il existe un $\varepsilon > 0$ vérifiant $\varepsilon \leq a - b$. Choisissons $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. On a alors $b + \varepsilon = \dfrac{2b + a - b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$, et comme $a > b$, on a bien $a \geq \dfrac{a+b}{2}$. Avec ce choix de ε, on a donc bien $a \geq b + \varepsilon$.
3. Raisonnons par contraposition. Supposons n est impair. Alors, $\exists k \in \mathbb{N}$: $n = 2k+1$. Donc, $n^2 - 1 = 4k(k+1)$. Or $k(k+1)$ est pair et donc $\exists k' \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) = 2k'$. Ainsi : $n^2 - 1 = 8kk'$ et donc 8 divise $n^2 - 1$. D'où le résultat.

Exercice 2 (Raisonnement par l'absurde)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant :

$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1.$$

Montrer que :

$$\exists k \in [\![1, n]\!], \quad x_k - x_{k-1} \leq \frac{1}{n}.$$

Solution :
Raisonnons par l'absurde et supposons que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k - x_{k-1} > \frac{1}{n}.$$

On écrit :

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$x_n - x_0 > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Contradiction !

Exercice 3 (Raisonnement par l'absurde)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $p_1, \cdots, p_n$ des nombres premiers. Soit $N = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, p_k ne divise pas N.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Solution :

1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que p_k divise N. Alors, on aurait :
   — p_k divise $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$.
   — p_k divise $1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$.
   Ainsi p_k divise $1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_n - p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = 1$ (On a utilisé le fait que si $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid (a - b)$). Donc $p_k = 1$ ou -1. Absurde car on avait supposé p_k premier (donc supérieure ou égale à 2). On cnclut que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, p_k ne divise pas N.
2. On raisonne une autre fois par l'absurde. Supposons que l'ensemble des nombres premiers soit fini. On pourrait alors tous les énumérer : $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Considérons $N = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$. Comme $N \geq 2$, on sait que N possède un diviseur premier p qui ne peut être l'un des p_k. L'hypothèse que l'ensemble des nombres premiers soit fini est donc contradictoire, ce qui prouve que cet ensemble est infini.

Exercice 4 (Raisonnement par analyse-synthèse)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple (f_1, f_2) tel que l'on ait $f = f_1 + f_2$ avec f_1 (resp. f_2) fonction impaire (resp. paire) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution :
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— **Analyse :** Supposons qu'il existe $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire, et $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, paire, telles que $f = f_1 + f_2$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

On en déduit immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f_1(x) + f_2(x),$$

ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Par suite il existe au plus un couple (f_1, f_2) répondant au problème.

— **Synthèse :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Il est alors immédiat de vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), f_1(-x) = -f_1(x) \text{ et } f_2(-x) = f_2(x),$$

ce qui prouve que le couple (f_1, f_2) répond au problème.

Exercice 5 (Raisonnement par analyse-synthèse)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Solution :

— **Analyse :** Soit f une telle fonction. Alors, en prenant $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 0$. Ensuite, en dérivant la relation par rapport à x, on obtient :

$$f'(x + y) = f'(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En pranant $x = 0$, on trouve

$$f'(y) = f'(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Comme f' est constante, on en déduit alors qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$$

Or $f(0) = 0$ et donc f est linéaire de la forme $x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

— **Synthèse :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons : $f(x) = ax$, où $a \in \mathbb{R}$. Alors, il est alors immédiat de vérifier que f est dérivable et, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y),$$

ce qui prouve que f vérifie bien l'équation fonctionnelle.

— **Conclusion :** On en déduit que l'ensemble des fonctions solution de l'équation est constitué par les fonctions linéaires.

Exercice 6 (Raisonnement par analyse-synthèse)
Soit E un ensemble et soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre les équations

1. $A \cap X = B$.
2. $A \cup X = B$.

Solution :

1. Si $B \not\subset A$, l'équation n'a pas de solution. En effet, l'existence de $X \in \mathcal{P}(A)$ tel que $A \cap X = B$ implique que $B \subset A$.
   Supposons $B \subset A$ et raisonnons par Analyse-Synthèse.
   — **Analyse :** Soit X une solution de l'équation. On peut écrire
   $$X = (A \cap X) \cup (\bar{A} \cap X) = B \cup C \text{ avec } C = \bar{A} \cap X \subset \bar{A}.$$
   — **Synthèse :** Soit $X = B \cup C$ avec $C \subset \bar{A}$ alors :
   $$A \cap X = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B.$$
   — **Conclusion :**
   $$\mathcal{S} = \{X = B \cup C \mid C \subset \bar{A}\} = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \bar{A}\}.$$
2. Laissé au lecteur.

Exercice 7 (Raisonnement par analyse-synthèse)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$.

Exercice 8 (Raisonnement par récurrence)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|.$$

Solution :
On sait la formule

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

On en déduit

$$|\sin(a+b)| \leq |\sin(a)|\underbrace{|\cos(b)|}_{\leq 1} + |\sin(b)|\underbrace{|\cos(a)|}_{\leq 1} \leq |\sin(a)| + |\sin(b)|.$$

On montre alors l'inégalité en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, la propriété est immédiate car $\sin(0 \cdot \theta) = 0$.
— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Au rang suivant, on a :

$$\sin((n+1)\theta) = \sin(n\theta + \theta)$$

donc

$$|\sin((n+1)\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \leq n|\sin(\theta)| + |\sin(\theta)| = (n+1)|\sin(\theta)|$$

La récurrence est établie.

Exercice 9 (Raisonnement par récurrence)
Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que tout ensemble fini à n éléments vérifie $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Solution :
Raisonnons par récurrence sur $n = \operatorname{card} E$.
— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $E = \emptyset$ et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$. Donc $\operatorname{card} \mathcal{P}(E) = 1 = 2^0$.
— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat acquis pour n et considérons un ensemble E de cardinal $n + 1$. Soit $x \in E$ fixé. On peut distinguer deux catégories de parties de E :
— celles qui contiennent x : $C_x = \{A \subset E; x \in A\}$.
— celles qui ne contiennent pas x : $\mathcal{P}(E) \setminus C_x = \mathcal{P}(E \setminus \{x\})$.
Comme $\operatorname{card} E \setminus \{x\} = n$, alors d'après l'hypothèse de récurrence : $\operatorname{card} \mathcal{P}(E \setminus \{x\}) = 2^n$. Par ailleurs, l'application

$$\begin{aligned} \alpha : C_x &\longrightarrow \mathcal{P}(E \setminus \{x\}) \\ A &\longmapsto A \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

est bijective de réciproque

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{P}(E \setminus \{x\}) &\longrightarrow C_x \\ B &\longmapsto B \cup \{x\}. \end{aligned}$$

(On vérifie facilement que $\beta \circ \alpha = Id_{C_x}$ et $\alpha \circ \beta = Id_{\mathcal{P}(E \setminus \{x\})}$).
D'où $\operatorname{card} C_x = 2^n$. Finalement, comme

$$\mathcal{P}(E) = C_x \sqcup \mathcal{P}(E \setminus \{x\}) \quad \text{(réunion disjointe)}$$

alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \mathcal{P}(E) &= \operatorname{card} C_x + \operatorname{card} \mathcal{P}(E \setminus \{x\}) \\ &= 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 10 (Raisonnement par récurrence)
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \quad \Big(\text{Formule du binôme de Newton} \Big).$$

Exercice 11 (Raisonnement par récurrence forte)
Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 2$ est divisible par au moins un nombre premier.

Solution :
Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 2$, n est divisible par au moins un nombre premier.

— **Initialisation :** 2 est divisible par 2 qui est un nombre premier. La propriété à démontrer est donc vraie quand $n = 2$.
— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et supposons que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, il existe au moins un nombre premier qui divise k. Montrons que le nombre $n+1$ admet au moins un diviseur premier. Il y a deux cas possibles :
  1. Soit $n+1$ est premier et donc $(n+1) \mid (n+1)$ et $n+1$ possède un diviseur premier.
  2. Soit $n+1$ n'est pas premier. Dans ce cas, il existe un diviseur d de $n+1$, $1 < d < n+1$. Ainsi $d \in [\![2, n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, il existe au moins un nombre premier p qui divise d. On a donc $p \mid d$ et $d \mid (n+1)$. Par la propriété de transitivité de la divisibilité, on en déduit que $p \mid (n+1)$ et $n+1$ possède un diviseur premier.
— **Conclusion :** Grâce au principe de récurrence forte, on peut conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

Exercice 12 (Injectivité, surjectivité)
Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et si f est surjective, alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et si g est injective, alors f est surjective.

Solution :

1. Soient x, x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en composant avec la fonction g, on obtient : $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Or $g \circ f$ est injective et donc $x = x'$. D'où f est injective.
2. Soit $z \in G$. Il s'agit de montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme $z \in G$ et $g \circ f$ est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Ainsi, en posant $y = f(x) \in F$, on a bien $z = g(y)$. D'où g est surjective.
3. Soient y, y' dans F tels que $g(y) = g(y')$. Comme f est surjective, il existe x, x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, ce qui donne $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et $x = x'$ puisque $g \circ f$ est injective, donc $y = y'$.
4. Soit $y \in F$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(y) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Comme g est injective alors : $y = f(x)$. En conséquence, f est surjective.

Exercice 13 (Image directe, image réciproque d'une partie)
Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Pour $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$, montrer que :

1. Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$. En déduire que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, puis trouver un contre-exemple à l'inclusion : $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
2. f est injective si et seulement si pour toutes parties A, B de E : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
5. $A \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité quand f est injective.
6. $f(f^{-1}(C)) \subset C$ avec égalité quand f est surjective.

Exercice 14 (Injectivité, surjectivité)
Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Solution :

— Supposons f est injective. Soit $y \in E$. Posons $w = f(y)$ et $z = f \circ f(y)$. On a : $f(z) = f \circ f \circ f(y) = f(y)$. Or f est injective. Donc $z = y$ et donc : $f \circ f(y) = y$. Ainsi : $f(w) = y$. Donc f est surjective.

— Supposons f est surjective. Soit $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. Puisque f est surjective, il existe $x', y' \in E$ tel que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. On a : $f \circ f(x) = f \circ f \circ f(x') = f(x') = x$ et $f \circ f(y) = f \circ f \circ f(y') = f(y') = y$. Or puisque $f(x) = f(y)$ alors $f \circ f(x) = f \circ f(y)$ et donc $x = y$. D'où f est injective.

Exercice 15 (Injectivité, surjectivité)
Soit E un ensemble, et $p : E \longrightarrow E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est surjective ou injective, alors $p = Id_E$.

Solution :

— Supposons p injective. Soit $x \in E$. Par hypothèse, on a $p(p(x)) = p(x)$. Puisque p est injective, on en déduit que $p(x) = x$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $p(x) = x$ et donc $p = Id_E$.

— Supposons p surjective. On se ramène au cas précédent en montrant que p est injective. Soit x et x' deux éléments de E tels que $p(x) = p(x')$. Puisque p est surjective, il existe deux éléments y et y' de E tels que $x = p(y)$ et $x' = p(y')$. Ainsi, $p \circ p(y) = p \circ p(y')$ et par définition de p, on obtient $p(y) = p(y')$. Par suite $x = y$ et p est injective. Donc : $p = Id_E$.

Exercice 16 (Injectivité, surjectivité, bijectivité)
Soient E un ensemble et A une partie de E.

1. Soit $u_A \left| \begin{array}{lll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A. \end{array} \right.$

   (a) Montrer que si $A \neq E$, alors l'application u_A n'est pas injective.

   (b) Montrer que l'application u_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.

2. On pose $B = C_E A$. Montrer que $u \left| \begin{array}{lll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$ est bijective.

Solution :

1. **(a)** Supposons $A \neq E$. Comme $u_A(A) = A = u_A(E)$, il est clair que u_A n'est pas injective.

   (b) — Supposons $A = E$. Alors u_A est l'identité de $\mathcal{P}(E)$; elle est donc surjective.
   — Supposons $A \neq E$. Alors, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $u(X) \subset A$ et donc $u(X) \neq E$. Ainsi E n'a pas d'antécédent par u_A, et cette application n'est pas surjective.

2. Considérons $v : \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ \quad (Y, Z) \longmapsto Y \cup Z. \end{array}$

   — Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a :
   $$v(u(X)) = v(X \cap A, X \cap B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X.$$
   Comme $v \circ u$ est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, on a donc $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

   — Montrons $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$ c'est-à-dire :
   $$\forall (Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \quad u(v(Y, Z)) = (Y, Z).$$
   Soit donc $(Y, Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a alors :
   $$v(Y, Z) \cap A = (Y \cup Z) \cap A = (Y \cap A) \cup (Z \cap A).$$
   ⋆ Comme $Z \subset B$, on a $Z \cap A \subset (B \cap A) = \varnothing$.
   ⋆ Comme $Y \subset A$, on a $Y \cap A = Y$.

   Ainsi $v(Y, Z) \cap A = Y$. On prouve de même $v(Y, Z) \cap B = Z$, ce qui donne :
   $$u(v(Y, Z)) = (v(Y, Z) \cap A, v(Y, Z) \cap B) = (Y, Z).$$
   Comme $u \circ v$ est une application de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans lui-même, on en déduit $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$. Par suite u est bijective, et v est son application réciproque.

Exercice 17 (Relations d'équivalence)
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pout tout $x \in E$, notons $\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$ la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$.
Montrer que l'ensemble des classes d'équivalences de E forme une partition de E (i.e. $E = \bigsqcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$).
L'ensemble des classes d'équivalences de E pour $\mathcal{R}$ est appelé l'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ et souvent noté $E/\mathcal{R}$.

Solution :
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Pour tout $x \in E$, notons $\mathrm{cl}(x)$ la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in E$: $\quad x\mathcal{R}x \quad$ par réflexivité, donc $x \in \mathrm{cl}(x)$, donc $\mathrm{cl}(x)$ est non vide. Rappelons à cette occasion que cette condition différencie les partitions des recouvrements disjoints.

— Clairement : $\quad E = \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x) \quad$ car $x \in \mathrm{cl}(x)$ pour tout $x \in E$.

— Soient $x, y \in E$. Pour montrer que $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$ sont égales ou disjointes, supposons-les NON disjointes et montrons qu'elles sont égales. Par hypothèse, nous pouvons nous donner un élément z commun à $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$. Par symétrie des rôles de x et y, il nous suffit de montrer que $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$. Soit $t \in \mathrm{cl}(x)$.

⋆ D'abord : $z \in \mathrm{cl}(y)$, donc $y\mathcal{R}z$.

⋆ Ensuite : $z \in \mathrm{cl}(x)$, donc $x\mathcal{R}z$, puis $z\mathcal{R}x$.

⋆ Enfin : $t \in \mathrm{cl}(x)$, donc $x\mathcal{R}t$.

Conclusion : $y\mathcal{R}t$ par transitivité.

Par suite, les classes d'équivalence forment une partition de E.

Exercice 18 (Relations d'équivalence)
On définit sur $\mathbb{R}$ la relation suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Solution :

1. Il suffit de remarquer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ avec $f : x \mapsto x^2 - x$. II est alors aisé de vérifier en appliquant la définition que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche les éléments y de $\mathbb{R}$ tels que $y\mathcal{R}x$. On doit donc résoudre l'équation (en y) $y^2 - x^2 = y - x$. Elle se factorise en

$$(y-x)(y+x) - (y-x) = 0 \Longleftrightarrow (y-x) \times (y+x-1) = 0.$$

Ses solutions sont $y = x$ et $y = 1 - x$. La classe de x est donc égale à $\{x, 1-x\}$. Elle est constituée de deux éléments, sauf si $x = 1 - x \Longleftrightarrow x = 1/2$. Dans ce cas, elle est égale à $\{1/2\}$.

Exercice 19 (Théorème de Cantor)

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de surjection φ de E sur $\mathcal{P}(E)$.
Indication : Considérer la partie $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$.

Solution :

1. L'application $x \mapsto \{x\}$ est évidemment injective de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application. On pose $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$. Il s'agit de montrer qu'il n'existe pas d'élément $a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = A$. Alors on a deux possibilité :
— si $a \in A$: $a \notin \varphi(a) = A$, ce qui est absurde ;

— si $a \notin A$: $a \in \varphi(a) = A$, ce qui est absurde aussi.
Ainsi, on a montré par l'absurde que : $\forall x \in E : \varphi(x) \neq A$, donc A n'a pas d'antécédent par φ. A fortiori, φ n'est pas surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 20 (Théorème de Knaster-Tarski)
Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties et $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante, c'est-à-dire telle que $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$.

On pose $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ défini par :

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \varphi(A) \subset A\},$$

et on définit M par : $M = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{S}} A$.

1. Justifier que $\mathcal{S}$ est non vide.
2. Montrer que $\varphi(M) \subset M$.
3. Montrer que $\varphi(M) \in \mathcal{S}$ et en déduire que $\varphi(M) = M$.

Ainsi, toute application $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ croissante admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$.

Solution :

1. De toute évidence, $E \in \mathcal{S}$, donc $\mathcal{S} \neq \varnothing$.
2. Par croissance de φ, pour tout A de $\mathcal{S}, M \subset A$, donc $\varphi(M) \subset \varphi(A)$. Ainsi,
$$\varphi(M) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{S}} \varphi(A)$$
Or, pour tout A de $\mathcal{S}$, par définition de $\mathcal{S}$, on a $\varphi(A) \subset A$. Ainsi,
$$\varphi(M) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A = M$$
3. Puisque φ est croissante, on a alors $\varphi(\varphi(M)) \subset \varphi(M)$. Comme par définition de $\varphi, \varphi(M) \in \mathcal{P}(E)$, on en déduit, par définition de $\mathcal{S}$, que $\varphi(M) \in \mathcal{S}$. Par principe de double inclusion, on a bien $\varphi(M) = M$.

Exercice 21 (Recollement de bijections)
Soit E et F deux ensembles, et $\{E_1, E_2\}$ une partition de E et $\{F_1, F_2\}$ une partition de F. Ainsi, $E = E_1 \sqcup E_2$ et $F = F_1 \sqcup F_2$. On suppose qu'il existe deux bijections $f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F_2$. À l'aide de f_1 et f_2, construire une bijection $f : E \longrightarrow F$ (on ne se contentera pas de décrire la construction, on s'appliquera également à prouver que la fonction f est bien bijective).

Exercice 22 (Théorème de Cantor-Bernstein)
Le but de cet exercice est de démontrer un célèbre théorème de Cantor et Bernstein : "Si E et F sont des ensembles tel qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F". On se donne donc deux ensembles E et F et deux applications injectives $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$.

1. On définit $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ par :
$$\varphi(A) = C_E\Big(g\big(C_F f(A)\big)\Big),$$
Montrer que φ admet un point fixe $M \in \mathcal{P}(E)$, qu'on se donne pour la suite de cet exercice.

2. Montrer que f définit par restriction et corestriction une application $f_1 : M \longrightarrow f(M)$, et que f_1 est bijective.
3. Soit $N = C_F f(M)$.
   (a) Décrire g(N).
   (b) Montrer que g définit par restriction et corestriction une application $g_1 : N \longrightarrow C_E M$, et que g_1 est une bijection.
4. Construire à l'aide de f_1 et g_1 une bijection $h : E \longrightarrow F$.

CHAPITRE 2

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1 (Équations à inconnue polynomiale)

1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant : $P(X^2) = (X^2+1) \times P \quad (\star)$.
2. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant : $P \circ P = P \quad (\star\star)$.

Solution :

1. Raisonnons par analyse-synthèse.
   — **Analyse :** Tout d'abord, remarquons que le polynôme nul verifie bien $(\star)$. Supposons qu'il existe un polynôme non nul vérifiant $(\star)$. Alors, en calculant le degré de chaque membre, on trouve : $2\deg P = 2 + \deg P$. D'où : $\deg P = 2$. Ainsi, s'il existe un polynôme non nul vérifiant $(\star)$, alors $\deg P = 2$.
   — **Synthèse :** Soit $P = aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$ (seuls ces polynômes peuvent être solutions de $(\star)$). Alors, $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et $(1+X^2) \times P = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P \quad \text{vérifie} \quad (\star) &\Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b & = 0 \\ c+a & = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = 0 \\ c & = -a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow P = aX^2 - a \quad \text{avec} \quad a \neq 0.
\end{aligned}$$

   Conclusion : Les polynôme qui vérifient $(\star)$ sont les polynômes $P = aX^2 - a$ avec $a \in \mathbb{K}$. (Il ne faut pas oublier que le polynôme nul est solution de $(\star)$).
2. Raisonnons par analyse-synthèse.
   — **Analyse :** Tout d'abord, remarquons que le polynôme nul verifie bien $(\star\star)$. Supposons qu'il existe un polynôme non nul vérifiant $(\star\star)$. Alors, en calculant le degré de chaque membre, on trouve : $\deg(P)^2 = \deg P$. D'où : $\deg P = 1$ ou 0.

— **Synthèse :** Il est clair que les polynômes constants vérifient bien $(\star\star)$. Soit $P = aX + b$ alors,

$$\begin{aligned} P \quad \text{vérifie} \quad (\star\star) &\Leftrightarrow a^2X + ab + b = aX + b \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= a \\ ab &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \text{ ou } 0 \\ ab &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $a = 1$, alors $b = 0$ et si $a = 0$, alors b peut être quelconque dans $\mathbb{K}$. Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme $P = X$.

Exercice 2 (Division euclidienne)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$.

1. Déterminer le reste R de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$.
2. Déterminer de deux manières le reste R de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et de $P'(a)$.

Solution :

1. La division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ s'écrit :
$$P = (X-a)(X-b)Q + R$$
pour certains $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec : $\deg(R) < 2$ et s'écrit donc $R(X) = \alpha X + \beta$. Évaluons la relation
$$P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + \alpha X + \beta$$
en a et en b. On trouve le système
$$\begin{cases} \alpha a + \beta = P(a) \\ \alpha b + \beta = P(b). \end{cases}$$
On en déduit alors facilement que
$$\alpha = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \text{ et } \beta = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$
2. — **Première méthode :** En effectuant la division euclidienne de P par $(X-a)^2$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R = \alpha X + \beta \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que $P = (X-a)^2Q + \alpha X + \beta$. On en déduit, après évaluation en a, que $P(a) = \alpha a + \beta$. De plus,
$$P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2Q' + \alpha$$
et donc, après évaluation en a, on obtient : $\alpha = P'(a)$. D'où :
$$R = P'(a)X + P(a) - aP'(a) = P(a) + (X-a)P'(a).$$
— **Deuxième méthode :** D'après la formule de Taylor en a, pour $n = \deg(P)$ (on peut supposer $n \geqslant 2$ car sinon $Q = 0$ et $R = P$) :
$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = P(a) + P'(a)(X-a) + (X-a)^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}.$$
Par unicité dans la division euclidienne, on en déduit que $R = P(a) + P'(a)(X-a)$.

Exercice 3 (Division euclidienne)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n - 1$. Effectuer la division euclidienne de P_n par P_m.

Solution :
Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. La division euclidienne de n par m s'écrit $n = qm + r$ où $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq r < m$. Ainsi : $X^n - 1 = X^{qm+r} - 1$ et donc

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= X^{qm+r} - X^r + X^r - 1 = X^r\Big(\big(X^m\big)^q - 1\Big) + X^r - 1 \\ &= X^r\Big(1 + X^m + (X^m)^2 + \cdots + (X^m)^{q-1}\Big)(X^m - 1) + X^r - 1. \end{aligned}$$

Puisque $\deg(X^r - 1) \leq r < m$ (si $r \geq 1$ $\deg(X^r - 1) = r$ et si $r = 0$, $\deg(X^r - 1) = -\infty$), la division euclidienne est achevée. Le quotient est $Q = X^r\Big(1 + X^m + (X^m)^2 + \cdots + (X^m)^{q-1}\Big)$ et le reste est $R = X^r - 1$.

Exercice 4 (Arithmétique des polynômes) Étant donné des polynômes non constants A et B premiers entre eux, montrer qu'il existe un unique couple de polynômes (U_0, V_0) tel que :

$$AU_0 + BV_0 = 1 \quad \text{avec} \quad \deg(U_0) < \deg(B) \quad \text{et} \quad \deg(V_0) < \deg(A).$$

Solution :

— **Unicité :** Si (U_1, V_1) et (U_2, V_2) sont deux tels couples, on a :

$$(U_1 - U_2)A = (V_2 - V_1)B.$$

Le polynôme A divise donc $(V_2 - V_1)B$, et comme $A \wedge B = 1$, le théorème de Gauss entraîne $A \mid (V_2 - V_1)$. Or $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$. Donc $V_2 - V_1 = 0$. Ainsi $V_1 = V_2$ et par suite $U_1 = U_2$ puisque $A \neq 0$.

— **Existence :** Soit (U, V) un couple de coefficients de Bézout pour A et B. Notons Q le quotient de la division euclidienne de U par B. L'égalité $AU + BV = 1$ nous donne $A(U - QB) + B(V + QA) = 1$, donc

$$AU_0 + BV_0 = 1 \quad \text{avec} \quad U_0 = (U - QB) \quad \text{et} \quad V_0 = (V + QA).$$

Comme U_0 est le reste de la division euclidienne de U par B, on a $\deg U_0 < \deg B$. D'autre part, puisque B n'est pas constant, le polynôme U_0 ne peut pas être nul (sinon on aurait $BV_0 = 1$) et donc $\deg(AU_0) \geq 1$. Alors :

$$\deg(BV_0) = \deg(1 - AU_0) = \deg(AU_0),$$

ce qui donne $\deg V_0 = \deg A + \deg U_0 - \deg B < \deg A$.

Exercice 5 (Arithmétique des polynômes) Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A + B$ et AB le sont.

Solution : Si $A \wedge B = 1$ alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$. On a alors $A(U - V) + (A + B)V = 1$ donc $A \wedge (A + B) = 1$. De même, $B \wedge (A + B) = 1$ et, par produit, $AB \wedge (A + B) = 1$.

Réciproquement, si $AB \wedge (A + B) = 1$ alors, puisque $\text{pgcd}(A, B) \mid AB$ et $\text{pgcd}(A, B) \mid A + B$, on a $\text{pgcd}(A, B) \mid 1$ puis $A \wedge B = 1$.

Exercice 6 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\deg L_i = n-1 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \quad L_i(x_j) = \delta_i^j \quad \text{avec} \quad \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

2. Soit f une fonction d'une partie de $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathcal{I}$ distincts deux à deux, montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(x_i) = f(x_i).$$

P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé à la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le cas $n = 1$ est immédiat et on obtient alors le polynôme constant égal à 1. On suppose donc maintenant $n \geqslant 2$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Raisonnons par analyse-synthèse.
   — **Analyse :** Supposons qu'il existe un polynôme $L_i \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n-1$ vérifiant :
   $$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad L_i(x_j) = \delta_i^j.$$
   Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$, x_j est une racine de L_i. Ainsi L_i s'écrit sous la forme
   $$L_i = \lambda \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j)$$
   où λ est une constante déterminée par la valeur prise par L_i en x_i. En effet, de la relation
   $$L_i(x_i) = \lambda \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j),$$
   on tire $\lambda = \dfrac{1}{\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$. On en déduit que
   $$L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$
   Par suite il existe au plus un polynôme L_i répondant au problème.
   — **Synthèse :** Le polynôme L_i défini par $L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$ est tel que $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$. Par ailleurs, il est de degré $n-1$ comme produit de $n-1$ polynômes de degré 1. Donc, le polynôme L_i ainsi défini répond au problème.

2. — **Unicité :** Supposons qu'il existe P et Q de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(x_i) = f(x_i) \quad \text{et} \quad Q(x_i) = f(x_i).$$

Alors le polynôme $P - Q$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui admet pour racines les n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbb{K}$. Le polynôme $P - Q$ est donc nul. D'où l'unicité.

— **Existence :** Notons P le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j$. Alors P en tant que somme de polynômes de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) L_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \delta_i^j = f(x_i).$$

Donc, P convient.

Exercice 7 (Racines et arithmétique)

1. Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme $A = X^n + X + b$, $n \in \mathbb{N}^*$ par $B = (X-a)^2$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Trouver a et b réels tel que le polynôme $P = X^3 + aX + b$ admette le nombre $z = 1 + i$ comme racine.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère le polynôme P défini par $P = \alpha X^{n+1} + \beta X^n + 1$. Déterminer les réels α et β pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.
4. Déterminer $n \in \mathbb{N}$ pour que le polynôme $(X+1)^{2n+1} + X^{2n+2}$ soit divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$.
5. Soient m, n et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 8 (Factorisation)
On pose : $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer le degré de P.
2. Montrer que P est divisible par $(X-j)^2$, où j est le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. Déterminer deux racines évidentes entières de P, en précisant leurs multiplicité.
4. En déduire la factorisation irréductible de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution :

1. En appliquant la formule du Binôme, on obtient : $P = \sum_{k=0}^{7} C_7^k X^k - X^7 - 1 = \sum_{k=1}^{6} C_7^k X^k$. P est donc de degré 6, de coefficient dominant égal à $C_7^6 = 7$.
2. On a $P(j) = 0$. De même, on vérifie que $P'(j) = 0$. Donc j est une racine d'ordre au moins 2 de P. On en déduit que P est divisible par $(X-j)^2$. Par ailleurs, $P''(j) = 42 \neq 0$. Ainsi, le nombre complexe j est une racine de P de multiplicité 2.
3. Les nombres 0 et -1 sont des racines simples évidentes de P.

4. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{j} = j^2$ en est également une racine de multiplicité 2. Le polynôme P est donc divisible par $Q = X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2 = X(X+1)(X^2+X+1)^2$. Puisque Q est unitaire de degré 6 et qu'il divisise P, alors, dans $\mathbb{R}[X]$, on a : $P = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$.

Exercice 9 (Factorisation)
On considère le polynôme $P = X^5 - 1$.

1. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire les racines de $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$.
3. Décomposer Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire la valeur de $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $r_2 = \cos(\frac{4\pi}{5})$.

Solution :

1. Cherchons les racines de P dans $\mathbb{C}$, c-à-d les nombres complexes z tels que $z^5 - 1 = 0$. On a :
$$\begin{aligned} z^5 - 1 = 0 &\Leftrightarrow z^5 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \quad k \in \{0, \cdots, 4\}. \end{aligned}$$
D'où, dans $\mathbb{C}[X]$: $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$.
2. On a : $X^5 - 1 = (X-1)Q$. De plus, d'après la question 1, on a :
$$X^5 - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}).$$
Ainsi, après simplification :
$$Q = \prod_{k=1}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}}).$$
D'où, les racines de Q dans $\mathbb{C}$ sont :
$$e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ k \in \{1, \cdots, 4\}.$$
3. Dans $\mathbb{C}[X]$, on a : $Q = \prod_{k=1}^{4}(X - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$. Or $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}}$ sont conjugués ainsi que $e^{i\frac{4\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Donc, dans $\mathbb{R}[X]$, on a :
$$\begin{aligned} Q &= (X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{i\frac{8\pi}{5}})(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{i\frac{6\pi}{5}}) \\ &= (X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X + 1). \end{aligned}$$
► En général, pour trouver la factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ à partir de sa factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$, on regroupe les racines non réelles du polynôme par paires de conjugués $(a, \bar{a})$ afin d'obtenir un polynôme à coefficients réels $(X-a)(X-\bar{a}) = X^2 - 2Re(a)X + |a|^2$.

4. Posons $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $r_2 = \cos(\frac{4\pi}{5})$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} Q &= (X^2 - 2r_1X + 1)(X^2 - 2r_2X + 1) \\ &= X^4 + (-2r_1 - 2r_2)X^3 + (2 + 4r_1r_2)X^2 + (-2r_1 - 2r_2)X + 1. \end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients et donc :

$$\begin{cases} -2r_1 - 2r_2 &= 1 \\ 2 + 4r_1r_2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 &= -\frac{1}{2} & (\clubsuit) \\ r_1r_2 &= -\frac{1}{4} & (\spadesuit). \end{cases}$$

($\clubsuit$) donne : $r_2 = -\frac{1}{2} - r_1$. Ensuite, en injectant l'expression de r_2 dans ($\spadesuit$), on trouve :

$$r_1^2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{4} = 0.$$

Donc :

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, alors $r_1 = \cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Donc $r_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et par suite $r_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 10 (Décomposition en éléments simples)
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

1. $\frac{X^5}{X^4-1}$.
2. $\frac{X}{(X^2+X+1)(X+1)^3}$.

Solution :

1. — **Recherche de la partie entière** : Commençons par chercher la partie entière de $\frac{X^5}{X^4-1}$, ce qui revient à chercher le quotient de la division euclidienne de X^5 par $X^4 - 1$. Cette division s'écrit : $X^5 = X(X^4 - 1) + X$, donc X est la partie entière cherchée.
   — **Forme de la décomposition en éléments simples** : Pour obtenir la forme de la DES de la fraction F dans $\mathbb{C}(X)$, on commence par factoriser le dénominateur $X^4 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Or, dans $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i).$$

   Du coup, la décomposition en éléments simples de $\frac{X^5}{X^4-1}$ est :

$$\frac{X^5}{X^4 - 1} = \frac{X^5}{(X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)} = X + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{X + i}, \quad \bigstar$$

   où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sont à déterminer.

— **Prise en compte de l'imparité** : On a :

$$\begin{aligned} F(X) = -F(-X) &= -\Big[-X + \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{c}{-X-i} + \frac{d}{-X+i}\Big] \\ &= X + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{X-i}. \end{aligned}$$

Ceci est une "nouvelle" décomposition de F en éléments simples. Une telle décomposition étant unique, nous obtenons par identification des coefficients : $b = a$ et $c = d$.

— **Calcul de** a : Multiplions ★ par $X-1$:

$$\frac{X^5}{(X+1)(X^2+1)} = X(X-1) + a + (X-1)\Big[\frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}\Big],$$

puis évaluons en 1, pour obtenir : $a = \frac{1}{4}$.

— **Calcul de** c : Multiplions ★ par $X-i$:

$$\frac{X^5}{(X^2-1)(X+i)} = X(X-i) + c + (X-i)\Big[\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{d}{X+i}\Big],$$

puis évaluons en i, pour obtenir : $c = -\frac{1}{4}$.

— **Conclusion** : Finalement, on obtient :

$$\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}\Big].$$

2. — **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg F < 0$, la partie entière est nulle.

— **Forme de la décomposition en éléments simples** : Pour obtenir la forme de la DES de la fraction F dans $\mathbb{C}(X)$, on commence par factoriser le dénominateur $(X^2+X+1)(X+1)^3$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Or, dans $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$(X^2+X+1)(X+1)^3 = (X-j)(X-j^2)(X+1)^3.$$

Du coup, la décomposition cherchée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{X}{(X^2+X+1)(X+1)^3} &= \frac{X}{(X-j)(X-j^2)(X+1)^3} \\ &= \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-j^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X+1}, \quad \bigstar \end{aligned}$$

où $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ sont à déterminer.

— **Utilisation de la conjugaison** : Conjuguons ★ :

$$F(X) = \overline{F(X)} = \frac{\bar{a}}{X-j^2} + \frac{\bar{b}}{X-j} + \frac{\bar{c}}{(X+1)^3} + \frac{\bar{d}}{(X+1)^2} + \frac{\bar{e}}{X+1}$$

Ceci est une "nouvelle" décomposition de F en éléments simples. Une telle décomposition étant unique, nous obtenons par identification des coefficients : $b = \bar{a}$.

— **Calcul de** a : Multiplions ★ par $X-j$, puis évaluons en j pour obtenir : $a = \frac{j}{(j-j^2)(j+1)^3} = \frac{ij}{\sqrt{3}}$.

— **Calcul de** c : Multiplions ★ par $(X+1)^3$, puis évaluons en -1, pour obtenir : $c = -1$.

— **Utilisation du comportement en** ∞ : Pour calculer d et e, nous ne pouvons plus multiplier par $(X+1)^2$ et $(X+1)$ respectivement puis évaluer en -1, car le membre de gauche aura alors un pôle en -1. Pour trouver des équations faisant intervenir d et e, une solution consiste à multiplier par une puissance de X, à évaluer ensuite en $x \in \mathbb{R}$ quelconque, puis à faire tendre x vers ∞.
Ici, multiplions ★ par X :

$$\frac{X^2}{(X^2+X+1)(X+1)^3} = \frac{aX}{X-j} + \frac{bX}{X-j^2} + \frac{cX}{(X+1)^3} + \frac{dX}{(X+1)^2} + \frac{eX}{X+1},$$

puis évaluons en $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x+1)^3} = \frac{ax}{x-j} + \frac{bx}{x-j^2} + \frac{cx}{(x+1)^3} + \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{ex}{x+1},$$

et enfin faisons tendre x vers $+\infty$ pour obtenir : $0 = a + b + e$. Par conséquent : $e = -a - b = -a - \bar{a} = -2Re(a) = 1$.
► **Remarque** : Il n'est pas correct de "faire tendre X vers ∞" car X est un polynôme et non un nombre.

— **Calcul de** d : Nous ne pouvons pas utiliser la technique précédente pour calculer d, car nous devrions pour cela multiplier par X^2, et certains termes à droite auraient alors une limite infinie. Evaluons simplement ★ en 0, pour obtenir : $0 = \frac{a}{-j} + \frac{b}{-j^2} + c + d + e$. Ainsi, sachant que $a = \frac{ij}{\sqrt{3}}$: $d = (\frac{a}{j} + \frac{\bar{a}}{j^2}) - c - e = -c - e = 0$.

— **Conclusion** : Finalement, on obtient :

$$\frac{X}{(X^2+X+1)(X+1)^3} = \frac{i}{\sqrt{3}}\left(\frac{j}{X-j} - \frac{j^2}{X-j^2}\right) - \frac{1}{(X+1)^3} + \frac{1}{X+1}.$$

Exercice 11 (Décomposition en éléments simples)
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles F suivantes :

1. $\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$.
2. $\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)}$.
3. $\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)}$.

Solution :

1. — Forme de la décomposition en éléments simples : La partie entière est nulle, donc pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} \quad ★.$$

— Calcul de a : On multiplie ★ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1 pour obtenir : $a = 2$.

— Calcul de c : On recommence. On multiplie $\bigstar$ par $X+2$ puis on évalue en -2 pour obtenir : $c = 1$.
— Calcul de b : On ne peut malheureusement pas reproduire le raisonnement précédent pour calculer b. Multiplier $\bigstar$ par $X+1$ puis évaluer en -1 nous conduirait en effet à diviser par 0 à cause du terme $(X+1)^2$. Cependant, plusieurs approches sont envisageables, **AU CHOIX** :
  — On peut multiplier $\bigstar$ par X puis passer à la limite en $+\infty$ pour obtenir : $0 = 0+b+c$, donc : $b = -c = -1$. On obtient généralement ainsi une équation simple et agréable.
  — On peut évaluer $\bigstar$ en un point, par exemple en 0 pour obtenir : $\frac{3}{2} = a+b+\frac{c}{2}$, ce qui donne aussi : $b = -1$. Les équations qu'on obtient en évaluant en un point sont souvent un peu plus compliquées que celles qu'on obtient en passant à la limite en $+\infty$.
— Conclusion : Finalement, on obtient :

$$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)} = \frac{2}{(X+1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{X+2}.$$

2. — Partie entière : La division euclidienne de X^4 par $(X+3)(X^2+X+3)$ s'écrit :

$$X^4 = (X+3)(X^2+X+3)(X-4) + 10X^2 + 15X + 36,$$

donc la partie entière cherchée vaut $X-4$.
— Forme de la décomposition en éléments simples : Pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)} = X - 4 + \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3}.$$

En tenant compte de la division euclidienne calculée juste avant, on peut aussi dire que :

$$\frac{10X^2+15X+36}{(X+3)(X^2+X+3)} = \frac{a}{X+3} + \frac{bX+c}{X^2+X+3} \quad \bigstar.$$

► Il est toujours plus facile de calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples quand la partie entière est nulle.
— Calcul de a : On multiplie $\bigstar$ par $X+3$ puis on évalue en -3 pour obtenir : $a = 9$.
— Calcul de b : On multiplie $\bigstar$ par X puis on passe à la limite en $+\infty$ pour obtenir : $10 = a + b$ et donc $b = 1$.
— Calcul de c : On peut évaluer $\bigstar$ par exemple en 0 pour obtenir : $4 = \frac{a}{3} + \frac{c}{3}$ et donc : $c = 12 - a = 3$.
— Conclusion : Finalement, on obtient :

$$\frac{X^4}{(X+3)(X^2+X+3)} = X - 4 + \frac{9}{X+3} + \frac{X+3}{X^2+X+3}.$$

3. — Forme de la décomposition en éléments simples : La partie entière est nulle, donc pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+4} \quad \bigstar.$$

— Calcul de a : On multiplie ★ par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 pour obtenir : $a=\frac{1}{5}$.
— Calcul de c et d : Le polynôme X^2+4 admet $2i$ et $-2i$ pour racines. On multiplie ★ par X^2+4 puis on évalue en $2i$ pour obtenir : $2ic+d=\frac{1}{(2i-1)^2}=\frac{1}{-3-4i}=\frac{-3+4i}{25}$. Or c et d sont des RÉELS, donc par identification des parties réelles et imaginaires : $c=\frac{2}{25}$ et $d=-\frac{3}{25}$.
— Calcul de b : On multiplie ★ par X puis on passe à la limite en $+\infty$ pour obtenir : $0=b+c$ et donc $b=-c=-\frac{2}{25}$.
— Conclusion : Finalement, on obtient :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X^2+4)}=\frac{1}{5(X-1)^2}-\frac{2}{25(X-1)}+\frac{2X-3}{25(X^2+4)}.$$

Exercice 12 (Décomposition en éléments simples)
Soit $F=\frac{1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tels que :

$$\frac{1}{\left(X^2+1\right)\left(X^2+X+1\right)}=\frac{\alpha}{X-i}+\frac{\bar{\alpha}}{X+i}+\frac{\beta}{X-j}+\frac{\bar{\beta}}{X-j^2}$$

2. Déterminer les valeurs de α et β.
3. Donner alors la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de F.
4. Retrouver directement cette décomposition sur $\mathbb{R}$ (sans passer par celle sur $\mathbb{C}$).
   Indication : on pourra multiplier par X^2+1 et substituer i à X, puis multiplier par X^2+X+1 et substituer $j=\exp(2i\pi/3)$ à X.

Solution :

1. Remarquons que $F\in\mathbb{R}[X]$, que la partie entière vaut 0 et que les pôles sont : i, $-i, j$ et j^2, tous d'ordre de multiplicité 1. On rappelle que $1+j+j^2=0, j^3=1$ et $j^2=\bar{j}$. En vertu de ce qui précède, il existe alors des complexes α et β tels que :

$$\frac{1}{\left(X^2+1\right)\left(X^2+X+1\right)}=\frac{\alpha}{X-i}+\frac{\bar{\alpha}}{X+i}+\frac{\beta}{X-j}+\frac{\bar{\beta}}{X-j^2}.$$

2. On évalue $(X-i)F(X)=\frac{1}{(X^2+X+1)(X+i)}$ en i et on trouve $\alpha=-\frac{1}{2}$. Pour β, on évalue $(X-j)F(X)=\frac{1}{(X^2+1)(X-j^2)}$ en j. Le dénominateur est alors :

$$\left(j^2+1\right)\left(j-j^2\right)=(-j)j(1-j)=j^2(j-1)=1-j^2.$$

   On en déduit que $\beta=\frac{1}{1-j^2}=\frac{1-j}{3}$.

3. On a donc $F=-\frac{1}{2(X-i)}-\frac{1}{2(X+i)}+\frac{1-j}{3(X-j)}+\frac{1-j^2}{3(X-j^2)}$. En regroupant les termes deux à deux conjugués, on obtient :

$$F=-\frac{X}{X^2+1}+\frac{X+1}{X^2+X+1}.$$

4. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de F s'écrit :

$$F = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \quad \text{avec} \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

En multipliant par X^2+1, on obtient :

$$\frac{1}{X^2+X+1} = aX+b+\left(X^2+1\right)\frac{cX+d}{X^2+X+1},$$

ce qui, en évaluant en i, donne $ai+b = \frac{1}{i} = -i$ et donc $a=-1$ et $b=0$ puisque a et b sont réels. De même, en multipliant par X^2+X+1, on obtient :

$$\frac{1}{X^2+1} = cX+d+\left(X^2+X+1\right)\frac{aX+b}{X^2+1}$$

et en évaluant en j, on obtient :

$$cj+d = \frac{1}{j^2+1} = \frac{1}{-j} = -j^2 = j+1.$$

Puisque j n'est pas réel, on en déduit $c=1$ et $d=1$.

Exercice 13 (Décomposition en éléments simples)
Soit $P = X^8+X^6+2X^5+2X^3+X^2+1$.

1. Vérifier que -1 et $-j$ sont des racines de P. Déterminer leur ordre de multiplicité.
2. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $G = \frac{(X^2-X+1)^2}{P}$. Décomposer G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Solution :

1. On vérifie que $P(-1) = P'(-1) = 0$ et $P''(-1) = 20 \neq 0$. Donc, -1 est une racine de P de multiplicité égale à 2. De plus, on a : $P(-j) = P'(-j) = 0$ et $P''(-j) = 2+18j \neq 0$. Donc, $-j$ est une racine de P de multiplicité égale à 2.
2. D'après la question 1, on a P est divisible par $(X+1)^2(X+j)^2$. Or, comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et $-j$ est une racine de P de multiplicité 2, alors $-j^2$ est aussi racine de P de multiplicité 2. Ainsi, P est divisible par

$$Q := (X+1)^2(X+j)^2(X+j^2)^2 = (X+1)^2(X^2-X+1)^2 = X^6+2X^3+1.$$

En effectuant la division euclidienne de P par Q, on obtient :

$$P = (X^2+1)(X^6+2X^3+1).$$

D'où, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = (X^2+1)(X+1)^2(X^2-X+1)^2$$

et dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = (X+i)(X-i)(X+1)^2(X+j)^2(X+j^2)^2.$$

3. Soit $G = \frac{(X^2-X+1)^2}{P} = \frac{1}{(X^2+1)(X+1)^2}$.
   — **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg G < 0$, alors la partie entière est nulle.
   — **Forme de la décomposition en éléments simple dans** $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :
   $$G = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1} \quad (\bigstar)$$
   où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
   — **Calcul de** a : On multiplie $\bigstar$ par $(X+1)^2$ puis on évalue en -1, pour obtenir : $a = \frac{1}{2}$.
   — **Calcul de** c **et** d : Le polynôme X^2+1 admet i et $-i$ pour racines. On multiplie $\bigstar$ par X^2+1 puis on évalue en i, pour obtenir : $ci + d = \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$. Or, c et d sont des réels, donc par identification des parties réelles et imaginaires : $c = -\frac{1}{2}$ et $d = 0$.
   — **Calcul de** b : On évalue par exemple $\bigstar$ en 0 pour obtenir : $a+b+d = 1$ et par suite $b = \frac{1}{2}$.
   — **Conclusion** : Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :
   $$G = \frac{1}{2}\frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}.$$

Exercice 14 (Décomposition en éléments simples)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction (mise sous forme irréductible) $F_n = \frac{P}{X^n-1}$ où P est un polynôme de degré $\leq n-1$.
2. Application : Utiliser le résultat précédent pour décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ puis $\mathbb{R}(X)$ la fraction : $G = \frac{X^2}{X^3-1}$.

Solution :

1. Comme $\deg F_n < 0$, la partie entière est nulle. Pour trouver la forme de la décomposition en éléments simple de F_n dans $\mathbb{C}(X)$, on commence d'abord par factoriser le dénominateur dans $C[X]$. Or, on sait que dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k),$$
   où $z_k := e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Donc : $F_n = \frac{P}{\prod_{k=0}^{n-1}(X-z_k)}$ et la décomposition cherchée s'écrit donc :
   $$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - z_k},$$
   où les $\lambda_k \in \mathbb{C}$ sont à déterminer. Posons $Q = X^n - 1$. Alors, d'après le cours, on a : $\lambda_k = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{P(z_k)}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n}z_k P(z_k)$. Donc :
   $$F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k P(z_k)}{X - z_k}.$$

2. Application : On a

$$G = \frac{X^2}{X^3 - 1} = \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda_k}{X - z_k},$$

avec $\lambda_k = \frac{1}{3} z_k^3 = \frac{1}{3}$, où $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$. D'où, dans $\mathbb{C}(X)$:

$$G = \sum_{k=0}^{2} \frac{1/3}{X - e^{\frac{2ik\pi}{3}}} = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-j} + \frac{1}{X-j^2}\Big].$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, on regroupe les fractions conjuguées que l'on réduit au même dénominateur, pour obtenir finalement :

$$G = \frac{1}{3}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}.$$

Exercice 15 (Applications de la décomposition en éléments simples)

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction : $F = \frac{X}{1+X^2+X^4}$.
2. En déduire la somme : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{1+p^2+p^4}$.

Solution :

1. — Calcul de la partie entière : Comme $\deg F < 0$, la partie entière est nulle.
   — Factorisation irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur : On a, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 \\ &= (X^2+1)^2 - X^2 \\ &= (X^2+X+1)(X^2-X+1). \end{aligned}$$

   Donc $F = \frac{X}{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$.
   — Forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :

$$F = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{cX+d}{X^2-X+1} \quad \bigstar.$$

   — On calcule a et b en multipliant $\bigstar$ par X^2+X+1, puis en évaluons en j. On obtient : $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$.
   — On calcule c et d en multipliant $\bigstar$ par X^2-X+1, puis en évaluons en $-j$. On obtient : $c = 0$ et $d = \frac{1}{2}$.

   Finalement,

$$F = -\frac{1}{2}\frac{1}{X^2+X+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{X^2-X+1}.$$

2. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\frac{p}{1+p^2+p^4} = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2-p+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+p+1}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2-p+1}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2+p+1}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(p+1)^2-(p+1)+1}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2+p+1}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2+p+1}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[1+\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1}-\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2+p+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\Big]\\
&= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n^2+n+1})=\frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}.
\end{aligned}$$

CHAPITRE 3

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1 (Opérations sur les sous-espaces vectoriels)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Solution :
Si par exemple $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ qui est un s.e.v. Réciproquement, suppopsons que $F \cup G$ est un s.e.v de E et montrons que $F \subset G$ ou $G \subset F$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$, de sorte qu'il existe $x \in F$, $x \notin G$, et il existe $y \in G$, $y \notin F$. Le vecteur $x + y$ est dans le s.e.v $F \cup G$, donc $x + y \in F$ ou $x + y \in G$. Supposons par exemple $x + y \in F$. Comme F est un s.e.v et que $x \in F$, on a $(x + y) - x \in F$, c'est-à-dire $y \in F$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exercice 2 (Familles de vecteurs)
Soit $(u_1, \cdots, u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Établir que, si la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre et que u_{n+1} n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$, alors $(u_1, \cdots, u_n, u_{n+1})$ est libre.
2. Établir que, si la famille $(u_1, \cdots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice de E et que u_{n+1} est élément de $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$, alors $(u_1, \cdots, u_n)$ est génératrice de E.

Exercice 3 (Familles de vecteurs)
Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille libre de vecteurs d'un espace réel E.
Établir que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \cdots, e_p + a)$ est libre.

Solution :
Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$. Supposons

$$\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E.$$

Alors, on a
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)a \quad (1)$$
et donc nécessairement $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0$, (car sinon $a = -\dfrac{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p} \in$ $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$).

La relation (1) devient alors
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E.$$
On en déduit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ car la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre.

Exercice 4 (Familles infinies de vecteurs)
Montrer que dans le $\mathbb{R}$-e.v des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les familles de fonctions suivantes sont des familles libres :

1. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto e^{\lambda x}$.
2. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$où $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \cos(\lambda x)$.
3. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto |x - \lambda|$.

Solution :

1. Supposons cette famille liée, de sorte qu'il existe $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $(\mu_i))_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i f_{\lambda_i} = 0$ avec les μ_i non tous nuls. Quitte à retirer des termes, on peut supposer $\mu_i \neq 0$ pour tout i. Quitte à réordonner des termes, on peut même supposer $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$. On a
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda_1 x}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i e^{\lambda_i x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{i=1}^n \mu_i e^{(\lambda_i-\lambda_1)x} = \mu_1$$
car pour $i \geq 2, \lambda_i - \lambda_1 < 0$. Or $\sum_i \mu_i f_{\lambda_i} = 0$, et cette limite est donc nulle, donc $\mu_1 = 0$, ce qui est contradictoire.
2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $\sum_{i=1}^n \mu_i f_{\lambda_i} = 0$ (avec les λ_i distincts dans $\mathbb{R}^+$), alors pour tout $i, \mu_i = 0$. Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons maintenant le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n. Si $\sum_{i=1}^n \mu_i f_{\lambda_i} = 0 \quad (*)$, les (λ_i) distincts dans $\mathbb{R}^+$, par double dérivation, on obtient $\sum_{i=1}^n \mu_i\left(-\lambda_i^2 f_{\lambda_i}\right) = 0 \quad (**)$. En multipliant l'égalité (*) par λ_n^2 et en l'ajoutant à $(**)$, on obtient $\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i\left(\lambda_i^2 - \lambda_n^2\right) f_{\lambda_i} = 0$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $1 \leq i \leq n-1, \mu_i\left(\lambda_i^2 - \lambda_n^2\right) = 0$. Les λ_i étant positifs et distincts, on en déduit $\mu_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Donc d'après $(*)$, $\mu_n f_{\lambda_n} = 0$, d'où $\mu_n = 0$. Finalement on a montré $\mu_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.
3. Supposons la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ liée. Alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que f_{λ_0} s'écrive comme une combinaison linéaire des $(f_\lambda)_{\lambda\neq\lambda_0}$, autrement dit :
$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\setminus\{\lambda_0\}, \exists \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}, \quad f_{\lambda_0} = \sum_{i=1}^n \mu_i f_{\lambda_i}.$$
Or pour tout $i \geq 1, \lambda_i \neq \lambda_0$ donc f_{λ_i} est dérivable au point λ_0 (l'application $x \mapsto |x-\lambda|$ est dérivable partout sauf en λ), d'où on tire que $\sum_{i=1}^n \mu_i f_{\lambda_i}$ est dérivable en λ_0, ce qui est absurde car ceci égale f_{λ_0}. D'où le résultat.

Exercice 5 (Dimension d'un espace)
Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x).$$

1. Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de E et sa dimension.

Solution :

1. On peut percevoir $E = \text{Vect}\,(f_0, f_1, f_2)$ avec $f_0(x) = \cos(x), f_1(x) = x\cos(x)$ et $f_2(x) = x^2\cos(x)$. L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel et (f_0, f_1, f_2) en est une famille génératrice.
2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2 = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\left(\alpha + \beta x + \gamma x^2\right)\cos(x) = 0.$$

   Pour $x = 2n\pi$, on obtient $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par l'absurde, si $\gamma \neq 0$ alors $\alpha + 2n\pi\beta + 4n^2\pi^2\gamma \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$. C'est exclu. Nécessairement $\gamma = 0$. On a alors $\alpha + 2n\pi\beta = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, puis $n = 1$, on obtient successivement $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Finalement, (f_0, f_1, f_2) est une famille libre. C'est donc une base de E et $\dim E = 3$.

Exercice 6 (Dimension d'un espace)
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Montrer que la famille $(f_0, \cdots, f_n)$ est libre.
2. En déduire la dimension de E.

Solution :

1. Supposons $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = 0.$$

   Si $\lambda_n \neq 0$ alors

   $$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

   C'est absurde. Nécessairement, $\lambda_n = 0$ puis, de même, $\lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_0 = 0$. Finalement, la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.
2. Par suite, $n + 1 \leq \dim E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace E est de dimension infinie.

Exercice 7 (Dimension d'un espace)
Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère F la partie de E constituée des applications de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) \text{ avec } P, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

1. Montrer que F un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim F$.

Solution :

1. $F \subset E$ et la fonction nulle appartient à F (en prenant $P = Q = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$). Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut écrire $f(x) = P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x)$ et $g(x) = P'(x)\sin(x) + Q'(x)\cos(x)$ avec $P, Q, P', Q' \in \mathbb{R}_n[X]$. On a alors $\lambda f + g = (\lambda P + P')(x)\sin(x) + (\lambda Q + Q')(x)\cos(x)$ avec $\lambda P + P', \lambda Q + Q' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\lambda f + g \in F$ et finalement F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Posons $f_k(x) = x^k \sin(x)$ et $g_k(x) = x^k \cos(x)$ avec $k \in 0, \cdots, n$. Les fonctions $f_0, \cdots, f_n, g_0, \cdots, g_n$ sont des fonctions de F formant clairement une famille génératrice. Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n + \mu_0 g_0 + \cdots + \mu_n g_n = 0.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$(\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n)\sin(x) + (\mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n)\cos(x) = 0.$$
Pour $x = \pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient une infinité de racine au polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$. Cela permet d'affirmer
$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$
Pour $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut affirmer $\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$. On conclut que $(f_0, \cdots, f_n, g_0, \cdots, g_n)$ est libre et donc une base de F puis $\dim F = 2(n+1)$.

Exercice 8 (Lemme d'échange)
Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \cdots, e_{n-1}, \epsilon_j)$ soit encore une base de E.

Solution :
Raisonnons par l'absurde et supposons la famille $(e_1, \cdots, e_{n-1}, \epsilon_j)$ liée pour chaque $j \in \{1, \cdots, n\}$. Puisque la sous-famille $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ est libre, le vecteur ϵ_j est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_{n-1}$ et donc
$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \epsilon_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1}).$$
Cela entraîne
$$e_n \in E = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1}),$$
ce qui est absurde.

Exercice 9 (Polynômes de degrés étagés)
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Établir que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 10 (Polynômes de Lagrange)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$:
$$L_i = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans cette base.

Solution :

1. — D'abord, il est clair que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, L_i existe et $L_i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
   — Montrons que $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$. Soit $k \in [\![1; n]\!]$ fixé. On a :
   $$0 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i\right)(x_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i\,(x_k)\,.$$
   Or, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $L_i = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$, donc :
   $$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad L_i\,(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}$$
   D'où :
   $$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i\,(x_k) = \lambda_k.$$
   Ceci montre que $\mathcal{L}$ est libre.
   — Comme $\mathcal{L}$ est libre et $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$, on conclut : $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et cherchons $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que
   $$P = \sum_{i=1}^n a_i L_i.$$
   Soit $j \in [\![1; n]\!]$. En évaluant l'égalité ci-dessus en x_j, on obtient
   $$P(x_j) = a_j \quad \forall j \in [\![1; n]\!].$$
   Ainsi, on a prouvé que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $P = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i$.

Exercice 11
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Exprimer $1, X, \cdots, X^n$ dans la base précédente.

Solution :

1. Commençons par souligner que les polynômes P_k sont tous de degré n : ils appartiennent bien à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, ceux-ci sont au nombre de $n + 1$ avec $n + 1$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc d'établir que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre pour conclure que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Supposons $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$ avec $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ réels, c'est-à-dire
   $$\lambda_0(1 - X)^n + \lambda_1 X(1 - X)^{n-1} + \cdots + \lambda_n X^n = 0.$$

En évaluant en 0 cette identité polynomiale, on obtient immédiatement $\lambda_0 = 0$. La relation (1) peut alors être simplifiée par X ce qui donne

$$\lambda_1(1-X)^{n-1} + \lambda_2 X(1-X)^{n-2} + \cdots + \lambda_n X^{n-1} = 0 \quad (\star)$$

On évalue à nouveau $(\star)$ en 0 pour obtenir $\lambda_1 = 0$ et encore simplifier par X, etc. Ainsi, on obtient successivement $\lambda_i = 0$ pour tout indice i allant de 0 jusqu'à n : on peut conclure que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour $k \in [\![0; n]\!]$, on écrit

$$\begin{aligned} X^k &= X^k(X + (1-X))^{n-k} \\ &= X^k \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j X^j (1-X)^{n-k-j} = \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j P_{k+j} \end{aligned}$$

Exercice 12 (Bases en dimension finie)
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\} \\ G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \quad \text{et} \quad b = 2c\}. \end{aligned}$$

Donner une base de F, de G et de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Solution :

— Commençons par chercher une famille génératrice de F. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = 2c - d\} \\ &= \{(a, 2c-d, c, d) \mid a, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,0,0,0) + c(0,2,1,0) + d(0,-1,0,1) \mid a,c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\Big(\overbrace{(1,0,0,0)}^{u_1}, \overbrace{(0,2,1,0)}^{u_2}, \overbrace{(0,-1,0,1)}^{u_3}\Big). \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est donc une famille génératrice de F. On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de F.

— Pour G, on a :

$$\begin{aligned} G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \quad \text{et} \quad b = 2c\} \\ &= \{(d, 2c, c, d) \mid c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(0,2,1,0) + d(1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(u_1', u_2'), \end{aligned}$$

où : $u_1' = (0,2,1,0)$ et $u_2' = (1,0,0,1)$. Donc, la famille $\mathcal{B}' = (u_1', u_2')$ est donc une famille génératrice de G. Comme u_1' et u_2' ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{B}'$ est libre. C'est donc une base de G.

— Pour $F \cap G$, on écrit :

$$(a,b,c,d) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} a &= d \\ b &= 2c \\ d &= -b + 2c = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d, b = 2c \quad \text{et} \quad d = 0\} \\ &= \{(0,2c,c,0) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c\overbrace{(0,2,1,0)}^{u} \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u). \end{aligned}$$

Donc $F \cap G$ est engendré par le vecteur u. De plus, comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, alors la famille $\mathcal{B}'' = (u)$ est libre. C'est donc une base de $F \cap G$.

— Tout d'abord, on a : $F + G \subset \mathbb{R}^4$. D'autre part, d'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Ainsi : $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 13 (Espaces supplémentaires)
On considère les deux ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{(x+y, x-y, 2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}; \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \,\text{et}\, y = 3z\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Solution :

1. On a :
   — $A = \mathrm{Vect}\Big((1,1,0),(1,-1,2)\Big)$ est un plan vectoriel.
   — $B = \mathrm{Vect}\Big((\frac{1}{2},1,\frac{1}{3})\Big) = \mathrm{Vect}\Big((3,6,2)\Big)$ est une droite vectorielle.
2. Montrons maintenant que A et B sont supplémentaires :
   — $A \cap B = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car si on considère $u \in A \cap B$, alors,

$$\begin{aligned} &u \in A \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : u = (x+y, x-y, 2y) \\ &u \in B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2(x+y) & = x - y, \\ x - y & = 6y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + 3y & = 0, \\ x - 7y & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

   Donc $u = (0,0,0)$.
   — $\dim A + \dim B = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
   Nous avons ainsi démontré que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 14
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + y + z - t = 0\} \\ G &= \mathrm{Vect}\Big((1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5)\Big). \end{aligned}$$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$.

3. Déterminer un supplémentaire de F.

Solution :

1. On va déterminer une base de F. Pour cela, commençons par chercher une famille génératrice de F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y+z-t=0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z=-x-y \quad \text{et} \quad t=x\} \\ &= \{(x,y,-x-y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\overbrace{(1,0,-1,1)}^{u_1}+y\overbrace{(0,1,-1,0)}^{u_2} \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u_1,u_2). \end{aligned}$$

   Ainsi : (u_1,u_2) est une famille génératrice de F. De plus, comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, alors (u_1,u_2) est libre. C'est donc une base de F et on a : $\dim F = 2$.

2. Comme : $(1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5) \in F$, alors : $G \subset F$. Ainsi : $\dim G \leq \dim F = 2$. Or, les deux vecteurs $(1,-2,1,1)$ et $(1,2,-3,1)$ ne sont pas colinéaires, alors : $2 \leq \dim G \leq 2$ et donc $\dim G = \dim F = 2$. En résumé : $\begin{cases} G \subset F \quad \text{et} \\ \dim G = \dim F = 2. \end{cases}$ D'où : $F = G$.

3. En utilisant le théorème de la base incomplète, on va trouver deux vecteurs u_3 et u_4 de sorte que (u_1,u_2,u_3,u_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$. Ensuite, par le théorème de la base adaptée, $H = \mathrm{Vect}(u_3,u_4)$ sera un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on peut choisir les vecteurs u_3 et u_4 parmi les vecteurs de la base canonique. On vérifie facilement ici que $u_3 = \overbrace{(1,0,0,0)}^{e_1}$ et $u_4 = \overbrace{(0,0,0,1)}^{e_4}$ convient. Donc : $H = \mathrm{Vect}(e_1,e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 15
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2y=x+z\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer la dimension de F, puis la dimension de G.
2. Calculer $F \cap G$. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Solution :

1. — Pour déterminer la dimension de F, commençons par chercher une base de F. On a :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y+2z\} \\ &= \{(y+2z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0)+z(2,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u_1,u_2), \end{aligned}$$

où : $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (2,0,1)$. Ainsi : (u_1, u_2) est une famille génératrice de F. De plus, comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, alors : (u_1, u_2) est libre. C'est donc une base de F et $\dim F = 2$.

— Pour G, on a :

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = x+z\} \\ &= \{(2y,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(u_3), \end{aligned}$$

où : $u_3 = (2,1,0)$. Ainsi : (u_3) est une famille génératrice de G. De plus, comme $u_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors : (u_3) est libre. C'est donc une base de G et $\dim G = 1$.

2. Pour $F \cap G$, on écrit :

$$(x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z &= 0 \\ x &= 2y \\ z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Ainsi : $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. De plus, on a :

$$\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

D'où : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 16

Soit : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X+1) = P(1-X)\}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(X, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution :

— Nous avons besoin d'abord d'une base de F. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = a(1-X)^3 + b(1-X)^2 + c(1-X) + d \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -a \\ 3a + b &= 3a + b \\ 3a + 2b + c &= -3a - 2b - c \\ a + b + c + d &= a + b + c + d \end{cases} \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad 2b + c = 0. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que $(1, X^2 - 2X)$ engendre F. Cette famille étant libre, c'est une base de F.

— Complétons-la en une base $(1, X^2 - 2X, X, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Par le théorème de la base adaptée, on en déduit que : $\mathrm{Vect}(X, X^3)$ est UN supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 17

$E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
2. Montrer que $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Solution :

1. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$. On a :

$$P \in F \Leftrightarrow P(0) = P'(0) = P'(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e & = 0 \\ d & = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P = aX^4 + bX^3 - \frac{1}{2}(4a + 3b)X^2 = a(X^4 - 2X^2) + b\Big(X^3 - \frac{3}{2}X^2\Big).$$

Donc $F = \text{Vect}\left(X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\right)$. Cette écriture de F justifie le fait que F est un espace vectoriel. De plus, la famille $\left(X^4 - 2X^2, X^3 - \frac{3}{2}X^2\right)$ engendre F et comme elle est étagée en degrés, elle est libre. C'est donc une base de F et on a : $\dim F = 2$.

2. Montrons que $\mathbb{R}_4[X] = F \oplus G$. Comme $\dim F + \dim G = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$, il reste simplement à montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Soit $P \in F \cap G$. Comme : $P \in G$ alors, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $P = a + bX + c(1 + X + X^2)$. De plus, on a : $P \in F$ et donc : $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$ et on trouve : $a = b = 0$ et $b + 3c = 0$. Ainsi : P est nul. D'où le résultat.

Exercice 18

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (i.e. $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (i.e. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Solution :

Tout d'abord, remarquons que $F \cap G = \{0_E\}$. En effet, soit $f \in F \cap G$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0.$$

Ainsi : $F \cap G \subset \{0_E\}$ et donc $F \cap G = \{0_E\}$. D'autre part, soit $f \in E$. Alors, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et}$$
$$i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

on vérifie facilement que :
- $f = p + i$;
- $p \in F$ et $i \in G$.

Ainsi, on a bien : $E = F + G$. Conclusion : $E = F \oplus G$.

Exercice 19

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}, \quad A = \mathrm{C}_E^F = \{g \in E \mid g(0) \neq 0\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Est-ce que A est un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que, pour toute $g \in A$, la droite vectorielle $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Solution :

1. — Il est clair que $F \subset E$ et que $0_E \in F$ (où on a noté 0_E l'application constante nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
   — Soient $f, h \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $(\lambda f + h)(0) = \lambda f(0) + h(0) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$, donc : $\lambda f + h \in F$. On conclut que F est sous-espace vectoriel de E.

   D'autre part, il est immédiat que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E, car $0_E \notin A$.
2. Soit $g \in A$ fixée.
   — Commençons par montrer que $F \cap \mathbb{R}g = \{0_E\}$, ou encore : $F \cap \mathbb{R}g \subset \{0_E\}$. Soit $\varphi \in F \cap \mathbb{R}g$. Alors, $\varphi(0) = 0$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \alpha g$. Ainsi, $\alpha g(0) = \varphi(0) = 0$ et comme $g(0) \neq 0$ alors : $\alpha = 0$ et donc : $\varphi = \alpha g = 0_E$. Ceci montre que : $F \cap \mathbb{R}g = \{0_E\}$.
   — On veut montrer que $E = F + \mathbb{R}g$. Soit $\varphi \in E$. Il s'agit donc de montrer que φ se décompose linéairement sur F et $\mathbb{R}g$, c-à-d qu'il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que : $\varphi = f + \alpha g$. Raisonnons par analyse-synthèse.
     — **Analyse** : Supposons qu'une telle décomposition existe, c-à-d qu'il existe $f \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que : $\varphi = f + \alpha g$. Alors : $\varphi(0) = f(0) + \alpha g(0) = \alpha g(0)$, donc : $\alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)}$, puis $f = \varphi - \alpha g = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g$.
     — **Synthèse** : Réciproquement, montrons que le couple (f, α) précédement trouvé convient. Notons donc $\alpha = \frac{\varphi(0)}{g(0)}$ et $f = \varphi - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g$. Alors, on a bien : $\varphi = f + \alpha g$ avec $f(0) = \varphi(0) - \frac{\varphi(0)}{g(0)} g(0) = 0$ et donc $f \in F$. Ceci montre que le couple (f, α) convient.

     On a ainsi montré que : $E = F + \mathbb{R}g$.

   Finalement : F et $\mathbb{R}g$ sont deux sous-epaces vectoriels supplémentaires dans E, ou encore : $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 20 (Image d'une famille de vecteurs)
Soient u une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E' et $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que : $u(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$.
2. On suppose la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ génératrice de E et l'application linéaire u surjective. Que dire de la famille image $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$?
3. On suppose la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ libre et l'application linéaire u injective. Montrer que la famille image $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre.

Exercice 21 (Application linéaire donnée par l'image d'une base)
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Soit (x, y, z) un vecteur de E. Calculer $u(x, y, z)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, u$.

3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On a : $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et donc par linéarité de u, on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) \\ &= x(-2e_1 + 2e_3) + 3ye_2 + z(-4e_1 + 4e_3) \\ &= (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} u &= \{(x, y, z) \in E \mid u(x, y, z) = 0_E\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid -2x - 4z = 0, 3y = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0\} \\ &= \{(-2z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\Big(\overbrace{(-2, 0, 1)}^{w}\Big). \end{aligned}$$

Donc la famille (w) engendre $\operatorname{Ker} u$. De plus, comme $w \neq 0_E$, alors la famille (w) est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} u$.
Remarque : $\operatorname{Ker} u$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Par ailleurs, comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimenion finie $E = \mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif.

3. On a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$. Ainsi, la famille $\mathcal{G} = \Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$ engendre $\operatorname{Im} u$. Or, d'après le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im} u = 3 - 1 = 2$. Du coup, il suffit d'extraire de $\mathcal{G}$ une famille libre à deux éléments. On vérifie immédiatement que $\Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$ est une telle famille. C'est donc une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Par le théorème de la base adaptée, il suffit de montrer que la famille obtenue par concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} u$ et d'une base de $\operatorname{Im} u$ constitue une base de E. Soit alors $\mathcal{B} = \Big((-2, 0, 1), (-2, 0, 2), (0, 3, 0)\Big)$ une telle famille. On vérifie facilement que c'est une famille libre et donc une base de E. D'où : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 22 (Applications linéaires dans un espace de polynômes)
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit u l'application de E dans E définie par :

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E. Montrons ensuite que u est linéaire. Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) + (1 - X)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P + Q + (1 - X)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda\Big(P + (1 - X)P'\Big) + \Big(Q + (1 - X)Q'\Big) \\ &= \lambda u(P) + u(Q). \end{aligned}$$

   u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E, alors on sait que :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\Big(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)\Big).$$

   Comme : $u(1) = 1,\ u(X) = 1,\ u(X^2) = -X^2 + 2X,\ u(X^3) = -2X^3 + 3X^2$, alors :

$$\mathrm{Vect}\Big(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)\Big) = \mathrm{Vect}\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big),$$

   c-à-d que $\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. De plus, c'est une famille qui est échelonnée en degré et donc c'est une famille libre.
   Ceci montre que $\Big(u(1), u(X^2), u(X^3)\Big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. On a :

$$u(P) = -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + c + d.$$

   Ainsi :

$$u(P) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a &=& 0 \\ 3a - b &=& 0 \\ 2b &=& 0 \\ c + d &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ c &=& c \\ d &=& -c \end{array}\right.$$

   Donc,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(u) &= \{P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E \mid u(P) = 0_E\} \\ &= \{c(X - 1) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(X - 1). \end{aligned}$$

   Ainsi, la famille $(X - 1)$ engendre $\mathrm{Ker}(u)$. On en déduit donc que $(X - 1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

4. La concaténation des bases de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment donc une base de E. Ceci montre que : $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

Exercice 23 (Autour des endomorphismes nilpotents)
Soit E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $p \geq 1$ tel que :

$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

L'entier p s'appelle alors l'indice de nilpotence de f.
On suppose dans la suite que f est un endomorphisme nilpotent d'indice p.

1. **(a)** f peut-il être bijectif ?
   (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.
   (c) Montrer que la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est libre.
   (d) En déduire que $f^n = 0$.
2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de f.
3. Montrer que $Id_E - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Solution :

1. **(a)** Supposons f bijective. Par composition d'applications bijectives, on aurait alors $0_{\mathcal{L}(E)} = f^p$ qui serait bijective. Or ce n'est pas le cas, l'application nulle n'étant pas bijective lorsque $\dim(E) = n > 0$. Ainsi, f n'est pas bijective.
   (b) Puisque $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.
   (c) Montrons que la famille $\Big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)\Big)$ est libre. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que la famille $\Big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)\Big)$ est liée. Ainsi, ils existent $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}$ non tous nuls tels que

   $$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0 \quad (\blacklozenge).$$

   Soit $q = \min\{0 \leq k \leq p-1 \mid \lambda_k \neq 0\}$. En composant $\blacklozenge$ par f^{p-1-q}, on obtient :

   $$f^{p-1-q}\Big(\lambda_q f^q(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0)\Big) = \lambda_q f^{p-1}(x) = 0, \quad \text{car} \quad f^j = 0, \forall j \geq p.$$

   Comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0$, on en déduit alors que : $\lambda_q = 0$. Contradiction.
   D'où, la famille $\Big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)\Big)$ est libre.
   (d) La famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ étant libre, son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de l'espace, soit $p \leq \dim(E) = n$. On en déduit que l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension, et donc que $f^n = 0$.
2. On a $f^i(x_0) \in \operatorname{Im}(f)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Donc $\big(f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une famille de $n-1$ vecteurs de $\operatorname{Im}(f)$, libre d'après la question 1.(c). Donc on a $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) \geq n-1$. D'autre part, f n'est pas bijective d'après la question 1.(a), donc $\operatorname{rg}(f) \leq n-1$. On peut donc conclure avec ces deux inégalités que $\operatorname{rg}(f) = n-1$.

3. Puisque les endomorphismes Id_E et f commutent, la formule de factorisation géométrique donne

$$Id_E = Id_E^n - f^n = (Id_E - f)(Id_E + f + \ldots + f^{n-1}).$$

On en déduit que l'endomorphisme $(Id_E - f)$ est bien un inversible et on a : $(Id_E - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

Exercice 24 (Rang d'une application linéaire)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et u et v deux applications linéaires de E dans F. Montrer que : $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

Solution :
Par définition, on a : $\operatorname{rg}(u+v) = \dim \operatorname{Im}(u+v)$. Or :

$$\operatorname{Im}(u+v) = \{u(x)+v(x), x \in E\} \subset \{u(x)+v(x'), (x,x') \in E^2\} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(u+v) &\leq \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \\
&= \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) \quad \text{(formule de Grassmann)} \\
&\leq \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v) \\
&= \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E,F) : \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

D'autre part, puisque $\operatorname{Im}(-v) = \operatorname{Im} v$, on a :

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u+v-v) \leq \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg} v,$$

et donc $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi : $\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u+v)$ et finalement :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E,F) : |\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v).$$

On conclut que :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E,F) : |\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

Exercice 25
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant : $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg} f$.

1. Établir que : $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker} f$.
2. Montrer que les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Solution :

1. Tout d'abord, on va montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ et on conclut en transformant ces inclusions en égalités par un argument de dimension.

— Soit $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Ainsi : $y = f\big(f(x)\big) = f(a)$ avec $a = f(x) \in E$ et par suite $y \in \mathrm{Im}\, f$. D'où l'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}\, f$. De plus, l'hypothèse $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}\, f$ fournit l'égalité des dimensions et donc : $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}\, f$.

— Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors : $f(x) = 0_E$ et donc : $f^2(x) = f(0_E) = 0_E$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et on obtient l'inclusion : $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(f^2)$. De plus, la formule du rang appliquée à f et f^2 donne :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f \quad \text{et} \\ \dim E &= \dim \mathrm{Ker}(f^2) + \mathrm{rg}(f^2). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}\, f$, on en déduit que : $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}(f^2)$. On conclut que : $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. Il suffit de vérifier que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont en somme directe et conclure avec un argument de dimension. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$. Comme $x \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $f(x) = 0_E$. De plus, on a $x \in \mathrm{Im}\, f$ et il existe donc $a \in E$ tel que $x = f(a)$. On a alors : $f\big(f(a)\big) = f(x) = 0_E$ et donc $a \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}\, f$. Donc : $x = f(a) = 0_E$. Ainsi, les espaces $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont en somme directe. De plus, la formule du rang donne :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f.$$

Ce qui permet de conclure que les espaces $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 26
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \Big(f^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim E = 2\,\mathrm{rg}\, f\Big).$$

Solution :
On raisonne par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$. Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$ et par conséquent : $f\Big(f(x)\Big) = 0_E$. Ainsi $f^2 = 0$. D'autre part, la formule du rang nous donne :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f = 2\,\mathrm{rg}\, f.$$

($\Leftarrow$) Supposons $f^2 = 0$ et $\dim E = 2\,\mathrm{rg}\, f$. D'une part, on a $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. En effet, soit $y \in \mathrm{Im}\, f$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $f(y) = f\Big(f(x)\Big) = 0_E$. D'où $y \in \mathrm{Ker}\, f$. D'autre part, la formule du rang nous donne : $2\,\mathrm{rg}\, f = \dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f$ et donc : $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f$. Par inculsion et égalité des dimensions, on peut conclure que : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 27 (Forme géométrique du théorème du rang)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E. Montrer que G et $\mathrm{Im}\, f$ sont isomorphes.

Solution :
On définit l'application :

$$\begin{aligned} g = f_{|G} : \quad G &\longrightarrow \mathrm{Im}\, f \\ x &\longmapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

Alors :

— g est linéaire de G dans $\operatorname{Im} f$. c'est une conséquence directe du fait que f est linéaire.

— g est injective. En effet, on a

$$\operatorname{Ker} g = \{x \in G \mid g(x) = f(x) = 0_F\} = G \cap \operatorname{Ker} f.$$

Comme G et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe, on a : $G \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. D'où $\operatorname{Ker} g = \{0_E\}$ et g est injective.

— g est surjective. En effet, soit $y \in \operatorname{Im} f$, disons : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Comme $E = G + \operatorname{Ker} f$, alors : $x = u + v$ pour certains $u \in G$ et $v \in \operatorname{Ker} f$, donc : $y = f(x) = f(u) + f(v) = f(u) + 0_F = f(u) = g(u)$ avec $u \in G$, ce qui prouve bien que g est surjective.

Ainsi, g définit un isomorphisme de G sur $\operatorname{Im} f$.

Exercice 28

Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel. Montrer qu'une forme linéaire φ sur E non identiquement nulle est surjective.

Solution :

Dire que $\varphi \neq 0$ signifie qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\lambda = \varphi(x_0) \neq 0$. Pour tout réel y, on peut alors écrire :

$$y = \frac{y}{\lambda}\lambda = \frac{y}{\lambda}\varphi(x_0) = \varphi\big(\frac{y}{\lambda}x_0\big).$$

Ainsi $y = \varphi(x)$ avec $x = \dfrac{y}{\lambda}x_0 \in E$, ce qui signifie que φ est surjective.

Exercice 29

Montrer que si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors il existe un vecteur non nul a dans E tel que :

$$E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}a.$$

Solution :

La forme linéaire φ étant non nulle, on peut trouver un vecteur a dans E tel que $\varphi(a) \neq 0$. Ce vecteur a est nécessairement non nul. Pour tout vecteur x dans E, le vecteur $h = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$ est dans le noyau de φ et en écrivant que $x = h + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$ on déduit que $E = \ker(\varphi) + \mathbb{R}a$. Si x est dans $\ker(\varphi) \cap \mathbb{R}a$ on a alors $x = \lambda a$ et $\lambda\varphi(a) = \varphi(x) = 0$ avec $\varphi(a) \neq 0$ ce qui entraîne $\lambda = 0$ et $x = 0$. On a donc $\ker(\varphi) \cap \mathbb{R}a = \{0\}$ et $E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{R}a$.

Exercice 30 (Quand le noyau et l'image sont supplémentaires)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. **(a)** Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

   (b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Solution :

1. Supposons $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \quad (\star)$. Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$, donc $\exists (a, b) \in E \times \operatorname{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$. On a alors $y = f^2(a) \in \operatorname{Im} f^2$. Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2 \quad (\star\star)$. D'après $(\star)$ et $(\star\star)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. **(a)** On a $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. On en déduit que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$. Alors, en utilisant le théorème du rang, on a : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

   (b) Supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. $\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$. On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \operatorname{Ker} f^2$. Or, d'après l'hypothèse et la question précédente, $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ donc $a \in \operatorname{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$. C'est-à-dire $x = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \quad (\star\star\star)$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E \quad (\star\star\star\star)$. Donc, d'après $(\star\star\star)$ et $(\star\star\star\star)$, $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 31
Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel.
Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = Id_E$.

1. Démontrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.
2. Démontrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
3. Démontrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Solution :

1. Montrons que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.
   — $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ est triviale.
   — Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. On a $g(f(x)) = 0$ donc $f(g(f(x)) = 0$ or $f \circ g = Id_E$ donc $f(x) = 0$ et par suite $x \in \operatorname{Ker} f$.
2. Montrons que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.
   — $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ est triviale.
   — Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im} g$. $\exists u \in E, y = g(u)$. or $f \circ g = Id_E$ donc $u = f(g(u))$ et par suite $y = g(f(g(u))) = g \circ f(g(u))$ c'est à dire $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.
3. Montrons que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans E.
   — Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, on a $f(x) = 0$ et $\exists u \in E, x = g(u)$ donc $u = 0$ et ainsi $x = 0$.
   — En pensant à la quastion 1, on tente $x = x - g \circ f(x) + g \circ f(x)$ avec x quelconque dans E. Comme $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$, on a $g \circ f \in \operatorname{Im} g$. Calculons $f(x - g \circ f(x)) = 0$. Bilan : $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$.

Exercice 32
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que
$$\Phi : \quad \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$$
$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}, \quad L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynomes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application :** On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Solution :

1. Par linéarité de l'évaluation, $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$. Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes. Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul. Ainsi, $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective. Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = \dim(\mathbb{K}^3) = 3$ donc Φ est bijective. Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. **(a)** Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base. Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1,0,0)$ i.e. $(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = (1,0,0)$. Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3) \mid L_1$. Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$. La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$. Donc $L_1 = \dfrac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.
3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$. Par construction, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$. Ainsi, $P = P(a_1) L_1 + P(a_2) L_2 + P(a_3) L_3$.
4. On pose $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts. On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1,3,1)$. Par bijectivité de Φ et d'après la question précédente, l'unique solution est le polynôme $P = 1 \times L_1 + 3 \times L_2 + 1 \times L_3$. On a $L_1 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, L_2 = \frac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \frac{X(X-1)}{2}$. Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

CHAPITRE 4

Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1
On considère le système suivant :

$$(\mathcal{S})\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \quad (m\in\mathbb{R}) \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Préciser pour quelle(s) valeur(s) du réel m le système précédent est de Cramer. Déterminer alors son unique solution en fonction de m.

Solution :

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+mz=m \\ (m-1)y-(m+1)z=1-m \\ -(m+1)z=1-m \end{cases}$$

— Si $m=-1$, la dernière ligne montre que $(\mathcal{S})$ n'admet pas de solution.
— Si $m\neq -1$, on a $z=\frac{m-1}{m+1}$ et $(m-1)y=0$. Il faut donc distinguer deux cas.
  — Si $m\neq 1, y=0$ puis $x=m(1-z)=\frac{2m}{m+1}$. Le système est de Cramer et admet pour unique solution le triplet $\left(\frac{2m}{m+1},0,\frac{m-1}{m+1}\right)$
  — Si $m=1$, on trouve $x=1-y$ et $z=0$. Le système admet une infinité de solutions de la forme $(1-y,y,0)$.

Exercice 2 (Produit non commutatif)
Déterminer deux éléments A B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB=0$ et $BA\neq 0$.

Solution : Les matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

Exercice 3
Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Établir que $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

Exercice 4

1. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?
2. On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $(AB-BA)^2 = AB-BA$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 5 (Matrices symétriques et anti-symétriques)
Montrer que l'ensemble $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et l'ensemble $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution : Il est d'abord clair que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous voulons montrer ceci :

$$\exists!(S, A) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{A}_n(\mathbb{K}), \quad M = S + A.$$

Pour cela nous raisonnons par analyse-synthèse.
- **Analyse :** Soient $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{K})$. On suppose que : $M = S + A$. Alors : $M^\top = S^\top + A^\top = S - A$, donc par demi-somme et demi-différence : $S = \frac{M+M^\top}{2}$ et $A = \frac{M-M^\top}{2}$.
- **Synthèse :** Posons : $S = \frac{M+M^\top}{2}$ et $A = \frac{M-M^\top}{2}$. Alors : $M = S+A$, et S est symétrique et A antisymétrique car : $S^\top = \left(\frac{M+M^\top}{2}\right)^\top = \frac{M^\top+M}{2} = S$ et $A^\top = \left(\frac{M-M^\top}{2}\right)^\top = \frac{M^\top-M}{2} = -A$.

Exercice 6 (Rang de matrices)
Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution : On utilise la méthode du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée.

1. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Le rang de la matrice est donc égal à 2.

2. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(B) &\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Le rang de la matrice est donc égal à 3.

3. On a :

$$\mathrm{rg}(C) \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de cette matrice est donc égal à 2.

Exercice 7 (Problèmes de commutation)
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent.

1. On suppose que A est inversible. Justifier que les matrices A^{-1} et B commutent.
2. On suppose que A et B sont inversibles. En déduire que les matrices A^{-1} et B^{-1} commutent.

Solution :

1. Il suffit d'écrire

$$A^{-1}B = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = BA^{-1}.$$

2. Les matrices A et B jouant des rôles symétriques, d'après la question précédente on peut également conclure que les matrices A et B^{-1} commutent. Ainsi :

$$A^{-1}B^{-1} = A^{-1}(B^{-1}A)A^{-1} = A^{-1}(AB^{-1})A^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exercice 8 (Problèmes de commutation)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Solution :
On commence par l'observation suivante : $(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n$. Il en découle que les matrices $I_n - A$ et $I_n - B$ sont inverses l'une de l'autre. En particulier : $(I_n - B)(I_n - A) = I_n$, i.e. après développement : $A + B = BA$, et voilà : $AB = BA$.

Exercice 9 (Matrices de rotation)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Calculer $R(\theta)R(\varphi)$.
2. Montrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et calculer son inverse.

Solution :

1. On trouve à l'aide des formules trigonométriques $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$. REMARQUE : Ceci n'est pas une surprise, multiplier des matrices de rotations revient à composer les rotations planes correspondantes, donc à additionner les angles.

2. On trouve $\det(R(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$, puis

$$R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(-\theta).$$

REMARQUE : Là encore, le point de vue géométrique est primordial. La bijection réciproque d'une rotation est une rotation d'angle opposé.

Exercice 10
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I_n + A$ soit inversible. On pose

$$B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}.$$

1. Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.
2. Montrer que $I_n + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Solution :

1. Comme $(I_n + A)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)$, en multipliant à droite et à gauche par $(I_n + A)^{-1}$, on obtient la relation

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A).$$

2. On a :

$$(I_n + A)(I_n + B) = (I_n + A) + (I_n - A) = 2I_n,$$

donc $I_n + B$ est inversible et

$$(I_n + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A)$$

puis

$$(I_n - B)(I_n + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A - (I_n - A)) = A.$$

Exercice 11 (Matrice à diagonale strictement dominante)
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.
Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Solution : Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $AX = 0$. Il s'agit de montrer que $X = 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons $X \neq 0$. Soit i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\left\{|x_i|, i \in [\![1, n]\!]\right\}$. On a $|x_{i_0}| > 0$. Mais alors,

$$\begin{aligned} AX = 0 &\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0 \\ &\Rightarrow |a_{i_0,i_0} x_{i_0}| = \left| -\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \times |x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|. \end{aligned}$$

Puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Donc, $X = 0$. On en déduit que A est inversible.

Exercice 12

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que :

— M est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$.

— Si M est nilpotente, l'indice de nilpotence de M est le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.

Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes et qui commutent. On note p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B.

1. En calculant $(A+B)^{p+q-1}$, montrer que $A+B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p+q-1$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $(AB)^k = A^k B^k$.
3. En déduire que AB est également nilpotente d'indice inférieur ou égal à $\min(p,q)$.
4. Montrer que le produit d'une matrice carrée et d'une matrice nilpotente de même taille et qui commutent est une matrice nilpotente.
5. Montrer que $I_n - A$ est inversible et donner son inverse.
6. On pose $C = I_n - A$. Montrer que $I_n - C^{-1}$ est nilpotente.
7. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si MN est nilpotente alors NM l'est également.

Exercice 13 (Puissance d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur)

1. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme annulateur non nul. (On peut considérer la famille $\left(I_n, A, \cdots, A^{n^2}\right)$.)
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice ne comportant que des 1.
   (a) Déterminer un polynôme annulateur pour A.
   (b) En déduire la valeur de A^k pour tout $k \geq 2$.

Solution :

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Par suite, toute famille de n^2+1 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est liée ; c'est le cas en particulier de la famille $\left(I_n, A, \cdots, A^{n^2}\right)$. Il existe donc des scalaires $a_0, \cdots, a_{n^2}$ non tous nuls, tels que
$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0.$$
Le polynome $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$ est ainsi non nul et annulateur de la matrice A.
2. **(a)** On vérifie facilement que $A^2 = nA$ et donc $P = X^2 - nX$ est un polynôme annulateur pour A.
   (b) Effectuons ensuite la division euclidienne de X^k par P. Puisque P est de degré 2, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$X^k = P(X)Q(X) + aX + b.$$
On évalue cette égalité en les racines de P, à savoir 0 et n. L'évaluation en 0 donne $b = 0$ et l'évalution en n donne $a = n^{k-1}$. On a

donc $X^k = P(X)Q(X) + n^{k-1}X$. On en déduit que $A^k = n^{k-1}A$, relation que l'on aurait tout aussi bien pu prouver assez simplement par récurrence !

Exercice 14 (Puissance $n^{\text{ième}}$ avec la formule du binôme)

Pour $a \in \mathbb{R}$, soient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$.
2. Calculer B^n pour tout entier $n \geqslant 2$.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice B est-elle inversible ? Calculer B^{-1} pour ces valeurs de a.

Solution :

1. $AN = NA = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.
2. Comme les matrices A et N commutent, on peut utiliser la formule du binome de Newton et on obtient :

$$\begin{aligned} B^n = (A+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k A^{n-k} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} A^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} NA^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} N^2 A^{n-2} \end{aligned}$$

puisque $n \geqslant 2$ (sinon, il y aurait moins de termes dans la somme). Comme $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$ et $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve pour $n \geqslant 2$,

$$B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a^{n-2} \begin{pmatrix} a^2 & na & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & a^2 & na \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice B est triangulaire supérieure, elle est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont nont nuls (le déterminant est ici le produit des coefficients diagonaux), c'est-à-dire si et seulement si a est non nul. Pour inverser B, on procède par pivot de Gauss :

$$BX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} ax_1 + x_2 &= y_1 \\ ax_2 + x_3 &= y_2 \\ ax_3 &= y_3 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{a} y_1 - \tfrac{1}{a^2} y_2 + \tfrac{1}{a^3} y_3 \\ x_2 &= \tfrac{1}{a} y_2 - \tfrac{1}{a^2} y_3 \\ x_3 &= \tfrac{1}{a} y_3 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X = B^{-1}Y.$$

Exercice 15 (Calcul des puissances d'une matrice carrée)
Soient les matrices

$$M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a)** Trouver l'unique vecteur colonne X_1 dont la première coordonnée vaut 1 tel que $MX_1 = 0$.
   b) Trouver l'unique vecteur colonne X_2 dont la deuxième coordonnée vaut 1 tel que $MX_2 = \frac{1}{12}X_2$.
   c) Trouver l'unique vecteur colonne X_3 dont la dernière coordonnée vaut 2 tel que $MX_3 = X_3$.
2. On note P la matrice dont les vecteurs colonnes sont (dans l'ordre) X_1, X_2 et X_3. Montrer que la matrice P est inversible et calculer sa matrice inverse.
3. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et égale à D. Déterminer D^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6+16\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3+8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2-24\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Solution :

1. On trouve $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. On pourrait calculer le déterminant de P mais le fait qu'on puisse inverser P à l'aide de la méthode du pivot suffit à justifier l'inversibilité. On trouve $P^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. On a bien $D = P^{-1}MP$ et $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 1$.
4. Classique, c'est du cours !
5. Il suffit de calculer explicitement PD^nP^{-1} avec les expressions de P^{-1} et D^n données précédemment.

Exercice 16 (Matrices et suites)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra commencer par calculer $A^2, A^3, \ldots$

2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $\begin{cases} x_0, y_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}$

   a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.

   b) Montrer alors que $X_n = A^n X_0$.

   c) En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

1. On s'aperçoit que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$. On peut dès lors conjecturer que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} A$$

   Démontrons ce résultat par récurrence, sachant qu'il est évidemment vrai pour $n = 1$.

$$A^{n+1} = A^n A = 2^{n-1} A \times A = 2^{n-1} A^2 = 2^n A.$$

   D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai quel que soit $n \geqslant 1$.

2. **a)** On a $X_{n+1} = AX_n$.

   b) Par récurrence, $X_n = AX_{n-1} = A \times AX_{n-2} = A^2 X^{n-2} = \ldots = A^n X_0$.

   c) Ainsi,

$$\begin{aligned} X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n X_0 \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}x_0 - 2^{n-1}y_0 \\ -2^{n-1}x_0 + 2^{n-1}y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Par identification, pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_n = 2^{n-1}x_0 - 2^{n-1}y_0 \quad \text{et} \quad y_n = -2^{n-1}x_0 + 2^{n-1}y_0.$$

Exercice 17 (Quelques applications du calcul matriciel)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Vérifier que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
3. Montrer que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ et v_n en fonction de u_0 et v_0 et de n.

(c) Etudier la convergence de ces deux suites.

5. On considère deux fonction x et y définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables sur $\mathbb{R}$. On suppose que x et y vérifient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y. \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, c'est à dire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

On définit deux fonctions $x_1, y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = P^{-1} \cdot X$.

On pose $X_1' = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $X_1' = D \cdot X_1$.

(b) En déduire deux équations différentielles vérifiées par x_1 et y_1.

(c) Déterminer les fonctions x_1 et y_1, et en déduire les solutions x et y du système de départ.

Solution :

1. La matrice P est une matrice 2×2. On peut donc appliqué le critère du cours : on a $ad - bc = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$. La matrice P est donc inversible, et son inverse est :

$$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Il suffit de faire le produit !
3. Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_n$ et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Soit à présent $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{n}} &= \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{n fois}} \\ &= \left(PDP^{-1}\right) \times \left(PDP^{-1}\right) \times \cdots \times \left(PDP^{-1}\right) \times \left(PDP^{-1}\right) \\ &= P \times D \times \left(P^{-1}P\right) \times D \times \cdots \times D \times \left(P^{-1}P\right) \times D \times P^{-1} \\ &= P \times \underbrace{D \times D \times \cdots \times D}_{\text{n fois}} \times P^{-1} \\ &= PD^{\mathrm{n}}P^{-1}. \end{aligned}$$

Notons de plus que $D^{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

4. **(a)** On a : $AX_n = \begin{pmatrix} -u_n + 2v_n \\ -4u_n + 5v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

   (b) On a donc en itérant le résultat précédent

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = \cdots = A^n X_0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   De plus, on a : $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 2 - 3^n & -1 + 3^n \\ 2 - 2 \times 3^n & -1 + 2 \times 3^n \end{pmatrix}$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3^n & -1 + 3^n \\ 2 - 2 \times 3^n & -1 + 2 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 - 3^n)\, u_0 + (-1 + 3^n)\, v_0 \\ (2 - 2 \times 3^n)\, u_0 + (-1 + 2 \times 3^n)\, v_0 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (2u_0 - v_0) + 3^n\,(v_0 - u_0) \quad \text{et } v_n = (2u_0 - v_0) + 3^n\,(2v_0 - 2u_0)\,.$$

   (c) On a trois cas poesibles :
   - si $u_0 = v_0$, les suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à $2u_0 - v_0$;
   - si $u_0 < v_0$, les suites (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$;
   - si $u_0 > v_0$, les suites (u_n) et (v_n) divergent vers $-\infty$;

5. **(a)** On a d'après l'énoncé :

$$X' = AX = APX_1.$$

   De plus on a $X = PX_1$, soit $\begin{cases} x = x_1 + y_1 \\ y = x_1 + 2y_1 \end{cases}$. En dérivant ces deux équations, on obtient :

$$\begin{cases} x' = x_1' + y_1' \\ y' = x_1' + 2y_1' \end{cases}$$

   Ainsi on a $X' = PX_1'$. On obtient en remplaçant dans l'égalité précédente :

$$PX_1' = APX_1 \quad \Leftrightarrow \quad X_1' = P^{-1}APX_1 = DX_1$$

   car $A = PDP^{-1}$.

   (b) On a alors en écrivant ce produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi x_1 et y_1 satisfont les deux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants suivantes :

$$x_1' = x_1 \quad \text{et} \quad y_1' = 3y_1.$$

(c) On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}, x_1(t) = \lambda e^t$ et $y_1(t) = \mu e^{3t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On obtient alors x et y avec la relation $X = P \cdot X_1$: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu e^{3t} \\ \lambda e^t + 2\mu e^{3t} \end{pmatrix}$$

Les solutions x et y du système de départ sont donc :

$$x(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} \quad \text{et} \quad y(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{3t} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

CHAPITRE 5

Complément de cours : Structures algébriques

Exercice 1
Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in G, x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Solution :
Suppposons que tout carré soit égal à l'élément neutre. Alors

$$xy = y^2xyx^2 = y(yxyx)x = y(yx)^2x = yex = yx.$$

Autre méthode : Soit $x, y \in G$. En utilisant le fait que pour tout $z \in G$ on a $z^2 = 1$, i.e. $z = z^{-1}$, on en déduit que

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

et G est abélien.

Exercice 2
Soient $(G, \star)$ un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de G. On suppose que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de G. Montrer que $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

Solution :
Raisonnons par l'absurde et supposons que $H_1 \nsubseteq H_2$ et $H_2 \nsubseteq H_1$. Alors, il existe $x_1 \in H_1$, $x_1 \notin H_2$ et il existe $x_2 \in H_2$, $x_2 \notin H_1$. Comme $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe, $x_1 \star x_2 \in H_1 \cup H_2$. Si $x_1 \star x_2 \in H_1$, alors $x_2 = x_1' \star (x_1 \star x_2) \in H_1$, ce qui est absurde. De même, on parvient à une absurdité en supposant $x_1 \star x_2 \in H_2$. D'où le résultat.

Exercice 3 Soit G un groupe. Montrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G :

1. $\mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$ ($\mathcal{Z}(G)$ s'appelle le centre de G).
2. $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G.

Solution :

1. 1_G est élément de $\mathcal{Z}(G)$ car $1_G y = y 1_G = y$ pour tout $y \in G$. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{Z}(G)$. Alors, pour tout $y \in G$, on a $x_1 x_2 y = x_1 (x_2 y) = (x_1 y) x_2 = y x_1 x_2$ et donc $x_1 x_2 \in \mathcal{Z}(G)$. Enfin, si $x \in \mathcal{Z}(G)$, alors pour tout $y \in G$,
$$xy = yx \Longrightarrow xyx^{-1} = y \Longrightarrow yx^{-1} = x^{-1}y.$$
On en déduit que $x^{-1} \in \mathcal{Z}(G)$ qui est donc un sous-groupe de G.
2. Puisque H est un sous-groupe de $G, 1_G \in H$ et donc $a1_G a^{-1} \in aHa^{-1}$. Mais $a1_G a^{-1} = 1_G$ et donc $1_G \in aHa^{-1}$. soient $x = aha^{-1}$ et $y = ah'a^{-1}$ deux éléments de aHa^{-1} avec donc $h, h' \in H$. On a $xy^{-1} = aha^{-1}\left(ah'a^{-1}\right)^{-1} = aha^{-1}\left(ah'^{-1}a^{-1}\right) = ahh'^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$ puisque $hh'^{-1} \in H$. aHa^{-1} est donc bien un sous-groupe de G.

Exercice 4
Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et A, B deux sous-groupes de G. On note $AB = \{ab; a \in A, b \in B\}$. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.
Solution :

($\Rightarrow$) Supposons que AB est un sous-groupe de G et montrons que $AB = BA$. Soit $x \in AB$. Alors $x^{-1} \in AB$ et donc $x^{-1} = ab$ pour certains $a \in A$ et $b \in B$. Par passage à l'inverse, on obtient : $x = b^{-1}a^{-1} \in BA$.
De même, si $y = ba \in BA$, alors $y^{-1} = a^{-1}b^{-1} \in AB$ et donc $y = (y^{-1})^{-1} \in AB$.
($\Leftarrow$) Supposons que $AB = BA$ et montrons que AB est un sous-groupe de G.
- Puisque A et B sont deux sous-groupes de G, alors $1_G \in A$ et $1_G \in B$ et donc $1_G = 1_G 1_G \in AB$.
- Soit $x = ab \in AB$ et $y = a'b' \in AB$. Alors, $xy = aba'b'$. Or, $ba' \in BA = AB$ et donc $ba' = a''b''$ avec $a'' \in A$ et $b'' \in B$. On en déduit que : $xy = aa''b''b' \in AB$.
- Soit $x = ab \in AB$. Alors, $x^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA = AB$.

Exercice 5
Soit G un groupe multiplicatif et $f \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$ une application.
Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.
Solution :

($\Rightarrow$) Supposons que f est un morphisme de groupes. Pour tous $x, y \in G$, on a
$$xy = f(x^{-1})f(y^{-1}) = f(x^{-1}y^{-1}) = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = yx$$
et G est abélien.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que G est abélien. Soit $x, y \in G$. On a
$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$
et donc f est un morphisme de groupes.

Exercice 6 (Groupe des automorphismes intérieurs)
Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. On note $\varphi_a \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a \star x \star a^{-1} \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ_a est un morphisme de groupes.
2. Montrer que φ_a est bijectif et déterminer $(\varphi_a)^{-1}$.

L'ensemble $\mathcal{A} = \{\varphi_a,\ a \in G\}$, muni de la loi de composition, est un groupe (on a d'ailleurs $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$), appelé groupe des automorphismes intérieurs de G.

Exercice 7
Trouver tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
Solution :

Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. $Im(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et donc $Im(f) = n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n \geq 1$. Soit x un antécédant de n. On obtient alors : $2f(\frac{x}{2}) = f(x) = n$ et donc $\frac{n}{2} = f(\frac{x}{2}) \in n\mathbb{Z}$, ce qui est absurde. On a donc $n = 0$ et f est nul.

Exercice 8 (Congruence modulo un sous-groupe et théorème de Lagrange)
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On appelle relation de congruence à droite modulo H sur G la relation définie pour tous $x, y \in H$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G. On note $H\backslash G$ l'ensemble quotient associé, et on l'appelle l'ensemble des classes à droites modulo H.
2. Montrer que $H\backslash G = \{Hx \mid x \in G\}$.
3. Montrer que $\text{Card}(Hx) = \text{Card}(H)$. (On rappelle que deux ensembles A et B ont le même cardinal s'il existe une bijection $f : A \to B$).
4. Supposons que G est fini. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.

Solution :

1. — $x\mathcal{R}x$ car $xx^{-1} = 1_G \in H$.
   — Si $x\mathcal{R}y$, alors $xy^{-1} \in H$, d'où $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, donc $y\mathcal{R}x$.
   — Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $xz^{-1} = (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$, donc $x\mathcal{R}z$.
2. Montrons que $H\backslash G = \{Hx \mid x \in G\}$, où l'on a noté $H\backslash G$ l'ensemble quotient : $G/\mathcal{R} = \{\bar{x} | x \in G\}$. Soit $x \in G$. Pour tout $y \in G$, on a :

$$\begin{aligned} y \in \bar{x} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H : xy^{-1} = h \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H : y^{-1} = x^{-1}h \\ &\Leftrightarrow \exists h \in H : y = h^{-1}x \\ &\Leftrightarrow y \in Hx \end{aligned}$$

   Donc : $H\backslash G = \{\bar{x} | x \in G\} = \{Hx \mid x \in G\}$.
3. Montrons que $\text{Card}(Hx) = \text{Card}(H)$. Soit $x \in G$ et considérons l'application $\begin{array}{rccc} \varphi_x : & H & \longrightarrow & Hx \\ & h & \longmapsto & hx. \end{array}$
   — φ_x est injective : Soit $h_1, h_2 \in H$ tel que $\varphi_x(h_1) = \varphi_x(h_2)$. alors $h_1x = h_2x$ et en multipliant à droite par x^{-1}, on obtient : $h_1 = h_2$.

— φ_x est surjective : Soit $y \in Hx$. Par définition de Hx, il existe $h \in H$ tel que $y = hx = \varphi_x(h)$. D'où φ_x est bijective et donc $\text{Card}(Hx) = \text{Card}(H)$.

4. Supposons que G est fini. Montrons que $\text{Card}(H)$ divise $\text{Card}(G)$. Les classes d'équivalences forment une partition de G, donc s'il y a k classes, alors $\text{Card}(G) = k\,\text{Card}(H)$. En effet,

$$\begin{aligned}\text{Card}(G) = \sum_{\bar{x}\in G/\mathcal{R}} \text{Card}(\bar{x}) &= \sum_{\bar{x}\in G/\mathcal{R}} \text{Card}(Hx)\\ &= \sum_{\bar{x}\in G/\mathcal{R}} \text{Card}(H)\\ &= \text{Card}(H) \sum_{\bar{x}\in G/\mathcal{R}} 1\\ &= \text{Card}(H)\,\text{Card}(G/\mathcal{R}).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 9 (Anneau de Boole)
Soit A un anneau tel que tout élément de A soit idempotent (i.e. $\forall x \in A, x^2 = x$).

1. Si $x \in A$ montrer que $2x = 0$. Montrer que A est commutatif.
2. Montrer que si $x, y \in A$ alors $xy(x + y) = 0$. Que dire si A est intègre ?

Solution :

1. Soit $x \in A$. Alors $(2x)^2 = 2x$ donc $4x^2 = 2x$, ce qui entraine $4x = 2x$ et donc $2x = 0$. Ce qui s'écrit encore $x = -x$.
Montrons que A est commutatif. Soit $x, y \in A$, alors $x + y \in A$. Ainsi, par définition de A, on obtient $(x + y)^2 = x + y$ et donc $x^2 + xy + yx + y^2 = x + y = x^2 + y^2$. D'où, $xy + yx = 0$ et donc $xy = -yx = yx$. Ce qui montre que A est commutatif.
2. Soit $x, y \in A$, alors $xy(x + y) = xyx + xy^2 = x^2y + xy^2 = 2xy = 0$.
Sopposons que A est intègre. Alors A a au plus deux éléments. En effet, sinon il existe $x, y \in A$ distincts et différents de 0. Donc $(x + y) \neq 0$ (car sinon $x = -y = y$) et A étant intègre $xy(x + y) \neq 0$, absurde.

Exercice 10 (Eléments nilpotents d'un anneau)
Soit A un anneau. Un élément a de A est dit nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Soit $(a, b) \in A^2$. Montrer que, si a est nilpotent et si $ab = ba$, alors ab est nilpotent.
2. Soit $a \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible dans A et exprimer $(1 - a)^{-1}$.
3. Soit $(a, b) \in A^2$. Montrer que, si a et b sont nilpotents et $ab = ba$, alors $a + b$ est nilpotent.

Exercice 11 (Anneau des entiers de Gauss)
On pose $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Donner ses éléments inversibles.

$\mathbb{Z}[i]$ est appelé l'anneau des entiers de Gauss.
Solution :

1. On a $1 = 1+0\times i$ donc $1 \in \mathbb{Z}[i]$. Soient z_1 et z_2 dans $\mathbb{Z}[i]$. Il existe a_1, b_1, a_2 et b_2 dans $\mathbb{Z}$ tels que $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. On a alors
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$
et comme $a_1 - a_2, b_1 - b_2, a_1a_2 - b_1b_2$ et $a_1b_2 + a_2b_1$ appartiennent à $\mathbb{Z}$, $z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ et $z_1z_2 \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]^\times$, où $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors, il existe $z' = a' + ib' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$. Donc $|z|^2|z'|^2 = 1$. Or, comme $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, alors $|z|^2, |z'|^2 \in \mathbb{N}$. Ainsi : $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. Donc $a^2 + b^2 = 1$ et puisque $a, b \in \mathbb{Z}$, alors
$$\begin{cases} a^2 = 1 \,\text{et}\, b^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a^2 = 0 \,\text{et}\, b^2 = 1 \end{cases}$$
et donc $z \in \{-1, 1, i, -i\}$. D'où $\mathbb{Z}[i]^\times \subset \{-1, 1, i, -i\}$.
Inversement, il est facile de vérifier que $\{-1, 1, i, -i\} \subset \mathbb{Z}[i]^\times$. D'où l'égalité $\mathbb{Z}[i]^\times = \{-1, 1, i, -i\}$.

Exercice 12
Soient $(K, +, \cdot)$ et $(L, +, \cdot)$ deux corps et soit $f : K \to L$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que si $x \in K \setminus \{0_K\}$, alors $f(x)$ est inversible et déterminer son inverse.
2. En déduire qu'un morphisme de corps est injectif.

Solution :

1. Soit $x \in K \setminus \{0_K\}$. Alors on a $x \cdot x^{-1} = 1_K$. On applique f à cette identité, et en utilisant que f est un morphisme d'anneaux, on trouve $f(x) \cdot f\left(x^{-1}\right) = 1_L$. Ainsi, $f(x)$ est inversible, d'inverse $f\left(x^{-1}\right)$.
2. II suffit de démontrer que le noyau de f est réduit à 0_K. Mais si $f(x) = 0$, alors $x \notin K \setminus \{0_K\}$ d'après la question précédente, et donc $x = 0$.

Exercice 13
Montrer que tout anneau intègre et fini est un corps.
Solution :

Soit $a \in A$ non nul. L'application $f_a \,\left|\, \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array}\right.$ est injective. En effet, puisque A est un anneau intègre et a est non nul, pour tous $x, y \in A$, on a
$$f_a(x) = f_a(y) \Longrightarrow ax = ay \Longrightarrow ax - ay = 0 \Longrightarrow a(x-y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$
Et comme A est un ensemble fini, toute injection de A dans A est une bijection. Ainsi f_a est bijective. Soit $b \in A$ l'antécédent de 1 par f_a. Alors : $ab = f_a(b) = 1$.

On a montré que pout tout $a \in A$ non nul, $\exists b \in A$ tel que $ab = 1$. De plus, comme A est intègre, alors on aussi $ba = 1$ et donc b est l'inverse de a. En effet, puisque $ab = 1$, alors : $a(ba-1) = a(ba) - a = (ab)a - a = 1 \times a - a = a - a = 0$. Or $a \neq 0$ et A est intègre, donc $ba - 1 = 0$, i.e, $ba = 1$. D'où le résultat.

Exercice 14
Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. On note :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{d}], +, \times)$ est un corps.
Solution :

On va montrer qu'il s'agit d'un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Remarquons d'abord que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{R}$ et que $1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. soient $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. On les écrit $x = a + b\sqrt{d}$ et $y = a' + b'\sqrt{d}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$. Alors :

$$\begin{aligned} x - y &= (a - a') + (b - b')\sqrt{d} \\ xy &= (aa' + dbb') + (ab' + a'b)\sqrt{d} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $x - y$ et $xy \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. D'autre part, si $x \neq 0$, on peut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjugée $a - b\sqrt{d}$ et l'on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - b^2 d} = \frac{a}{a^2 - b^2 d} - \frac{b}{a^2 - b^2 d}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

et donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Remarquons qu'il était possible de multiplier par la quantité conjuguée qui est non nulle car $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. D'où le résultat.

Exercice 15 (Endomorphisme du corps $\mathbb{R}$)
On veut montrer que le seul endomorphisme du corps $\mathbb{R}$ est l'identité. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de corps (ou d'anneaux).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f(x) \in \mathbb{R}^+$.
3. Montrer que f est croissante.
4. Conclure.

Solution :

1. Puisque f est un morphisme d'anneaux, alors f(1)=1 et $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(n.1) = nf(1) = n$.
   Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a : $p = f(p) = f(qx) = qf(x)$. Donc $f(x) = \frac{p}{q} = x$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a $f(x) = f((\sqrt{x})^2) = (f(\sqrt{x}))^2 \in \mathbb{R}^+$.
3. soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y$. Comme $y - x \geq 0$, alors d'après la question (2) on a : $f(y - x) = f(y) - f(x) \geq 0$. Donc $f(x) \leq f(y)$. Ce qui montre que f est croissante.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe deux suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergentes vers x telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, r_n := \frac{E(10^n x)}{10^n} \leq x < s_n := \frac{E(10^n x)}{10^n} + \frac{1}{10^n},$$

où $E(\cdot)$ désigne la fonction partie entière.
En utilisant le fait que f est croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = r_n \leq f(x) \leq f(s_n) = s_n$. Les suites extrémités convergent vers x et donc $f(x) = x$. Ainsi le seul endomorphisme d'anneaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité.

CHAPITRE 6

Des éléments de correction de l'examen d'Algèbre 1 : A.U. 2020/2021

Exercice 1 : (5 points)

Soit G un groupe multiplicatif et $f \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$ une application.

Montrer que f est un morphisme de groupes si et seulement si G est abélien.

Solution :

($\Rightarrow$) Supposons que f est un morphisme de groupes. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$xy = f(x^{-1})f(y^{-1}) = f(x^{-1}y^{-1}) = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = yx$$

et G est abélien.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que G est abélien. Soit $x, y \in G$. On a

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$

et donc f est un morphisme de groupes.

Exercice 2 : (5 points)

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ du polynôme
$$P = X^7 - 1.$$
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.

Solution :

1. Cherchons les racines de P dans $\mathbb{C}$, c-à-d les nombres complexes z tels que $z^7 - 1 = 0$. On a :
$$\begin{aligned} z^7 - 1 = 0 &\Leftrightarrow z^7 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{7}}, \quad k \in \{0, \cdots, 6\}. \end{aligned}$$

D'où, dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \prod_{k=0}^{6}(X - e^{i\frac{2k\pi}{7}}).$$

Or $e^{i\frac{2\pi}{7}}$ et $e^{i\frac{12\pi}{7}}$ sont conjugués, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $e^{i\frac{10\pi}{7}}$ sont conjugués ainsi que $e^{i\frac{6\pi}{7}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{7}}$. Donc, par regroupement des racines non réelles du polynôme P par paires de conjugués, dans $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X-e^{i\frac{2\pi}{7}})(X-e^{i\frac{12\pi}{7}})(X-e^{i\frac{4\pi}{7}})(X-e^{i\frac{10\pi}{7}})(X-e^{i\frac{6\pi}{7}})(X-e^{i\frac{8\pi}{7}}) \\ &= (X-1)(X^2-2\cos(\frac{2\pi}{7})X+1)(X^2-2\cos(\frac{4\pi}{7})X+1)(X^2-2\cos(\frac{6\pi}{7})X+1). \end{aligned}$$

2. Soit $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
   — **Recherche de la partie entière** : Comme $\deg F < 0$, alors la partie entière est nulle.
   — **Forme de la décomposition en éléments simple dans** $\mathbb{R}(X)$: La décomposition cherchée s'écrit :

   $$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2} \quad (\bigstar)$$

   où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
   — **Calcul de** a : On multiplie $\bigstar$ par X puis on évalue en 0, pour obtenir : $a = \frac{1}{2}$.
   — **Calcul de** b : On multiplie $\bigstar$ par $X+1$ puis on évalue en -1, pour obtenir : $b = -1$.
   — **Calcul de** c : On multiplie $\bigstar$ par $X+2$ puis on évalue en -2, pour obtenir : $c = \frac{1}{2}$.
   — **Conclusion** : Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :

   $$F = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}.$$

Exercice 3 : (10 points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Soit (x, y, z) un vecteur de E. Montrer que $u(x, y, z) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. En déduire le rang de u.
4. Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.
5. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$.
6. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Solution :

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On a : $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et donc par linéarité de u, on obtient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) \\ &= x(-2e_1 + 2e_3) + 3ye_2 + z(-4e_1 + 4e_3) \\ &= (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} u &= \{(x, y, z) \in E \mid u(x, y, z) = 0_E\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid -2x - 4z = 0, 3y = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0\} \\ &= \{(-2z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\Big(\overbrace{(-2, 0, 1)}^{w}\Big). \end{aligned}$$

Donc la famille (w) engendre $\operatorname{Ker} u$. De plus, comme $w \neq 0_E$, alors la famille (w) est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} u$.

3. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u.$$

Or, d'après la question précédente, on sait que $\dim \ker u = 1$ et donc : $\operatorname{rg} u = 3 - 1 = 2$.

4. Comme $\operatorname{Ker} u$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$ alors l'endomorphisme u n'est pas injectif. Par ailleurs, comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimenion finie $E = \mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif.

5. On a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$. De plus, on remarque que $u(e_3) = 2u(e_1)$. Du coup, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$. Ainsi la famille $\mathcal{C} := \Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$ engendre $\operatorname{Im} u$ et de plus on a $\operatorname{Card} \mathcal{C} = 2 = \dim \operatorname{Im} u$. C'est donc une base de $\operatorname{Im} u$.

6. Par le théorème de la base adaptée, il suffit de montrer que la famille obtenue par concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} u$ et d'une base de $\operatorname{Im} u$ constitue une base de E. Soit alors $\mathcal{B}' = \Big((-2, 0, 1), (-2, 0, 2), (0, 3, 0)\Big)$ une telle famille. On vérifie facilement que c'est une famille libre et donc une base de E. D'où : $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

CHAPITRE 7

Des éléments de correction de l'examen d'Algèbre 1 : A.U. 2020/2021 (Session de rattrapage)

Exercice 1 : (6 points)
Soit G un groupe noté multiplicativement. Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par : $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que τ_a est un morphisme du groupe G vers lui même.
2. Vérifier que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ pour tous a et b dans G.
3. Montrer que τ_a est bijective et exprimer son application réciproque.

Solution :

1. Soit $x, y \in G$. On a par associativité :
$$\tau_a(x)\tau_a(y) = (axa^{-1})(aya^{-1}) = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = axya^{-1} = \tau_a(xy).$$
L'application τ_a est donc un morphisme du groupe G vers lui-même.
2. On vérifie l'égalité de deux applications en constatant celle-ci en tout point. Pour tout $x \in G$, on a :
$$(\tau_a \circ \tau_b)(x) = \tau_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x).$$
On a donc : $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
3. On peut montrer que τ_a est bijective en étudiant injectivité et surjectivité, ou en résolvant l'équation $\tau_a(x) = y$ d'inconnue x. Ici, il est plus à propos de proposer un candidat pour l'application réciproque de τ_a. Pour cela, il suffit de remarquer que :
$$(\tau_a \circ \tau_{a^{-1}}) = \tau_1 = Id_G \quad \text{et} \quad (\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a) = \tau_1 = Id_G.$$
On en déduit que τ_a est bijective et $(\tau_a)^{-1} = \tau_{a^{-1}}$.

Exercice 2 : (6 points)

1. Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :
$$P = (X^2 - X + 1)^2 + 1.$$
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Solution :

1. On a : $P = (\underbrace{X^2 - X + 1 + i}_{\text{noté } Q})(\underbrace{X^2 - X + 1 - i}_{\text{noté } R})$. Le discriminant Δ de Q est :
$$\Delta = 1 - 4(1+i) = -3 - 4i = (1-2i)^2.$$
Donc les zéros de Q dans $\mathbb{C}$ sont :
$$\frac{1 + (1-2i)}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad \frac{1 - (1-2i)}{2} = i.$$
D'où :
$$Q = (X - (1-i))(X - i).$$
De même (ou par conjugaison) :
$$R = (X - (1+i))(X + i).$$
D'où :
$$\begin{aligned} P &= (X - 1 + i)(X - i)(X - 1 - i)(X + i) \\ &= (X - 1 + i)(X - 1 - i)(X - i)(X + i) \\ &= \Big((X-1)^2 + 1\Big)(X^2 + 1) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 1) \end{aligned}$$
et les deux trinômes obtenus sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans $\mathbb{R}(X)$, on a :
$$F = \frac{\frac{1}{2}}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+2}.$$
3. En utilisant la décomposition en éléments simples précédente, on trouve :
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1/2}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}. \end{aligned}$$
On en déduit immédiatement que $(S_n)_n$ converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 : (8 points)
Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(x, y, z) = (3z, -x + y + 3z, z).$$

1. Montrer que $f \circ f = f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
3. Vérifier que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.
4. En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Solution :

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On a :

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x, y, z) &= f\Big(f(x, y, z)\Big) \\ &= f(3z, -x + y + 3z, z) \\ &= \Big(3z, -3z + (-x + y + 3z) + 3z, z\Big) \\ &= (3z, -x + y + 3z, z) = f(x, y, z).\end{aligned}$$

   Ainsi : $\forall (x, y, z) \in E : \quad (f \circ f)(x, y, z) = f(x, y, z)$. D'où $f \circ f = f$. (On dit que f est un projecteur).

2. On résout $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et on trouve $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1, 1, 0))$. Ainsi $\mathcal{B}_1 := \Big((1, 1, 0)\Big)$ engendre $\operatorname{Ker}(f)$. Comme $(1, 1, 0) \neq 0_E$, alors $\mathcal{B}_1$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$. De plus, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}((0, 1, 0), (3, 3, 1))$. Ainsi $\mathcal{B}_2 := \Big((0, 1, 0), (3, 3, 1)\Big)$ engendre $\operatorname{Im}(f)$. Comme $(0, 1, 0)$ et $(3, 3, 1)$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathcal{B}_2$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$.

3. Soit $u \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors $f(u) = 0_E$ et il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Ainsi, $f(u) = 0_E = f(f(v)) = f^2(v) \underset{f \text{ proj.}}{=} f(v) = u$ donc u est bien nul.

4. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\} \quad \text{et} \\ &\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f).\end{aligned}$$

   D'où le résultat d'après la caractérisation de la supplémentarité en dimension finie.

CHAPITRE 8

Des éléments de correction de l'examen d'Algèbre 1 : A.U. 2021/2022

Exercice 1 : (4 points)

1. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit une racine au moins double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant de degré n. Montrer qu'il existe des nombres complexes $a_1, \cdots, a_n, \lambda$ tels que $P = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$. (**Indication :** raisonner par récurrence sur le degré n et utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss).

Solution :

1. On a : 1 est racine au moins double de $P = X^5 + aX^2 + bX \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow a = -4 \text{ et } b = 3.$$
On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2\left(X^2 + 2X + 3\right)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.
2. Il s'agit d'un résultat important du cours qui affirme que "**tout polynôme non constant de** $\mathbb{C}[X]$ **est scindé sur** $\mathbb{C}$". Prouvons la propriété par récurrence sur $n \geq 1$. Le résultat est clair au rang 1. Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 1$ et considérons un polynôme P de degré $n+1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet une racine que l'on note $a_{n+1} \in \mathbb{C}$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - a_{n+1})Q$. Comme $\deg(Q) = n$, on déduit de l'hypothèse au rang n, l'existence de $a_1, \cdots, a_n$

et λ dans $\mathbb{C}$ tels que : $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$. D'où :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n+1}(X - a_k).$$

L'hypothèse est donc vraie au rang $n+1$. On déduit du principe de récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 2 : (3 points)

1. Soient $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ irréductible et $a \in \mathbb{C}$. On suppose que a est un pôle simple de F de partie polaire associée $\dfrac{\lambda}{X-a}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $F_n = \dfrac{1}{X^n - 1}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Solution :

1. Comme a est pôle simple de F, alors : $Q = (X-a)Q_1$ pour un certain $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q_1(a) \neq 0$ et F s'écrit : $F = \frac{\lambda}{X-a} + F_0$ pour une certaine fraction $F_0 \in \mathbb{C}(X)$ n'admettant pas a pour pôle. Ainsi : $\dfrac{P}{Q_1} = (X-a)F = \lambda + (X-a)F_0$, donc en évaluant en a : $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$, mais par ailleurs $Q' = Q_1 + (X-a)Q_1'$, donc $Q'(a) = Q_1(a)$, donc : $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)} = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.
2. Posons $P = 1$ et $Q = X^n - 1$. La partie entière de F_n est nulle et les pôles de F sont simples. De plus, $Q = \prod_{\mathrm{k}=0}^{n-1}(\mathrm{X} - \omega_{\mathrm{k}})$ où $\omega_{\mathrm{k}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\mathrm{k}\pi/\mathrm{n}}$. Donc, $\mathrm{F} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{n-1} \frac{\lambda_{\mathrm{k}}}{\mathrm{X}-\omega_{\mathrm{k}}}$. D'après la question précédente, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\lambda_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}.$$

Exercice 3 : (8 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = e_1 + 3e_2 + 5e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_2 + 2e_3.$$

1. Soit $(x, y, z) \in E$. Montrer que $f(x, y, z) = (x+y, 2x+3y+z, 3x+5y+2z)$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ ainsi que sa dimension.
3. On pose : $e_1' = (1, 2, 3)$, $e_2' = (0, 1, 2)$, $e_3' = (1, -1, 1)$ et on note $\mathcal{C}$ la famille (e_1', e_2', e_3').

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que (e'_1, e'_2) est une base de $\operatorname{Im} f$.

(c) En déduire que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Solution :

1. Soit $(x, y, z) \in E$. On a : $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et donc par **linéarité** de f, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(e_1 + 2e_2 + 3e_3) + y(e_1 + 3e_2 + 5e_3) + z(e_2 + 2e_3) \\ &= (x + y, 2x + 3y + z, 3x + 5y + 2z). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(x, y, z) \in E \mid f(x, y, z) = 0_E\} \\ &= \{(x, y, z) \in E \mid x + y = 0, 2x + 3y + z = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 5y + 2z = 0\} \\ &\vdots \\ &= \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\Big(\overbrace{(1, -1, 1)}^{e'_3}\Big). \end{aligned}$$

Donc la famille $B_1 := (e'_3)$ engendre $\operatorname{Ker} f$. De plus, comme $e'_3 \neq 0_E$, alors la famille B_1 est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$ et on a : $\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{Card}(B_1) = 1$.

3. **(a)** On a $\operatorname{Card} \mathcal{C} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Ainsi, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est libre. Pour cela, on procède par définition ….

(b) On a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\Big) = \operatorname{Vect}\Big(e'_1, f(e_2), e'_2\Big)$. De plus, on remarque que $f(e_2) = e'_1 + e'_2$. Du coup, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\Big(e'_1, e'_2\Big)$. Ainsi la famille $\Big(e'_1, e'_2\Big)$ engendre $\operatorname{Im} f$. De plus, comme e'_1 et e'_2 ne sont pas colinéaires, alors la famile $\Big(e'_1, e'_2\Big)$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

(c) On a $\mathcal{C}$ est une famille obtenue par concaténation d'une base de $\operatorname{Ker} f$ et d'une base de $\operatorname{Im} f$. De plus, d'après la question 3.a), $\mathcal{C}$ constitue une base de E. On en déduit par le théorème de la base adaptée que : $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 4 : (5 points)

Pour $a \in \mathbb{R}$, soient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$.
2. Calculer B^n pour tout entier $n \geqslant 2$.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice B est-elle inversible ? Calculer B^{-1} pour ces valeurs de a.

CHAPITRE 9

Examen d'Algèbre 1 : A.U. 2021/2022 (Session de rattrapage)

Exercice 1 : (6 points)
On pose : $P = (X+1)^5 - X^5 - 1$.

1. Déterminer le degré de P.
2. Montrer que P est divisible par $X - j$, où j est le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. Donner deux racines évidentes de P, en précisant leurs multiplicité.
4. En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles, dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 : (8 points)
Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $F = \left\{(aX+b)(X-1)^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$. En déduire $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $F = \operatorname{Vect}(P_1, P_2)$.
3. Donner une base de F.
4. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3 : (6 points)
Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'indice q (i. e. q est le plus petit entier naturel vérifiant $N^q = 0$). On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n.

1. Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.
2. On pose $A = I_n - N$. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.
3. On suppose $q = 2$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $(I_n + N)^p$ en fonction de p, N et I_n.